关于 Lane-Emden-Fowler 微分方程的解析与数值求解办法

乐绎华[†]

[†] 中山大学 · 数学学院

该 Mathematica 项目完成于 2024 年 12 月 7 日

Abstract

Lane-Emden-Fowler 方程是一类二阶非线性微分方程，它在数学物理以及众多工程领域中有着广泛的应用，比如天体力学、流体力学、热力学等领域，可以用来描述诸如恒星的结构、热传导等现象。为了求解该方程，数学家们使用了大量的解析手段，比如 Kummer-Liouwille 变换、Lie symmetries 和 Painlevé analysis[2]，还有人利用分析力学 [3] 的方法来求解。与此同时，由于该微分方程没有一般意义上的精确解，数学家们还发展出了许多数值求解方法。更进一步，通过引入分数阶导数，time-fractional Emden-Fowler 方程 [5] 更适合天文学和数学物理中的一些问题，当然也更加复杂，当下的研究主要采用 Elzaki transform homotopy perturbation method (ET-HPM) 和 Laplace transform homotopy perturbation method (LH-HPM) 用于给出解析解，这一方法结合扰动技巧，可以得到求解这类方程的数值方法。在具体问题的求解上，Mathematica 的强大运算和画图能力起到了重要作用，包括解方程、画出解的图像等。不过，由于某些方程的求解计算量过大，导致 Mathematica 无法算出结果，我解决了其中一部分问题，但还有一部分计算问题无法解决。

Keywords: *Mathematica*, *Lane-Emden-Fowler* 方程，数值分析，*LH-HPM*，分数阶导数

Contents

1. 写在前面

研究 Lane-Emden-Fowler 方程的动因在于，我曾在 [4] 一书中看到一个数学分析中的数列问题，作者宣称这是一个公开问题。我当时没有很好的思路解决这个问题，便询问了中山大学理学院的廖同学，他花了几天的时间，询问了几位教授，最终出色地解决了这个问题。在本文的最开始，我也将放上他的证明思路。之后，理学院的杨同学提醒我，这道数列题可能跟二阶非线性微分方程 $\theta'' = \theta^{-1}$ 的求解有关，我当即查阅资料，发现这正是 Emden-Fowler 方程的一种特殊形式。然而，Emden-Fowler 方程 [1] 的研究过于复杂，而 Lane-Emden 方程的研究相对更加简单，历史也更加悠久，Emden-Fowler 方程就是它的推广形式。更进一步，time-fractional Emden-Fowler 方程使我很感兴趣，因为它利用到了 Mathematica 课上讲到的分数阶导数，而且求解过程中利用到了 Elzaki 变换和 Laplace 变换以及逆变换，于是我也在本次项目中进行了一些求解的尝试。于是我决定利用这次 Mathematica 项目的机会，进一步研究 Lane-Emden-Fowler 方程，也算是进行一次小小的数学科研尝试吧。在查阅了大量的论文和讲座资料之后，我节选了如下内容，并利用 Mathematica，求解其中的微分方程，并复现其中解的图像。

当然，本项目的行文逻辑依循我自己的对 Lane-Emden-Fowler 方程的探索之旅，由简入繁。首先是 [4] 中的数列问题，它是 Lane-Emden-Fowler 方程的一种离散化形式，蕴含着该方程的数值求解思想。接着我将给出 Lane-Emden 方程 $\theta'' + \frac{2}{\xi\theta'} + \theta^n = 0$，初值条件为 $\theta(0) = 1, \theta'(0) = 0$，它是最早被研究的形式，可追溯到 19 世纪中叶，目前已经有 $n = 0, 1, 5$ 情况下的精确解，这点我也会利用 Mathematica 进行求解和验证，事实上，在 $n \geq 2$ 的时候，Mathematica 中使用`DSolve`函数就已经算不出来了，另一个困难是求解过程中发现，直接使用`NDSolve`函数也无法计算，这就需要使用一些数值技巧帮助计算。然后，我将研究一般的 Emden-Fowler 方程 $\frac{d}{d\xi}\left(\xi^\rho \frac{\theta}{\xi}\right) + b\xi^\sigma\theta^n = 0$，并进行数学推导，将其化简为 $\xi'' = \pm\xi^n$。最后我将研究 time-fractional Emden-Fowler 方程，它引入了一个分数阶导数，将整个方程转化为分数阶偏微分方程 $D_\eta^\alpha\theta = D_\xi^2\theta + L_1 D_\xi\theta + L_2\theta = g(\xi, \eta)$，其中 $\alpha \in (1, 2]$，该分数阶导数的引入在于应用 homotopy perturbation method，我将利用 LT-HPM 求解一个具体的 time-fractional Emden-Fowler 方程，并用 Mathematica 绘制出解的 3D 图像。

