高等数学网红题

公众号 清疏数学

清疏数学 **著**

Problem 1

若

$$f(x) \in C^3\left[0,\pi\right], f(0)=f(\pi)=f'(0)=0, |f'''(x)| \leqslant M$$

证明

$$\left|\int_0^{\pi} f\left(x\right)\sin\left(x\right)dx\right| \leqslant \frac{\pi}{3}M$$

PROOF. (*By* 清疏竞赛数学) 注意到恒等式

$$\left|\int_0^{\pi} f\left(x\right)\sin\left(x\right)dx\right| = \left|\int_0^{\pi} f'''\left(x\right)\left(-\cos\left(x\right)+\frac{2x^2}{\pi^2}-\frac{4x}{\pi}+1\right)dx\right|$$

故有

$$\left|\int_0^{\pi} f\left(x\right)\sin\left(x\right)dx\right| \leqslant M\int_0^{\pi}|-\cos\left(x\right)+\frac{2x^2}{\pi^2}-\frac{4x}{\pi}+1|dx=\frac{\pi}{3}M$$

Problem 2

记

$$S=\left\{f(x)]\in R\,[a,b]:|f(x)|\leqslant\frac{\pi}{2}\text{且}\int_a^b\sin(f(x))dx=C\right\}$$

计算

$$\sup_{f\in S}\left|\int_a^b f(x)dx\right|$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 首先设 $\lambda_0>1$ 是下述方程的根:

$$\sqrt{\lambda^2-1}-\arccos(\frac{1}{\lambda})+\lambda-\frac{\pi}{2}=0$$

则:

$$\int_a^b f(x)dx=C\lambda_0+\int_a^b f(x)-\lambda_0\sin(f(x))dx$$

注意到 (求导计算)

$$t-\lambda_0\sin(t)\leqslant-\arccos(\frac{1}{\lambda_0})+\sqrt{\lambda_0^2-1},\forall t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

故有

$$\int_a^b f(x)dx\leqslant(-\arccos(\frac{1}{\lambda_0})+\sqrt{\lambda_0^2-1})(b-a)+\lambda_0C=\frac{\pi}{2}(b-a)-\lambda_0(b-a-C)$$

即得一个上界, 由对称性可得下界, 从而有

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leqslant\frac{\pi}{2}(b-a)-\lambda_0(b-a-C)$$

为确定是最佳上界, 令

$$f_0\left(x\right)=\begin{cases}-\arccos(\frac{1}{\lambda_0}) & x\in\left[a,\frac{(b-C)\lambda_0+a\sqrt{\lambda_0^2-1}}{\lambda_0+\sqrt{\lambda_0^2-1}}\right]\\ \frac{\pi}{2} & x\in(\frac{(b-C)\lambda_0+a\sqrt{\lambda_0^2-1}}{\lambda_0+\sqrt{\lambda_0^2-1}},b]\end{cases}$$

计算可知

$$\int_a^b f_0(x)dx=\frac{\pi}{2}(b-a)-\lambda_0(b-a-C)$$

故

$$\sup_{f\in S}\left|\int_a^b f(x)dx\right|=\frac{\pi}{2}(b-a)-\lambda_0(b-a-C)$$

Problem 3

设正数列 a_n 递减趋于 0, 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(a_n-a_{n+1}\right)<\infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n<\infty$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 注意到恒等式

$$\sum_{k=1}^{n} k\left(a_k-a_{k+1}\right)=a_1-(n+1) a_{n+1}+\sum_{k=1}^{n} a_{k+1}$$

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n<\infty$, 由不等式

$$0 \leqslant n a_{2 n} \leqslant \sum_{k=n+1}^{2 n} a_k, 0 \leqslant(n+1) a_{2 n+1} \leqslant \sum_{k=n+1}^{2 n+1} a_k$$

利用 cauchy 收敛准则知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n=0$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(a_n-a_{n+1}\right)<\infty$.

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(a_n-a_{n+1}\right)<\infty$, 注意到不等式

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{m} a_k+\sum_{k=m+1}^{n} a_k \geqslant \sum_{k=1}^{m} a_k+(n-m) a_n, \ \forall n \geqslant m$$

即

$$\sum_{k=1}^{m} a_k \leqslant m a_n+\sum_{k=1}^{n} a_k-n a_n, \forall n \geqslant m$$

由本文第一个恒等式, 故

$$\exists A>0, \sum_{k=1}^{n} a_k-n a_n \leqslant A, \forall n \geqslant 1$$

从而

$$\sum_{k=1}^{m} a_k \leqslant m a_n+A, \forall n \geqslant m$$

我们令 $n \to +\infty$ 得

$$\sum_{k=1}^{m} a_k \leqslant A, \forall m \geqslant 1$$

故 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$.

Problem 4

设曲线 $C_n : x^{\frac{2}{n}} + y^{\frac{2}{n}} = 1$, 记 l_n 是它的长度, 证明

$$\lim_{n\to\infty} l_n = 8$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 令 $\begin{cases} x = \cos^n(\theta) \\ y = \sin^n(\theta) \end{cases}, \theta \in [0, 2\pi]$ 易知

$$l_n = \int_0^{2\pi} n\left|\cos(\theta)\sin(\theta)\right| \sqrt{\cos^{2n-2}(\theta) + \sin^{2n-2}(\theta)} d\theta =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} n\left|\cos(\theta)\sin(\theta)\right| \sqrt{\cos^{2n-2}(\theta) + \sin^{2n-2}(\theta)} d\theta =$$

$$2n\int_0^1 \sqrt{(1-x)^{n-2} + x^{n-2}}dx = 2\frac{n}{n-2}(n-2)\int_0^1 \sqrt{(1-x)^{n-2} + x^{n-2}}dx$$

我们只需证明

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 \sqrt{(1-x)^n + x^n}dx = \lim_{n\to\infty} 2n\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{(1-x)^n + x^n}dx = 4$$

事实上利用不等式 $\sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x} + \sqrt{y}$, 有

$$n\int_0^1 \sqrt{(1-x)^n + x^n}dx \leqslant n\int_0^1 (1-x)^{\frac{n}{2}} + x^{\frac{n}{2}}dx = \frac{4n}{n+2}$$

另一方面, 有

$$2n\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{(1-x)^n + x^n}dx \geqslant 2n\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{(1-x)^n}dx = \frac{4n}{n+2}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{1+\frac{n}{2}}\right)$$

由夹逼定理即得

$$\lim_{n\to\infty} l_n = 8$$

Problem 5

记

$$S=\left\{x\in\mathbb{R}:\sum_{n=1}^{\infty}\sin(n!\pi x)\right\}\text{收敛}$$

证明

$$(\mathbb{R}-\mathbb{Q})\cap S\neq\emptyset$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 由 taylor 中值定理, 我们有

$$\sin\left(n!\pi e^{-1}\right)=\sin(\frac{\pi(-1)^{n+1}}{n+1}+\frac{\pi e^{\theta_n}\left(-1\right)^{n+2}}{\left(n+2\right)\left(n+1\right)}),\theta_n\in(-1,0)$$

利用 taylor 公式的 peano 余项 (展开到 3 阶是必要的) 和基本的阶的估计有

$$\sin\left(n!\pi e^{-1}\right)=\sin(\frac{\pi(-1)^{n+1}}{n+1}+O\left(\frac{1}{n^2}\right))=\frac{\pi(-1)^{n+1}}{n+1}-\frac{\pi^3\left(-1\right)^{n+1}}{6\left(n+1\right)^3}+O(\frac{1}{n^2})$$

故 $e^{-1}\in S$.