2. 一道数列题——问题的开始

我对 Lane-Emden-Fowler 方程的研究是受到 [4] 中的练习 1.30 的启发。

Problem 2.1. 令 $\beta > 0$，$\{x_n\}_{n\geq 1}$ 是由如下递推关系定义的

$$x_1 = a > 0, \quad x_{n+1} = x_n + \frac{n^{2\beta}}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} \tag{1}$$

证明：$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n^\beta} = \sqrt{\frac{\beta+1}{\beta}}$.

该书 [4] 的作者宣称这是一个公开问题，我们先用 Mathematica 画图观察这个极限是否成立：

```
(*参数定义*)a = 1; (*初始值 x1*)
beta = 0.5; (*\[Beta]值*)
nMax = 100; (*最大求解的n值*)

(*递推关系*)
x[n_] :=
 x[n] = If[n == 1, a,
   x[n - 1] + (n^(2*beta))/(Sum[x[k], {k, 1, n - 1}])]

(*求解前 nMax 项*)
result = Table[x[n], {n, 1, nMax}];

(*数值逼近 x_n/n^beta*)
xOverNbeta = Table[result[[n]]/n^beta, {n, 1, nMax}];

(*绘制渐近图像和常数线*)
constant = Sqrt[(beta + 1)/beta]; (*计算常数值*)

Show[ListPlot[xOverNbeta,(*绘制 x_n/n^beta 和常数线*)PlotRange -> All,
  PlotLabel -> "x_n / n^beta and Sqrt[(beta+1)/beta]",
  PlotStyle -> {Blue, Red},
  PlotMarkers -> {"\[FilledCircle]", 2},
  PlotLegends -> {"x_n / n^beta", "Sqrt[(beta+1)/beta]"},
  AxesLabel -> {"n", "Value"}],
 ListLinePlot[Table[constant, {n, 1, nMax}],(*绘制 x_n/n^beta 和常数线*)
  PlotRange -> All,
```

```
  PlotLabel -> "x_n / n^beta and Sqrt[(beta+1)/beta
    ]",
  PlotStyle -> {Blue},
  PlotLegends -> {"x_n / n^beta", "Sqrt[(beta+1)/
    beta]"},
  AxesLabel -> {"n", "Value"}]]

(* 计算给定项的差值 *)
diff = Table[
   Abs[xOverNbeta[[n]] - constant], {n, {50, 100,
   150, 200}}];

(* 输出差值 *)
diff
```

Code 1. 求解数列极限

这里方便起见，令 $a = 1, \beta = 0.5$，观察前 100 项 $\frac{x_n}{n^\beta}$ 的趋势 (见图1)，该问题似乎是正确的，这给了我们解决该问题的动力。

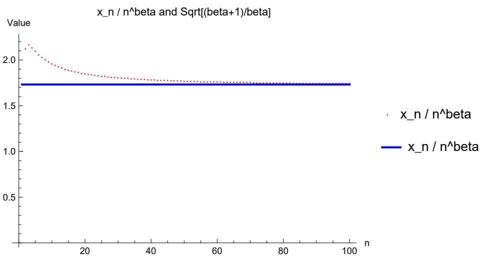


Figure 1. 求解数列极限

该问题的证明过长，这里从略。接下来假设该问题是成立的。

我们注意到，如果令 $s_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$，那么1变为

$$s_{n+1} - 2s_n + s_{n-1} = n^{2\beta} s_n^{-1} \tag{2}$$

二阶差分与二阶导数类似，于是该数列问题就是二阶非线性微分方程

$$\theta'' = \xi^{2\beta}\theta^{-1} \tag{3}$$

问题的离散版本，借助刚才解决的问题，我们也就估计了该微分方程的解的增长速率。事实上，方程3就是一种特殊的 Lane-Emden-Fowler 方程。

3. Lane-Emden 方程

所谓的 Lane-Emden 方程如下

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right) = -\theta^n, \qquad \theta(0) = 1, \theta'(0) = 0 \tag{4}$$