Problem 6

设 A, B, C 是实 n 阶对称矩阵, 证明

$$tr((ABC)^2) \leqslant tr(A^2BC^2B)$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 注意到

$$tr((ABC)^2) \leqslant tr(A^2BC^2B)$$

$$\Leftrightarrow tr(ABCCBA - ABCABC) \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow tr(ABC\,[CBA - ABC]) \geqslant 0$$

由于ABC对称，这里转置 $$\Leftrightarrow tr([ABC - CBA]\,CBA) \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow tr(CBA\,[ABC - CBA]) \geqslant 0$$

利用恒等式

$$x = y = \frac{x+y}{2}$$

故上式

$$\Leftrightarrow tr\left([ABC - CBA]\,[CBA - ABC]\right) \geqslant 0$$

注意到

$$P = CBA - ABC, P^TP\text{是半正定矩阵}$$

故

$$tr\left(P^TP\right) = tr\left([ABC - CBA]\,[CBA - ABC]\right) \geqslant 0$$

我们完成了证明.

Problem 7

若数列满足

$$a_{n+2} = |a_{n+1}| - |a_n|$$

证明

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 记

$$b_n = \max\{|a_{n+1}|, |a_n|\} = \frac{|a_n| + |a_{n+1}| + |a_{n+2}|}{2}$$

显然有

$$0 \leq |a_{n+2}| \leq b_n \leq b_{n+1}$$

故

$$|a_n| - |a_{n+3}| = 2(\frac{|a_n| + |a_{n+1}| + |a_{n+2}|}{2} - \frac{|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + |a_{n+3}|}{2}) \geq 0$$

因此可记

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} |a_{3n-2}| = A \\ \lim\limits_{n\to\infty} |a_{3n-1}| = B \\ \lim\limits_{n\to\infty} |a_{3n}| = C \end{cases}$$

注意到 A, B, C 满足方程

$$\begin{cases} A = |B - C| \\ B = |A - C| \\ C = |A - B| \end{cases}$$

不妨设

$$A \geq B \geq C \geq 0$$

方程组的解为

$$A = B, C = 0$$

故有

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$$

Problem 8

若数列满足

$$a_{n+2} = |a_{n+1}| - |a_n|$$

以及

$$\frac{a_2}{a_1} \notin \mathbb{Q}$$

证明

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 这两天要给本科生上泛函, 比较忙, 答案明天放.

Problem 9

设 A 是数域 F 上的 n 阶矩阵, 且 A 的特征多项式在 F 上不可约, 设

$$\sigma_A : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$$

$$X \to A^{-1}X - XA^{-1}$$

计算

$$\dim(\ker \sigma_A \cap Im\sigma_A)$$

Proof. *(By 清疏竞赛数学)* 首先 A 的特征多项式在 F 上不可约意味着 A 的特征多项式和极小多项式相同, 且在 $\mathbb{C}$ 上无重根, 因此 A 有 n 个不同的非 0 特征值. 故有

$$\ker \sigma_A = span\left(E, A, A^2, ..., A^{n-1}\right)$$

It is trivial.

任取 f 为 $n-1$ 次多项式 (我们允许系数全为 0), 若存在 X, 使得 $\sigma_A X = f(A)$, 熟知 $tr(f(A)^k) = 0, k = 0, 1, 2, ...$ 故 $f(A) = 0$ 故

$$\dim(\ker \sigma_A \cap Im\sigma_A) = 0$$

当然本题爆算也是可以轻松证明的.

Problem 10

设 $m \geqslant 1$ 且 $f(x) \in C^{2m}[0,1]$ 则有:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{f(1)-f(0)}{2n} + \int_0^1 f(x)dx + \sum_{k=1}^{m} \frac{\left(f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)\right) b_{2k}(0)}{n^{2k}} + o(\frac{1}{n^{2m}})$$

这里

$$b_{2k}(x) = \frac{2(-1)^{k+1}}{(2\pi)^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n\pi x)}{n^{2k}}$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 由 $E-M$ 公式或者直接初等的分部积分验证, 我们注意到有如下恒等式:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{f(1)-f(0)}{2n} + \int_0^1 f(x)dx + \sum_{k=1}^{m} \frac{\left(f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)\right) b_{2k}(0)}{n^{2k}} - \frac{1}{n^{2m}}\int_0^1 b_{2m}(nx) f^{(2m)}(x)\,dx$$

注意到 $b_{2m}(x)$ 是周期为 1 的函数且有 $\int_0^1 b_{2m}(x)\,dx = 0$, 由黎曼引理, 我们有

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 b_{2m}(nx) f^{(2m)}(x)\,dx = \int_0^1 b_{2m}(x)\,dx \int_0^1 f^{(2m)}(x)\,dx = 0$$

故有:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{f(1)-f(0)}{2n} + \int_0^1 f(x)dx + \sum_{k=1}^{m} \frac{\left(f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)\right) b_{2k}(0)}{n^{2k}} + o(\frac{1}{n^{2m}})$$

我们就完成了证明.