化简得到

$$\theta'' + \frac{2}{\xi}\theta' + \theta^n = 0 \tag{5}$$

在数学上，我们可以给出 $n = 0, 1, 5$ 时，方程5的解:

- $n = 0, \theta'' + \frac{2}{\xi}\theta' + 1 = 0$，解为 $\theta = -\frac{1}{6}\xi^2 - \frac{c_1}{\xi} + c_2$
- $n = 1, \theta'' + \frac{2}{\xi}\theta' + \theta = 0$，解为 $\theta = \frac{c_1\cos\xi + c_2\sin\xi}{\xi}$

对于给定的初值条件 $\theta(0) = 1, \theta'(0) = 0$，可以解得

- $n = 0 : \theta = 1 - \frac{\xi^2}{6}$
- $n = 1 : \theta = \frac{\sin\xi}{\xi}$
- $n = 5 : \theta = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{3}\xi^2}}$

于此同时，对于一般的 n，数学上给出了 $0 \le \xi < 1$ 时的级数解，利用幂级数展开法可以得到。

$$\theta = 1 - \frac{1}{6}\xi^2 + \frac{n}{120}\xi^4 - \cdots, 0 \le \xi < 1 \tag{6}$$

接下来，我们利用 Mathematica 求解方程5在 $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ 情况下的解，并画出解的图像。

```
LaneEmden[n_, {\[Theta]_, \[Xi]_}] :=  1/\[Xi]^2 D
    [\[Xi]^2 \[Theta]'[\[Xi]], \[Xi]] + \[Theta][\[
    Xi]]^n;
 (*n=0*)
 DSolve[LaneEmden[0, {\[Theta], \[Xi]}] == 0, \[
    Theta][\[Xi]], \[Xi]]
 DSolve[{LaneEmden[0, {\[Theta], \[Xi]}] == 0, \[
    Theta][0] == 1, \[Theta]'[0] == 0}, \[Theta][\[
    Xi]], \[Xi]] // Simplify
(*n=1*)
DSolve[LaneEmden[1, {\[Theta], \[Xi]}] == 0, \[
    Theta][\[Xi]], \[Xi]]
DSolve[{LaneEmden[1, {\[Theta], \[Xi]}] == 0, \[
    Theta][0] == 1, \[Theta]'[0] == 0}, \[Theta][\[
    Xi]], \[Xi]] // FullSimplify
```

Code 2. 求解 Lane-Emden 方程

在计算的时候发现，对于 $n = 2, 3, 4, 5$，无法使用DSolve得到精确解，我转而考虑使用NDSolve求取数值解，但是会报错NDSolve::ndnum: 在 x == 0.` 处碰到一个导数的非数值量，为了解决这个问题，我引入了机器精度最小差$MachineEpsilon3来解决这个问题。

```
Block[{eps = $MachineEpsilon}, NDSolve[{x y[x] + 2
    y'[x] + x y''[x] == 0, y[eps] == 1, y'[eps] ==
    0}, y, {x, eps, 10}]]
```

Code 3. 利用机器精度最小差求解 Lane-Emden 方程

利用代码4，我求得了 Lane-Emden 方程4在 $n = 2$ 时的数值解。

```
LaneEmdenSolution[n_] := Module[{x, y, eps =
    MachineEpsilon}, NDSolve[{x y[x]^n + 2 y'[x] +
    x y''[x] == 0, y[eps] == 1, y'[eps] == 0}, y, {
    x, eps, 15}][[1, 1, 2]]]
```

Code 4. Lane-Emden 方程在 n

利用机器精度最小差，我们可以数值求解 $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ 的 Lane-Emden 方程4，并绘制出解的图像。

```
soln = LaneEmdenSolution[#][x] & /@ Range[0, 5];
Plot[soln,{x,0,10},Method->Evaluated->True,
    PlotStyle->{Black,Red,Yellow,Green,Blue,Purple
    },PlotRange->{-1,1},AxesLabel->{\[Xi],\[Theta
    ][\[Xi]]},PlotLabel->"Solution of the Lane-
    Emden Equation for n=0,1,2,3,4,5",PlotLegends
    ->{"n=0","n=1","n=2","n=3","n=4","n=5"}]
```