Problem 11

设 A 是 n 阶实矩阵, 且 $A^2=A$, 并且满足

$$\forall x\in\mathbb{R}^n, x^TA^TAx\leqslant x^Tx$$

证明

$$A=A^T$$

Proof. (By 清疏竞赛数学) 由 $\forall x\in\mathbb{R}^n, x^TA^TAx\leqslant x^Tx$ 知 A^TA 特征值介于 0 到 1 之间, 我们不妨设 (否则, 做一个正交相似)

$$A^TA=\begin{pmatrix}C&0\\0&0\end{pmatrix}$$

这里 C 是对角矩阵且元素介于 0 到 1 之间的可逆矩阵, 把 A 对应分块得

$$A=\begin{pmatrix}A_1&A_2\\A_3&A_4\end{pmatrix}$$

代入所有 A 满足的条件得

$$A_1^2=A_1, A_2=A_4=0, A_1^TA_1+A_3^TA_3=C, A_3A_1=A_3$$

对于幂等矩阵 X, 熟知 $r(X)=tr(X)$ 故有

阶数就是矩阵列向量个数

$$A_1\text{的阶数}=C\text{的阶数}=r(C)=r\left(A^TA\right)=r(A)=tr(A)=tr(A_1)=r(A_1)$$

trivial,since A4=0 **trivial,since A4=0**

故 A_1 可逆, 故

$$A_1=E, A_3^TA_3=C-E$$

该半正定矩阵=C-E可逆

这说明半正定矩阵 $A_3^TA_3$ 特征值全为 0, 故 $A_3^TA_3=0$, 从而 $A_3=0$, 故

$$A=\begin{pmatrix}E&0\\0&0\end{pmatrix}=A^T$$

我们完成了证明. 、

Problem 12

设 $f(x) \in C^2[0,1]$,$t > \frac{4}{3}$ 是固定常数,$f(1) = f'(1) = 0$ 证明 $\exists c, d, 1 > c > d > 0$ 使得

$$f''(c) = (c+t)\, f(d)$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 由于 $t > \frac{4}{3}$, 故可取 $d \in (0,1)$ 使得

$$\frac{6}{(d-1)^2} - d = 3t + 2$$

我们构造

$$F(x) = f(x) - \frac{1}{6}(x-1)^2 (x + 3t + 2)\, f(d)$$

容易验证

$$F(1) = F'(1) = F(d) = 0$$

两次罗尔中值定理即得 $\exists c, 1 > c > d > 0$ 使得 $F''(c) = 0$ 故有

$$f''(c) = (c+t)\, f(d)$$

我们完成了证明.

Problem 13

若 $f(x)\in C^2\left[0,2\right]$, 证明

$$\int_0^2 \left|f''(x)\right|^2 dx \geqslant \frac{3}{2}\left[f\left(0\right)+f(2)-2f(1)\right]^2$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 当 $f(0)+f(2)-2f(1)=0$ 时, 问题是显然的.

我们不妨设 $f(0)=f(2)=0, f(1)=1$.

否则, 选取 a,b,c 使得 $g(x)=cf(x)-ax-b$ 满足条件, 这是因为下述线性方程组的系数行列式不为 0

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & f\left(2\right) \\ 0 & -1 & f\left(0\right) \\ -1 & -1 & f\left(1\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

注意到

$$\int_0^1 x^2 dx=\int_1^2 \left(x-2\right)^2 dx=\frac{1}{3}$$

利用 cauchy 不等式有

$$\frac{1}{3}\int_0^2 \left|f''(x)\right|^2 dx \geqslant \left[\int_0^1 xf''(x)dx\right]^2+\left[\int_1^2 \left(x-2\right)f''(x)dx\right]^2$$

$$=\left[f'(1)-1\right]^2+\left[f'(1)+1\right]^2 \geqslant 2$$

故

$$\int_0^2 \left|f''(x)\right|^2 \geqslant 6$$

我们完成了证明.

Problem 14

设 $f(x) \in C^1(\mathbb{R}^3)$ 且满足:

$(1): f(x) = f(|x|), \forall x \in \mathbb{R}^3.$

$(2): \lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = 0.$

$(3): \iiint_{\mathbb{R}^3} |\nabla f| \, dx < \infty.$

证明存在不依赖于 f 的正常数 C, 使得

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\left(|x|^2 |f(x)|\right) \leqslant C \iiint_{\mathbb{R}^3} |\nabla f| \, dx$$

Proof. (By 清疏竞赛数学) 令

进行球坐标替换，这样 操作可以将三维问题转化为一维

$$g(r) = f(r\sin(\phi)\cos(\theta), r\sin(\phi)\sin(\theta), r\cos(\phi))$$

这里就是nabla算子

我们有 $rg'(r) = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}$ 注意到

$$|g(r)| \leqslant \int_r^{\infty} |g'(t)| \, dt, r^2 |g(r)| \leqslant r\int_r^{\infty} t |g'(t)| \, dt \leqslant r\int_{\mathbb{R}} t |g'(t)| \, dt$$

这差不多是题目的LHS

我们有

2*2π

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin(\phi) r^2 |g(r)| \, d\phi = 4\pi r^2 |g(r)| \leqslant \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin(\phi) \, d\phi \int_{\mathbb{R}} rt |g'(t)| \, dt$$

$$\leqslant \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin(\phi) \, d\phi \int_{\mathbb{R}} r^2 |\nabla f| \, dt = \iiint_{\mathbb{R}^3} |\nabla f| \, dx < \infty$$

这是我们的目的

故

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^3} |x|^2 |f(x)| = \sup_{r\geqslant 0} r^2 |g(r)| \leqslant \frac{1}{4\pi} \iiint_{\mathbb{R}^3} |\nabla f| \, dx$$

Problem 15

若 $a_n, b_n > 0, \forall n \geqslant 1$, 且有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{na_n} = a \in \mathbb{R}^+, \lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{nb_n} = b \in \mathbb{R}^+$$

计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{(n!)^3}}\sum_{k=1}^{n}(a_kb_k)^{\frac{1}{k}}$$

在题目中是乘法关系，故可以直接渐进

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 熟知 $\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e}$ 故有 $\sqrt[n]{(n!)^3} \sim \frac{n^3}{e^3}$, 从而

$$e^3\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}(a_kb_k)^{\frac{1}{k}}}{n^3} \overset{\text{stolz}}{=} e^3\lim_{n\to\infty}\frac{(a_{n+1}b_{n+1})^{\frac{1}{n+1}}}{3n^2} = \frac{e^3}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}b_{n+1}}{n^{2(n+1)}}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

继续使用 stolz 有

这里是化为了指数形式后使用 stolz

$$\frac{e^3}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}b_{n+1}}{(n+1)^{2(n+1)}}\right)^{\frac{1}{n+1}} = \frac{e^3}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}b_{n+1}n^{2n}}{a_nb_n(n+1)^{2(n+1)}} = \frac{e^3ab}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2(n+1)}}{(n+1)^{2(n+1)}}$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{(n!)^3}}\sum_{k=1}^{n}(a_kb_k)^{\frac{1}{k}} = \frac{e^3ab}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2(n+1)}}{(n+1)^{2(n+1)}} = \frac{abe}{3}$$

我们完成了计算.