Code 5. Lane-Emden 方程数值解

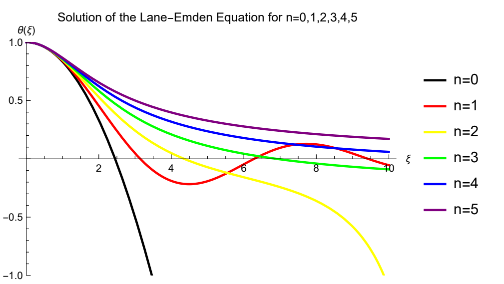


Figure 2. Lane-Emden 方程在 n=0,1,2,3,4,5 时的解的图像

4. Emden-Fowler 方程

所谓的 Emden-Fowler 方程如下 (其中 $\eta = \eta(\xi)$)

$$\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\eta}{d\xi}\right) = \alpha\xi^\lambda\eta^n \tag{7}$$

换元令

$$X = \frac{\xi\eta'}{\eta} \qquad Y = \xi^{\lambda-1}\frac{\eta''}{\eta'} \qquad \xi = e^t$$

就得到二维自治系统

$$\dot{X} = -X(1 + X - \alpha Y \tag{8}$$

$$\dot{Y} = Y(1 + \lambda + nX - \alpha Y) \tag{9}$$

这里 $\dot{X}, \dot{Y}$ 表示对 t 求导。

接下来研究该系统8的稳定性，对于给定的 $n = 2, \lambda = 0.5, \alpha = -1$，画出8的相图，并标记出稳定点3。

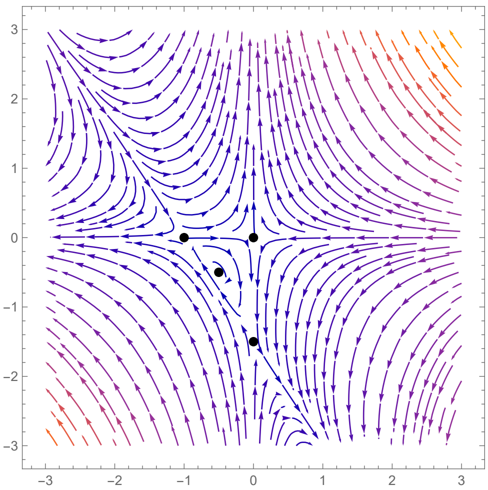


Figure 3. Emden-Fowler 自治系统的相图与稳定点

代码如下：

```
StreamPlot[{-X*(1+X+Y),Y*(1+0.5+2*X+Y)},{X,-3,3},{Y,-3,3},
StreamPoints->Fine,Epilog->Style[Point[{{-1,0},{0,0},{-0.5,-0.5},{0,-1.5}}],Black,PointSize[Large]]]
```

Code 6. Emden-Fowler 自治系统的相图与稳定点

5. Time-fractional Emden-Fowler 方程

所谓的 time-fractional Emden-Fowler 方程具有如下形式

$$D_\eta^\alpha \theta = D_\xi^2 \theta + L_1 D_\xi \theta + L_2 \theta = g(\xi, \eta), \qquad \alpha \in (1, 2] \tag{10}$$

其中 D_η^α 表示关于变量 η 求 α 阶导数。α 阶导数定义如下

Definition 5.1. *在 Caputo 意义下的分数阶导数定义为*

$$D^\alpha \vartheta(\eta) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^\eta (\eta - \varepsilon)^{n-\alpha-1} \vartheta^n(\varepsilon) d\varepsilon, \quad n - 1 < \alpha \le n, n \in \mathbb{N}.$$

方程5的求解十分复杂, 它无法求出精确解, 但是人们发展出了 ET-HPM 和 LT-HPM[5] 等方法来给出数值解。考虑到我们更加熟悉 Laplace 变换及其逆变换，且这可以用 Mathematica 的函数实现，我接下来将介绍 LT-HPM 求解方程的一般方法。

5.1. LT-HPM 的一般求解过程

先给出一些定义

Definition 5.2. *Laplace 变换定义为*

$$\mathscr{L}[\vartheta(\eta)] = R_2(\sigma) = \int_0^\infty e^{-\eta\sigma} \vartheta(\eta) d\eta$$

Definition 5.3. *分数阶导数的 Laplace 变换定义为*

$$\mathscr{L}[D_\eta^\alpha \vartheta(\eta)] = \sigma^\alpha R_2(\sigma) - \sum_{k=0}^{n-1} \sigma^{\alpha-1-k} \vartheta^k(0)$$