Problem 16

设

$$a_{n+1}=a_n+e^{-a_n},a_0=1$$

证明

$$\lim_{n\to\infty} e^{a_n}-n-\frac{\ln(n)}{2}\text{存在}$$

Proof. (By 清疏竞赛数学) 显然

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty,a_{n+1}>a_n,\forall n\geqslant 0$$

进一步 这里运用了题目关系和指数的切线不等式

$$e^{e^{-a_n}}\geqslant e^{a_{n+1}}-e^{a_n}=e^{-a_n}e^{\theta}\geqslant 1,\theta\in(a_n,a_{n+1})$$

题目+中值定理

故有

$$e^{a_n}\geqslant n+e \qquad (*)$$

运用了题目条件+递推

上式带入不等式进一步有

由taylor，这部分收敛

$$e\leqslant e^{a_{n+1}}-n-1\leqslant\sum_{k=0}^{n}\left(e^{\frac{1}{k+e}}-1\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(e^{\frac{1}{k+e}}-1-\frac{1}{k+e}\right)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+e}\leqslant C+\ln(n+e)$$

题设条件取倒数，再列项求和　　用积分不等式证

故

$$e^{a_n}\sim n \qquad \text{trivial}$$

且易知

$$\frac{e^{-a_n}-\frac{1}{n}}{2}=O\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right) \quad \text{由（*）估计}$$

又

$$e^{a_{n+1}}=e^{a_n}e^{e^{-a_n}}=e^{a_n}\left(1+e^{-a_n}+\frac{1}{2}e^{-2a_n}+O\left(e^{-3a_n}\right)\right)=e^{a_n}+1+\frac{1}{2}e^{-a_n}+O\left(e^{-2a_n}\right)$$

故

$$e^{a_{n+1}}-e^{a_n}-1-\frac{1}{2n}=\frac{e^{-a_n}-\frac{1}{n}}{2}+O\left(e^{-2a_n}\right)$$

从而

$$|e^{a_{n+1}}-e^{a_n}-1-\frac{1}{2n}|=O\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$$

这便有

$$\sum_{n=1}^{\infty}|c_{n+1}-c_n|<\infty, c_n=e^{a_n}-n-\frac{\ln(n)}{2}$$

显然，每一个数项趋近0 **ln部分用到估阶**

故我们知

$$\lim_{n\to\infty}e^{a_n}-n-\frac{\ln(n)}{2}\text{存在}$$

Problem 17

第一类曲线积分换元法:

我们做换元

$$x = x(u, v), y = y(u, v)$$

则有

$$\int_{F(x,y)=0} f(x, y)\, ds = \int_{F(x(u,v),y(u,v))=0} f(x(u, v), y(u, v)) \frac{|\det J| \cdot ||D_F||}{||J \cdot D_F||} ds$$

这里

$$D_F = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}, ||D_F|| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}, J = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 我们真正用的比较多的其实是如下几种情况:

(i) 线性换元:

$$x = a + ru, y = b + rv, a, b \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R} - \{0\}$$

则

$$\frac{|\det J|\, ||D_F||}{||J \cdot D_F||} = |r|$$

实际上在一般的 n 维曲面积分如此类似的换元, 则多产生的项是 $|r|^{n-1}$, 同时回顾重积分类似的换元法, 多产生的项是 $|r|^n$.

注意到我们在曲面积分采取的线性换元每个变量伸缩比例 r 都是相同的, 这是因为如果比例不同, 表达式并不简洁 (重积分换元是简洁的), 即做换元

$$x = a + r_1 u, y = b + r_2 v$$

有

$$\frac{|\det J|\, ||D_F||}{||J \cdot D_F||} = \frac{r_1 r_2 \sqrt{F_x^2 + F_y^2}}{\sqrt{r_1^2 F_x^2 + r_2^2 F_y^2}}$$

因此并不常用.

(2) 曲线 (面) 积分的正交变换不变性 (竞赛热点): 如果换元的雅可比矩阵 J 满足

$$J^T J = E$$

那么

$$\frac{|\det J|\,||D_F||}{||J\cdot D_F||}=1$$

即所谓的正交不变性 (重积分也具有正交不变性) 这样我们就有如下推论 (possion): 做换元

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, a^2+b^2\neq 0$$

就有

$$\int_{x^2+y^2=r^2} f\left(ax+by\right)ds=\int_{u^2+v^2=r^2} f\left(\sqrt{a^2+b^2}v\right)ds$$

实际做题中我们可以进一步按标准方法化简右式, 类似的可以得到如下的 possion 公式全体

$$\iint_{x^2+y^2+z^2=r^2} f\left(ax+by+cz\right)dS=\iint_{x^2+y^2+z^2=r^2} f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}z\right)dS$$

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant r^2} f\left(ax+by+cz\right)dxdydz=\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant r^2} f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}z\right)dxdydz$$

$$\iint_{x^2+y^2\leqslant r^2} f\left(ax+by\right)dxdy=\iint_{x^2+y^2\leqslant r^2} f\left(\sqrt{a^2+b^2}y\right)dxdy$$

类似的我们可以给出多元第一类积分的换元, 和讨论类似的性质, 以第一类曲面积分为例

Problem 18

第一类曲面积分换元法:

我们做换元

$$x = x\left(u, v, w\right), y = y\left(u, v, w\right), z = z\left(u, v, w\right)$$

则有

$$\iint_{F(x,y,z)=0} f\left(x, y, z\right) dS =$$

$$\iint_{F(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))=0} f\left(x\left(u, v, w\right), y\left(u, v, w\right), z\left(u, v, w\right)\right) \frac{|\det J| \cdot ||D_F||}{||J \cdot D_F||} dS$$

这里

$$D_F = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}, ||D_F|| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}, J = \begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix}$$

Problem 19

用 #{} 表示集合元素个数 || 表示集合的勒贝格测度 (非数理解为长度).

weyl 等分布原理:

设 $x_1, x_2, ..., x_n, ... \in [0,1]$, 如下结果等价:

(1):$\forall k \geqslant 1, k \in \mathbb{N}$, 有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} e^{2\pi i k x_j}}{n} = 0$$

(2):$\forall f(x) \in C\left[0,1\right], f(0) = f(1)$, 有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} f(x_j)}{n} = \int_0^1 f\left(x\right) dx$$

(3):$\forall \left(a,b\right) \subset [0,1]$, 有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#\left\{1 \leqslant j \leqslant n : x_j \in (a,b)\right\}}{n} = b - a$$

(4):$\forall I \subset \left[0,1\right], I$是一个区间, 有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#\left\{1 \leqslant j \leqslant n : x_j \in I\right\}}{n} = |I|$$

(5):$\forall f(x) \in R\left[0,1\right]$, 有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} f(x_j)}{n} = \int_0^1 f\left(x\right) dx$$

其中满足 (3) 的序列称为等分布.

为了叙述方便, 我们允许 x_n 在 $\mathbb{R}$ 里取值, 此时如果 x_n 的小数部分是等分布, 则称 x_n 为模 1 等分布.

Proof.

(1)$\Longrightarrow$(2):

这是显然的, 因为周期为 1 的连续函数可以被三角多项式一致逼近 (第二逼近定理).

而第二逼近定理的证明也是显然的, 这是因为 $fejer$ 核容易验证是一个恒等逼近.(见 GTM249).