考虑如下的包含分数阶导数的非线性微分方程

$$D_\eta^\alpha \vartheta(\varsigma,\eta) + N_1\vartheta(\varsigma,\eta) + N_2\vartheta(\varsigma,\eta) = g(\varsigma,\eta) \tag{11}$$

约束条件为

$$\vartheta(0,\eta) = f(\eta)$$

这里 ϑ 是关于 η 的函数，N_1, N_2 分别是线性和非线性算子。对方程11作用 Laplace 变换得到

$$\mathscr{L}\left[D_\eta^\alpha \vartheta(\varsigma,\eta) + N_1\vartheta(\varsigma,\eta) + N_2\vartheta(\varsigma,\eta)\right] = \mathscr{L}[g(\varsigma,\eta)].$$

展开得到

$$\sigma^\alpha R_2(\sigma) - \sigma^{\alpha-1}\vartheta(\varsigma,0) = \mathscr{L}[g(\varsigma,\eta)] - \mathscr{L}[N_1\vartheta(\varsigma,\eta) + N_2\vartheta(\varsigma,\eta)]$$

于是得到

$$R_2(\sigma) = \frac{\vartheta(\varsigma,0)}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^\alpha}\mathscr{L}[g(\varsigma,\eta)] - \frac{1}{\sigma^\alpha}\mathscr{L}\left[N_1\vartheta(\varsigma,\eta) + N_2\vartheta(\varsigma,\eta)\right].$$

计算 Laplace 逆变换，得到

$$\vartheta(\varsigma,\eta) = G_2(\varsigma,\eta) - \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sigma^\alpha}\mathscr{L}\left[N_1\vartheta(\varsigma,\eta) + N_2\vartheta(\varsigma,\eta)\right]\right] \tag{12}$$

其中 $G_2(\varsigma,\eta) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\vartheta(\varsigma,0)}{\sigma} - \frac{1}{\sigma^\alpha}\mathscr{L}[g(\varsigma,\eta]\right]$ 接下来利用扰动技巧，假设方程11的通解为

$$\vartheta(\varsigma,\eta) = \sum_{n=0}^\infty p^n \vartheta_n(\varsigma,\eta) \tag{13}$$

其中 $p \in [0,1]$ 是一个扰动元。将非线性算子 N_2 视为

$$N_2\vartheta(\varsigma,\eta) = \sum_{n=0}^\infty p^n H_n \vartheta(\varsigma,\eta) \tag{14}$$

其中 $H_n(\varsigma,\eta)$ 可以由如下计算给出

$$H_n(\varsigma,\eta) = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial p^n}\left(N_2\left(\sum_{n=0}^\infty p^n \vartheta_n\right)\right)_{p=0} . \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

整合以上公式12,13和14得到

$$\sum_{n=0}^\infty p^n \vartheta_n(\varsigma,\eta) =$$

$$G_2(\varsigma,\eta) - p\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sigma^\alpha}\mathscr{L}\left\{N_1\left(\sum_{n=0}^\infty p^n \vartheta_n(\varsigma,\eta)\right) + \sum_{n=0}^\infty p^n H_n \vartheta_n(\varsigma,\eta)\right\}\right] \tag{15}$$

从而我们得到了方程11的数值求解办法，比较不同幂次的 p 前的系数，我们得到

$$\begin{aligned}
p^0 &: \vartheta_0(\varsigma,\eta) = G_2(\varsigma,\eta), \\
p^1 &: \vartheta_1(\varsigma,\eta) = -\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sigma^\alpha}\mathscr{L}\left\{N_1\vartheta_0(\varsigma,\eta) + H_0(\vartheta)\right\}\right], \\
p^2 &: \vartheta_2(\varsigma,\eta) = -\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sigma^\alpha}\mathscr{L}\left\{N_1\vartheta_1(\varsigma,\eta) + H_1(\vartheta)\right\}\right], \\
p^3 &: \vartheta_3(\varsigma,\eta) = -\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sigma^\alpha}\mathscr{L}\left\{N_1\vartheta_2(\varsigma,\eta) + H_2(\vartheta)\right\}\right], \\
&\vdots \\
p^n &: \vartheta_n(\varsigma,\eta) = -\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sigma^\alpha}\mathscr{L}\left\{N_1\vartheta_{n-1}(\varsigma,\eta) + H_{n-1}(\vartheta)\right\}\right]
\end{aligned}$$