(2)$\Longrightarrow$(3):

定义

$$\chi_{(a,b)} = \begin{cases} 1 & x \in (a,b) \\ 0 & x \notin (a,b) \end{cases}$$

对任意充分小的正数 ϵ, 我们令

$$g_\epsilon\left(x\right) = \begin{cases} 1 & x \in [a,b] \\ \text{线性连接} & x \in (a-\epsilon,a) \cup (b,b+\epsilon) \\ 0 & x \in [0,a-\epsilon] \cup [b+\epsilon,1] \end{cases}, h_\epsilon\left(x\right) = \begin{cases} 1 & x \in [a+\epsilon,b-\epsilon] \\ \text{线性连接} & x \in (a,a+\epsilon) \cup (b-\epsilon,b) \\ 0 & x \in [0,a] \cup [b,1] \end{cases}$$

显然有

$$h_\epsilon\left(x\right) \leqslant f\left(x\right) \leqslant g_\epsilon\left(x\right), \int_0^1 g_\epsilon\left(x\right) dx = b-a+\epsilon, \int_0^1 h_\epsilon\left(x\right) dx = b-a-\epsilon$$

由 (2) 我们知道

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} g_\epsilon\left(x_j\right)}{n} = b-a+\epsilon, \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} h_\epsilon\left(x_j\right)}{n} = b-a-\epsilon$$

注意

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} g_\epsilon\left(x_j\right)}{n} \geqslant \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} f\left(x_j\right)}{n} \geqslant \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} h_\epsilon\left(x_j\right)}{n}$$

两边取极限并令 $\epsilon \to 0^+$ 即证:

(3)$\Longrightarrow$(4):

只需断言 $\forall x\in[0,1]$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\#\left\{1\leqslant j\leqslant n:x_j=x\right\}=0$, 事实上:

如果 $x\in(0,1)$, 则

$$2\epsilon=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\#\left\{1\leqslant j\leqslant n:x_j\in(x-\epsilon,x+\epsilon)\right\}\geqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\#\left\{1\leqslant j\leqslant n:x_j=x\right\}$$

令 $\epsilon\to0^+$ 即得注意到

$$1\geqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\#\left\{1\leqslant j\leqslant n:x_j\in[0,1]\right\}\geqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\#\left\{1\leqslant j\leqslant n:x_j\in(0,1)\right\}=1$$

易知 $x=0,1$ 满足断言.

(4)$\Longrightarrow$(5):

(4) 条件暗示对 $f(x)$ 为区间 I 上特征函数 (即在区间上取 1, 其余地方取 0, 记为 $\chi_I(x)$) 命题是成立的, 这是因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\#\left\{1\leqslant j\leqslant n:x_j\in I\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\chi_I\left(x_j\right)=\int_0^1\chi_I\left(x\right)dx=|I|$$

由线性性, 对所有阶梯函数也成立 (分段常值函数), 若 $f(x)$ 黎曼可积.

由黎曼可积条件, 对 $\forall\epsilon>0$, 存在一种划分 $0=y_0<y_1<...<y_m=1$ 使得

$$\sum_{j=1}^{m}\left(M_j-m_j\right)\left(y_j-y_{j-1}\right)<\epsilon$$

其中

$$M_j=\sup_{x\in[y_{j-1},y_j]}f\left(x\right),m_j=\inf_{x\in[y_{j-1},y_j]}f\left(x\right)$$

记

$$f_L\left(x\right)=\begin{cases}M_j & x\in[y_{j-1},y_j)\\ M_m & x\in[y_{m-1},y_m]\end{cases},f_U\left(x\right)=\begin{cases}m_j & x\in[y_{j-1},y_j)\\ m_m & x\in[y_{m-1},y_m]\end{cases},j=1,2,...,m-1$$

容易看到 $f_U\left(x\right)\leqslant f\left(x\right)\leqslant f_L\left(x\right)$ 并且有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}f_L\left(x_j\right)}{n}=\int_0^1f_L\left(x_j\right)dx,\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}f_U\left(x_j\right)}{n}=\int_0^1f_U\left(x_j\right)dx$$

注意到

$$\int_0^1 f_L\left(x_j\right)dx-\int_0^1 f_U\left(x_j\right)dx<\epsilon$$

令 $\epsilon\to 0^+$ 即得.

(5)$\Longrightarrow$(1):

平凡.

计算一个最近的热门题:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j-1}^{n}\left|\cos\left(j^2\right)\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j-1}^{n}\left|\cos\left(\frac{\pi j^2}{\pi}\right)\right|=\int_0^1\left|\cos\left(\pi x\right)\right|dx=\frac{2}{\pi}$$

注意这里 $f\left(x\right)=\left|\cos\left(\pi x\right)\right|, x_j=\frac{j^2}{\pi}-\left[\frac{j^2}{\pi}\right]$, 至于 $\left\{\frac{n^2}{\pi}-\left[\frac{n^2}{\pi}\right]\right\}_{n\geqslant 1}$ 是等分布的验证, 且听下回分解。

Problem 20

Proof.

用 $\#\{\}$ 表示集合元素个数 $||$ 表示集合的勒贝格测度 (非数理解为长度).

weyl 等分布原理一些结果见上一篇文章:

$x_1, x_2, ..., x_n, ... \in [0,1]$ 是等分布的充分必要条件是

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\#\{1 \leqslant j \leqslant n : x_j \in I\}}{n} \leqslant |I|, \forall I \subset [0,1] \text{ 是区间}$$

必要性显然,

充分性:

只需要注意到存在一个区间或者是两个不交区间的并 K 使得 $I \cup K = [0,1], I \cap K = \emptyset$, 故有

$$1 = \frac{\#\{1 \leqslant j \leqslant n : x_j \in [0,1]\}}{n} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\#\{1 \leqslant j \leqslant n : x_j \in I\}}{n} + \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\#\{1 \leqslant j \leqslant n : x_j \in K\}}{n} \leqslant 1$$

这导致不等号必然是等号, 即

$$|I| = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\#\{1 \leqslant j \leqslant n : x_j \in I\}}{n}$$

以及

$$|K| = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\#\{1 \leqslant j \leqslant n : x_j \in K\}}{n} = 1 - \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\#\{1 \leqslant j \leqslant n : x_j \in I\}}{n}$$

这给出了我们需要的结果.

Problem 21

设 $f(x):\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ 满足

$$f'\left(x\right)>0,\lim_{x\to+\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}=+\infty,\lim_{k\to+\infty}\frac{\sup\limits_{x\in[k,k+1)}f'(x)}{\inf\limits_{x\in[k,k+1)}f'\left(x\right)}=1$$

则 $\left\{f^{-1}\left(n\right)\right\}_{n\geqslant1}$ 是模 1 等分布.

Proof.