最终，解析解可以被表示为如下级数

$$\vartheta(\varsigma,\eta)=\vartheta_0+\vartheta_1+\vartheta_2+\cdots=\sum_{i=1}^{\infty}\vartheta_i(\varsigma,\eta) \tag{16}$$

5.2. 一个具体的 time-fractional Emden-Fowler 方程求解

令 time-fractional Emden-Fowler 方程为

$$\frac{\partial^\alpha\vartheta}{\partial\eta^\alpha}=\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\varsigma^2}+\frac{6}{\varsigma}\frac{\partial\vartheta}{\partial\varsigma}+\left(14\eta+\varsigma^4\right)\vartheta+4\eta\vartheta\ln(\vartheta),\quad 1<\alpha\le 2 \tag{17}$$

限制条件为

$$\vartheta(\varsigma,0)=1,\qquad \vartheta_\eta(\varsigma,0)=-\varsigma^2 \tag{18}$$

接下来我们利用 LT-HPM 来数值求解该方程。

对方程17进行 Laplace 变换，我们得到

$$\sigma^\alpha R_2(\sigma)-\sigma^{\alpha-1}\vartheta(\varsigma,0)=\mathscr{L}\left[\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\varsigma^2}+\frac{6}{\varsigma}\frac{\partial\vartheta}{\partial\varsigma}+\left(14\eta+\varsigma^4\right)\vartheta+4\eta\vartheta\ln(\vartheta)\right]$$

化简后再进行 Laplace 逆变换得到

$$\vartheta(\varsigma,\eta)=\frac{\vartheta(\varsigma,0)}{\sigma}+\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sigma^\alpha}\mathscr{L}\left\{\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\varsigma^2}+\frac{6}{\varsigma}\frac{\partial\vartheta}{\partial\varsigma}+\left(14\eta+\varsigma^4\right)\vartheta+4\eta\vartheta\ln(\vartheta)\right\}\right] \tag{19}$$

将 HPM 应用到方程19得到

$$\sum_{i=0}^{\infty}p^i\vartheta_i(\varsigma,\eta)=\vartheta(\varsigma,0)+\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sigma^\alpha}\mathscr{L}\left\{\sum_{i=0}^{\infty}p^i\frac{\partial^2\vartheta_i}{\partial\varsigma^2}+\frac{6}{\varsigma}\sum_{i=0}^{\infty}p^i\frac{\partial\vartheta_i}{\partial\varsigma}+\left(14\eta+\varsigma^4\right)\sum_{i=0}^{\infty}p^i\vartheta_i+4\eta\sum_{i=0}^{\infty}p^i\vartheta_i\ln\left(\vartheta_i\right)\right\}\right] \tag{20}$$

通过分析比较 p 的不同幂次前的系数，得到

$$\begin{aligned}
p^0 &: \vartheta_0(\varsigma,\eta)=\vartheta(\varsigma,0)=\vartheta(\varsigma,0)+\vartheta_\eta(\varsigma,0)\\
p^1 &: \vartheta_1(\varsigma,\eta)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sigma^\alpha}\mathscr{L}\left\{\frac{\partial^2\vartheta_0}{\partial\varsigma^2}+\frac{6}{\varsigma}\frac{\partial\vartheta_0}{\partial\varsigma}+\left(14\eta+\varsigma^4\right)\vartheta_0+4\eta\vartheta_0\ln\left(\vartheta_0\right)\right\}\right]\\
p^2 &: \vartheta_2(\varsigma,\eta)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sigma^\alpha}\mathscr{L}\left\{\frac{\partial^2\vartheta_1}{\partial\varsigma^2}+\frac{6}{\varsigma}\frac{\partial\vartheta_1}{\partial\varsigma}+\left(14\eta+\varsigma^4\right)\vartheta_1+4\eta\vartheta_0\ln\left(\vartheta_1\right)\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.+\ 4\eta\vartheta_1\ln\left(\vartheta_0\right)\right\}\right]\\
&\vdots
\end{aligned}$$