读者不难夹逼得到

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f\left(x+1\right)}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x+1)}{f'(x)}=1$$

对给定对充分大的任意正整数 m, 存在唯一的正整数 k_m 有

Problem 22

设 $\{a_n\}_{n\geqslant 1}\in\mathbb{R}$ 且 $\forall h\geqslant 1, h\in\mathbb{N}$ 有

$$\{a_{n+h}-a_n\}_{n\geqslant 1}\text{ 是模 1 等分布}$$

则 $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ 是模 1 等分布

Proof.

我们先承认如下不等式成立

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}e^{2\pi i k a_n}\right|^2\leqslant\frac{4}{HN}\sum_{h=0}^{H}\left|\sum_{n=1}^{N-h}e^{2\pi i k(a_{n+h}-a_n)}\right|,\forall N>H,k\in\mathbb{N},k\geqslant 1$$

则由

$$\{a_{n+h}-a_n\}_{n\geqslant 1}\text{ 是等分布}$$

故

$$\varlimsup_{N\to+\infty}\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}e^{2\pi i k a_n}\right|^2\leqslant\frac{4}{H}\sum_{h=0}^{H}\varlimsup_{N\to+\infty}\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N-h}e^{2\pi i k(a_{n+h}-a_n)}\right|=\frac{4}{H},\forall H\geqslant 1$$

由 H 的任意性即知

$$\lim_{N\to+\infty}\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}e^{2\pi i k a_n}\right|^2=0,\forall k\geqslant 1,k\in\mathbb{N}$$

接下来证明我们断言的不等式, 固定 $N>H$, 我们记

$$c_i=\begin{cases}e^{2\pi i k a_i} & 1\leqslant i\leqslant N\\ 0 & i>N\text{或者}i\leqslant 0\end{cases}$$

断言

$$\left|\sum_{i=1}^{N}c_i\right|^2\leqslant\frac{4N}{H}\sum_{h=0}^{H}\left|\sum_{n=1}^{N-h}c_{n+h}\bar{c}_n\right|$$

这里的意思是a_i求和被a_(i+1)-a_i所控制

事实上

$$\left|\sum_{i=1}^{N}c_i\right|^2=\frac{1}{H^2}\left|\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=1}^{H}c_{n+k}\right|^2\leqslant\frac{1}{H^2}(N+H-1)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|\sum_{k=1}^{H}c_{n+k}\right|^2$$

Cauchy不等式，无穷项中只需
要N+H-1项为1，其余为0

$$
\begin{aligned}
&= \frac{N+H-1}{H}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n|^2 + 2\frac{N+H-1}{H^2}\sum_{h=1}^{H-1}(H-h)\,Re\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_{n+h}\bar{c}_n\right) \\
&\leqslant 2\frac{N+H-1}{H}\sum_{h=1}^{H-1}\left(1-\frac{h}{H}\right)\left|\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_{n+h}\bar{c}_n\right| \leqslant \frac{4N}{H}\sum_{h=0}^{H}\left|\sum_{n=1}^{N-h}c_{n+h}\bar{c}_n\right|
\end{aligned}
$$

我们完成了证明.

对于上次推文遗留的问题即 $\frac{n^2}{\pi}$ 是模 1 等分布, 事实上

$$
\frac{(n+h)^2}{\pi} - \frac{n^2}{\pi} = \frac{2hn}{\pi} + \frac{h^2}{\pi}
$$

易知我们需要的结果。

Problem 23

若非负 $f(x) \in C[0,+\infty)$, 且成立

$$\int_0^x t^2 f^3(t)\,dt \leqslant x f(x), \forall x \geqslant 0$$

证明

$$f(x) = 0$$

PROOF. (*By* 清疏竞赛数学) 反证: 若不然, 则

$$\exists x_0 > 0, F(x) = \int_0^x t^2 f^3(t)\,dt > 0, \forall x > x_0$$

故

$$\frac{F'(x)}{F^3(x)} \geqslant \frac{1}{x}, \forall x > x_0$$

则

$$\frac{1}{F^2(x_0+1)} \geqslant -\frac{1}{F^2(x)} + \frac{1}{F^2(x_0+1)} = \int_{x_0+1}^x \frac{F'(x)}{F^3(x)}dx \geqslant \ln\left(\frac{x}{x_0+1}\right), \forall x > x_0+1$$

矛盾, 我们完成了证明.

这说明F在x_0+1处必须跑到0，但是这与F(x)在x>x_0处恒正的定义矛盾

Problem 24

设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 且 na_n 递减, 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} \min\left\{a_n, \frac{1}{n\ln(n)}\right\}$$

发散

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 假如 $\sum_{n=1}^{\infty} \min\left\{a_n, \frac{1}{n\ln(n)}\right\} < \infty$, 有

$$\sum_{n=[\sqrt{m}]}^{m} \min\left\{a_n, \frac{1}{n\ln(n)}\right\} = \sum_{n=[\sqrt{m}]}^{m} \frac{1}{n} \min\left\{na_n, \frac{1}{\ln(n)}\right\} \geq$$

$$\min\left\{ma_m, \frac{1}{\ln(m)}\right\} \sum_{n=[\sqrt{m}]}^{m} \frac{1}{n} \geqslant \min\left\{ma_m, \frac{1}{\ln(m)}\right\} \int_{[\sqrt{m}]}^{m+1} \frac{1}{x} dx =$$

$$\min\left\{ma_m, \frac{1}{\ln(m)}\right\} \ln\left(\frac{m+1}{[\sqrt{m}]}\right) \sim \min\left\{ma_m, \frac{1}{\ln(m)}\right\} \ln(m)$$

$$\min\left\{ma_m \ln(m), 1\right\} \to 0$$

故

$$\exists N \geqslant 1, \forall n \geqslant N, a_n \leqslant \frac{1}{n\ln(n)}$$

因此

$$\sum_{n=N}^{\infty} \min\left\{a_n, \frac{1}{n\ln(n)}\right\} = \sum_{n=N}^{\infty} a_n$$

发散, 矛盾, 我们完成了证明.

Problem 25

若
$$0 \leqslant a_{n+m} \leqslant a_m + a_n + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$$

判断 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$ 是否存在

Proof. *(By 清疏竞赛数学)* 结论是肯定的, 事实上

首先利用条件不等式归纳易得 $\forall m \geqslant 1, a_{mn} \leqslant c_m a_n + \frac{k_m}{n}$, 这里

$$k_m = \begin{cases} 0 & m = 1 \\ 2 & m = 2 \\ m + \sum\limits_{j=2}^{m-1} \frac{1}{j-1} & m > 2 \end{cases}, c_m = m, m = 1, 2, \dots$$

故定好 $m \geq 1$, 我们对 $n = mk + r, r = 0, 1, 2, \dots, m-1$ 有

$$\frac{a_{mk+r}}{mk+r} \leqslant \frac{a_{mk}}{mk+r} + \frac{a_r}{mk+r} + \frac{1}{mk\,(mk+r)} + \frac{1}{(mk+r)\,r}$$

$$\leqslant \frac{ka_m + \frac{k_k}{m}}{mk+r} + \frac{a_r}{mk+r} + \frac{1}{mk\,(mk+r)} + \frac{1}{r\,(mk+r)}$$

故
$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_n}{n} \leqslant \lim_{k\to\infty} \left(\frac{ka_m + \frac{k_k}{m}}{mk+r} + \frac{a_r}{mk+r} + \frac{1}{mk\,(mk+r)} + \frac{1}{(mk+r)\,r}\right) = \frac{a_m}{m} + \frac{1}{m^2}$$

这里用到了调和数列部分等价于 $\ln(k)$, 故对 m 取下极限有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_n}{n} \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_n}{n}$$

有限性已经蕴含在证明中, 我们完成了证明.

Problem 26

设 $V\subset\mathbb{R}^n$ 是一具有 C^1 边界的开集, 且 $f(x)\in C^1\left(\bar{V}\right)$,

设 n_i 是边界单位外法向量的第 i 个分量, 且:

(1):$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ 在 V 上依勒贝格测度可积,

(2):$f\cdot n_i$ 在 ∂V 上依曲面测度可积.

则成立

$$\int_V\frac{\partial f}{\partial x_i}dx=\int_{\partial V}f\cdot n_i dS$$

这里 C^1 边界如下定义:

$\forall x\in\partial V$,

$$\exists x\text{的连通开邻域}U,\text{和}\eta:U\to\mathbb{R},\eta\in C^1(U)$$

使得:

(1):$V\cap U=\{x\in U:\eta(x)<0\}$,

(2):$d\eta(x)=\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{\partial\eta}{\partial x_i}dx_i\neq 0,\forall x\in U$.

x 处的单位外法向量第 i 个分量定义为

$$n_i=\frac{\frac{\partial\eta}{\partial x_i}}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n}(\frac{\partial\eta}{\partial x_j})^2}}$$

解释. (By 清疏竞赛数学) (1): 这个结果也适用于边界除去有限个点外是 C^1 的情形.

(2): 上述表述不在依赖于任何直观想象, 是一个严格, 严谨的结果, 可以看到这个结果适用于无界区域 (而非封闭区域) 情形.

(3): 可积在通常大家知道的版本下是不存在的要求是因为之前是有界区域, 天然可积.

(3): 这个定理本质上依赖于一维牛顿莱布尼兹公式.

(4): 证明大概是先单位分解, 然后做紧支化, 然后对较小的区域一块一块的处理, 最后粘起来, 紧支化目的是保证换序.

(5): 这个结果是测度版本的格林公式, 是分析方向的格林公式, 和几何里面的有一定区别, 想知道严格证明和曲面测度构建可加群 959089479.

Problem 27

设 $f(x,y)\in C^2(\mathbb{R}^2)$ 且满足

$$|f_{xx}|,|f_{yy}|,|f_{xy}|\leqslant 1,\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

以及

$$f(1,1)=f(1,-1)=f(-2,0)$$

证明

$$|f_x|,|f_y|\leqslant 2019,\forall x^2+y^2\leqslant 1$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 当 $(x,y)\in x^2+y^2\leqslant 1$,

注意到

二元函数的taylor展开

$$f(1,1)=f(x,y)+\frac{\partial f}{\partial x}(1-x)+\frac{\partial f}{\partial y}(1-y)+\frac{1}{2}\left((1-x)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+(1-y)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+2(1-x)(1-y)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)(\theta_1,\eta_1)$$
$$f(1,-1)=f(x,y)+\frac{\partial f}{\partial x}(1-x)-\frac{\partial f}{\partial y}(1+y)+\frac{1}{2}\left((1-x)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+(1+y)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-2(1-x)(1+y)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)(\theta_2,\eta_2)$$
$$f(-2,0)=f(x,y)+\frac{\partial f}{\partial x}(-2-x)-\frac{\partial f}{\partial y}y+\frac{1}{2}\left((-2-x)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-2(-2-x)y\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)(\theta_3,\eta_3)$$

由第一个和第二个式子, 我们有

$$4\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\leqslant 2(1-x)^2+(1+y)^2+2|1-x||1+y|+2|1-x||1+y|+(1-y)^2\leqslant 32$$

由第二个式子和第三个式子和上面的计算我们有

$$3\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\leqslant\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|+\frac{(1-x)^2+(1+y)^2+(2+x)^2+y^2}{2}+|1-x||1+y|+|2+x||y|\leqslant 24$$

故我们有

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|,\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\leqslant 8,\forall (x,y)\in x^2+y^2\leqslant 1$$

这完成了证明.

Problem 28

设 $f(x) \in C^1(1,\infty)$ 满足

$$f'(x) = \frac{x^2 - f^2(x)}{x^2(1+f^2(x))}, x > 1$$

证明

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

PROOF. (*By* 清疏竞赛数学) 注意到

$$1 - f'(x) = \frac{x^2 f^2 + f^2}{x^2(1+f^2(x))} \geqslant 0$$

故由单调性知

$$\lim_{x\to+\infty} x - f(x) \text{广义存在}$$

不妨设

$$\lim_{x\to+\infty} x - f(x) = +\infty$$

否则问题是平凡的, 则 $\exists x_0 > 1, x - f(x) > 0, \forall x \in (x_0, \infty)$.

类似的再考虑 $f(x) + x$, 故可不妨设 $f(x)$ 在 (x_0, ∞) 递增, 故必有

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \text{广义存在}$$

如果

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \neq \infty$$

则由条件等式

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \frac{1}{1+A^2}$$

此时和

$$\lim_{x\to+\infty} f(x+1) - f(x) = \lim_{x\to+\infty} f'(\theta_x) = 0$$

矛盾. 这完成了证明.

Problem 29

设 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^n}$, 计算

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n S_n}{n}$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 首先我们知道

$$S_n=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^n}\sim\int_1^{\infty}\frac{1}{x^n}dx=\frac{1}{n-1},n\to\infty$$

故 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n S_n}{n}$ 绝对收敛, 熟知洛朗展开

$$\varphi(z)=-\gamma-\frac{1}{z}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n S_n z^{n-1}$$

这里 $\varphi(z)$ 是 *digamma* 函数, 故

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n S_n}{n}=\int_0^1\varphi(x)+\frac{1}{x}+\gamma dx=\ln(1\cdot\Gamma(1))-\lim_{x\to 0}\ln(x\cdot\Gamma(x))+\gamma=\gamma$$

Problem 30

设 $p(x)$ 是 k 次多项式,$k>0$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin(p(n))|}{n}=\infty$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 反证, 如果级数收敛, 变形并由 *stolz* 定理有

乘上k*(1/k)进行abel展开，得到的那一项用stolz发现是0

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}|\sin p(k)|}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}[\frac{\sin p(k)}{k}-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n-1}\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{|\sin p(i)|}{i}}{n}]=0$$

令一方面, 由 $\frac{p(k)}{\pi}$ 是模 1 等分布 (小数部分均匀分布) 和 *weyl* 等分布原理知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}|\sin p(k)|}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}|\sin\left(\frac{\pi p(k)}{\pi}\right)|}{n}=\int_0^1|\sin(\pi x)|\,dx=\frac{2}{\pi}$$

这导出了矛盾, 我们完成了证明.