我们可以解得前几项 ϑ_i，如下

$$\begin{aligned}
\vartheta_0(\varsigma,\eta)&=1-\eta\varsigma^2\\
\vartheta_1(\varsigma,\eta)&=-28\varsigma^2\frac{\eta^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)}+\varsigma^4\frac{\eta^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}-\varsigma^6\frac{\eta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)}\\
\vartheta_2(\varsigma,\eta)&=-392\frac{\eta^{2\alpha+2}}{\Gamma(2\alpha+3)}+36\varsigma^2\frac{\eta^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}-66\varsigma^4\frac{\eta^{2\alpha+1}}{\Gamma(2\alpha+2)}\\
&\quad+392\varsigma^2\frac{\Gamma(\alpha+4)}{\Gamma(\alpha+3)}\frac{\eta^{2\alpha+3}}{\Gamma(2\alpha+4)}+14\varsigma^4\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+1)}\frac{\eta^{2\alpha+1}}{\Gamma(2\alpha+2)}\\
&\quad-14\varsigma^6\frac{\Gamma(\alpha+3)}{\Gamma(\alpha+2)}\frac{\eta^{2\alpha+2}}{\Gamma(2\alpha+3)}-28\varsigma^6\frac{2\alpha+2}{\Gamma(2\alpha+3)}+\varsigma^8\frac{\eta^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}\\
&\quad+\varsigma^{10}\frac{2\alpha+1}{\Gamma(2\alpha+2)}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

于是解得

$$\vartheta(\varsigma,\eta)=\vartheta_0(\varsigma,\eta)+\vartheta_1(\varsigma,\eta)+\vartheta_2(\varsigma,\eta)+\cdots \tag{21}$$

此外，当 $\alpha=1$ 时，方程17的精确解为

$$\vartheta(\varsigma,\eta)=e^{-\eta\varsigma^2} \tag{22}$$

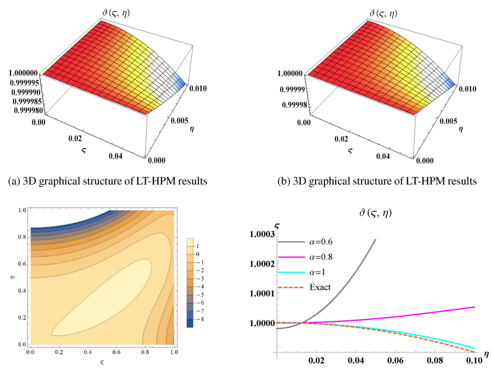
使用 Mathematica 暂未解决的问题

然而，我在 Mathematica 中，尝试利用分数阶导数函数CaputoD求解方程17的时候，发现求解速度太慢，无法求出结果，即便是在 $\alpha=1$ 的情况下，也无法解出偏微分方程

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial\eta}=\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\varsigma^2}+\frac{6}{\varsigma}\frac{\partial\vartheta}{\partial\varsigma}+\left(14\eta+\varsigma^4\right)\vartheta+4\eta\vartheta\ln(\vartheta),\quad \vartheta(\varsigma,0)=1,\vartheta_\eta(\varsigma,0)=-\varsigma^2$$

本来我打算复现 [5] 中的图4，但是我没能用 Mathematica 画出来，甚至我连这几个微分方程都没有求出来。但是在探索过程中，我也发现了这篇论文 [5] 中存在的一些问题，并在此次 Mathemaica 项目中进行了公式推导的修正。

接下来我将放上几张图片 (来源：[5])，其中图 (4a) 和图 (4b) 展示了 LT-HPM 求得通解在 $\alpha=1$ 时候的图像。图 (4c) 展示了 $\alpha=1$ 时，$\vartheta(\varsigma,\eta)$ 关于 $0\le\varsigma\le1$ 和 $0\le\eta\le1$ 的等高线图。图 (4d) 的绘制我也没有搞明白，这是这篇 nature 论文 [5] 上的疏忽，没想到如此文章也能发 nature，打破了我对 nature 文章水平的幻想。



(a) 3D graphical structure of LT-HPM results

(b) 3D graphical structure of LT-HPM results

(c) Contour plot of $\vartheta(\varsigma,\eta)$ when $\alpha=1$

(d) Graphical error between LT-HPM and accurate results

Figure 4. $\vartheta(\varsigma,\eta)$ 的图像

6. 用 Mathematica 求解分数阶微分方程

虽然没能使用 Mathematica 求解 time-fractional Emden-Fowler 方程，但是我可以使用 Mathematica 解决相对简单很多的分数 LC 电路方程问题，分数 LC 电路微分方程指的是如下微分方程

$$D^\alpha i(t)+\frac{1}{lc}i(t)=0,\qquad i(0)=0.1,i'(0)=0 \tag{23}$$

我们分别数值求解出 $\alpha=2,1.9,1.8$ 时的解，并绘制出图像5。

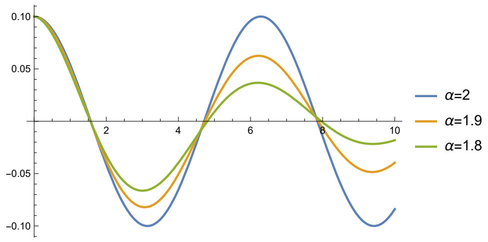


Figure 5. $\alpha=2,1.9,1.8$ 的分数 LC 电路方程

对应的代码如下

```
LCeqn[\[Alpha]_,l_,c_]={CaputoD[i[t],{t,\[Alpha]}]+1/(l c) i[t]==0,i[0]==0.1,i'[0]==0};
LCsol[\[Alpha]_,l_,c_]:=DSolve[LCeqn[\[Alpha],l,c],i,t];
LCsol[2,1,c](*求\[Alpha]=2时的经典解*)
LCsol[1.9,1,c](*求\[Alpha]=1.9时的解*)
Plot[Evaluate[i[t]/. {LCsol[2,1,1],LCsol[1.9,1,1],LCsol[1.8,1,1]}],{t,0,10},PlotLegends->{"\[Alpha]=2","\[Alpha]=1.9","\[Alpha]=1.8"}]
```

Code 7. 求解分数 LC 电路方程

7. 总结

该 Mathematica 项目使用到了老师课上讲解的 `DSolve`、`NDSolve`、`Plot`、`StreamPlot` 函数等, 求解 Lane-Emden-Fowler 方程, 并绘制出数值解的图像。此外, 老师上课讲述的**分数阶导数**令我很感兴趣, 并思考求解分数阶微分方程, 给出了 time-fractional Emden-Fowler 方程求解的尝试, 给出了分数阶 LC 电路微分方程的实例。在完成该项目的过程中, 我遇到了许多困难, 通过查阅 Mathematica 帮助文档和有关方程的论文 [2][5][1][3], 我解决了一部分遇到的问题, 比如使用机器精度最小差 `$MachineEpsilon` 代替 0, 解决了方程在 0 处无定义, 以及某些参数趋于无穷的问题。美中不足的是, 由于二阶非线性微分方程的求解过于困难, 我并没能使用 Mathematica 成功求解出 time-fractional Emden-Fowler 方程17, 不过这个未解决的问题也激起了我继续学习的动力。

除此之外, 这次 Mathematica 项目还带给我论文查找和阅读的经验。从最开始的不确定写些什么, 到后来不够时间写下那么多东西。与此同时, 论文的查找和阅读也给了我一些对科研工作的想象, 我也收获了不少关于解决问题的思想和研究问题的思路。毫无疑问, 对此次 Mathematica 项目的认真完成, 极大提升了我查找资料、解决问题、规划时间 (从确定主题到完成项目我只用了 3 天时间)、承受压力的能力, 不论这个项目写的怎么样, 这些能力都是我从这次项目中收获到的宝贵财富。

致谢

感谢中山大学理学院邵元智老师! 邵老师开设 Mathematica 课程, 让我获益匪浅! 无论是课上知识的专业性, 还是老师对学生的关怀, 都令我十分感动, 很感激、很幸运选上邵老师的 Mathematica 课程!

References

[1] B. Mehta and R. Aris, “A note on a form of the emden-fowler equation”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 36, no. 3, pp. 611–621, 1971.

[2] K. Govinder and P. G. Leach, “Integrability analysis of the emden-fowler equation”, *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, vol. 14, no. 3, pp. 443–461, 2007.

[3] 梅凤翔, 解加芳, and 江铁强, “求 emden-fowler 方程积分的分析力学方法”, Ph.D. dissertation, 2007.

[4] A. Sîntămărian, O. Furdui, *et al.*, *Sharpening mathematical analysis skills*. Springer, 2021.

[5] X. Luo, “Analytical solution of time-fractional emden-fowler equations arising in astronomy and mathematical physics”, *Scientific Reports*, vol. 14, no. 1, p. 27 444, 2024.