Problem 31

设 $a_{ij}=a_{ji},a_{ij},b_i,b\in\mathbb{R},\forall i,j=1,2,...,n$, 给定

$$f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j+2\sum_{i=1}^{n}b_ix_i+b$$

且 $A=\left(a_{ij}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ 正定.

求 $f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ 的最小值.

Proof. *(By 清疏竞赛数学)* 注意到

$$f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=x^T\begin{pmatrix}A&\beta\\\beta^T&b\end{pmatrix}x,x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\\1\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$$

做换元

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_n&-A^{-1}\beta\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_n&-A^{-1}\beta\\0&1\end{pmatrix}y$$

因此只需计算

$$f\left(y_1,y_2,...,y_n\right)=y^T\begin{pmatrix}A&0\\0&b-\beta^TA^{-1}\beta\end{pmatrix}y$$

最小值, 事实上

$$f\left(y_1,y_2,...,y_n\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_iy_j+b-\beta^TA^{-1}\beta\geqslant b-\beta^TA^{-1}\beta$$

等号成立当且仅当

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & -A^{-1}\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = -A^{-1}\beta$$

Problem 32

计算

$$\lim_{n\to\infty} e^{-\frac{n}{2}}\sqrt{n}\left(\prod_{k=1}^{n} C_n^k\right)^{\frac{1}{n}}$$

Proof. (By 清疏竞赛数学) 事实上

$$\lim_{n\to\infty} e^{-\frac{n}{2}}\sqrt{n}\left(\prod_{k=1}^{n} C_n^k\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{n}{2}}\sqrt{n}e^{\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln C_n^k}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{n\ln n-n^2+2\sum\limits_{k=1}^{n}\ln C_n^k}{2n}}$$

故只需要计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln n-n^2+2\sum\limits_{k=1}^{n}\ln C_n^k}{2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)+n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-(2n+1)+2\sum\limits_{k=1}^{n+1}\ln C_{n+1}^k-2\sum\limits_{k=1}^{n}\ln C_n^k}{2}$$

这里用了组合数公式，降了一级　　可验证这里是0

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)-2n+2\sum\limits_{k=1}^{n}(\ln C_{n+1}^k-\ln C_n^k)}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)-2n+2\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\frac{n+1}{k}+2\sum\limits_{k-1}^{n}(\ln C_n^{k-1}-\ln C_n^k)}{2}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)\ln(n+1)-2n-2\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)\ln(n+1)-2n-2\ln[e^{-n}n^n\left(\sqrt{2\pi n}+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)]}{2}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)\ln(n+1)-2n\ln n-2\ln(\sqrt{2\pi n}+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right))}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(\frac{n+1}{2\pi n+O\left(\frac{1}{n}\right)}\right)}{2} = \frac{2+\ln\frac{1}{2\pi}}{2}$$

从而

$$\lim_{n\to\infty} e^{-\frac{n}{2}}\sqrt{n}\left(\prod_{k=1}^{n} C_n^k\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{e}{\sqrt{2\pi}}$$

Problem 33

若 $a \in (0,1]$, 求

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \ln n}{n^a} x^n \text{收敛域}$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 当 $|x| < 1$ 时, 显然收敛, 当 $x = 1$ 时, 注意到

$$\sum_{k=[e^{2\pi n}]+1}^{\left[e^{2\pi n+\frac{\pi}{4}}\right]} \frac{\cos \ln k}{k^a} \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{k=[e^{2\pi n}]+1}^{\left[e^{2\pi n+\frac{\pi}{4}}\right]} \frac{1}{k} \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\left[e^{2\pi n+\frac{\pi}{4}}\right] - [e^{2\pi n}]}{\left[e^{2\pi n+\frac{\pi}{4}}\right]}$$

于是我们有

$$\varliminf_{n\to\infty} \sum_{k=[e^{2\pi n}]+1}^{\left[e^{2\pi n+\frac{\pi}{4}}\right]} \frac{\cos \ln k}{k^a} \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 - \frac{1}{e^{\frac{\pi}{4}}}\right)$$

故此时级数发散, 当 $x = -1$ 时, 显然只需要考虑前 $2n$ 项部分和, 注意到

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k \cos \ln k}{k^a} = \sum_{k=1}^{n} (\frac{\cos \ln (2k)}{(2k)^a} - \frac{\cos \ln (2k-1)}{(2k-1)^a})$$

以及

$$\sum_{k=1}^{n} |\frac{\cos \ln (2k)}{(2k)^a} - \frac{\cos \ln (2k-1)}{(2k-1)^a}| = \sum_{k=1}^{n} |\frac{-\sin \ln \theta_k - a \cos \ln \theta_k}{\theta_k^{a+1}}|, \theta_k \in (2k-1, 2k)$$

故

$$\sum_{k=1}^{n} |\frac{\cos \ln (2k)}{(2k)^a} - \frac{\cos \ln (2k-1)}{(2k-1)^a}| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{a+1}{(2k-1)^{a+1}} < +\infty$$

从而原级数收敛, 故收敛域是

$$[-1.1)$$

Problem 34

设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+1} + ... + a_{2n}}{n} \text{也收敛}$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 记

$$R_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$$

注意到

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{R_k - R_{2k+1}}{k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{R_{2k}}{2k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{R_{2k-1}}{2k-1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{R_{2k+1}}{k}$$

把减的那一项分配进去

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{2k}}{2k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{2k-1} + a_{2k}}{2k-1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{R_{2k+1}}{(2k-1)(2k)}$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} a_{2k} + \sum_{k=1}^{2n} a_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(2k-1)}$$

我们完成了证明.

Problem 35

设 $a > 0$,f 是 $(0, +\infty)$ 上的一个单调递减的非负函数, 满足

$$\int_0^{\infty} t^a f(t)\, dt < \infty$$

证明

$$\int_x^{\infty} f(t)\, dt \leqslant \left(\frac{a}{(a+1)x}\right)^a \int_0^{\infty} t^a f(t)\, dt, \forall x > 0$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 这里只提供答案, 本质思想只发布于竞赛班.

注意到 $t = xu$ 知, 可以不妨设 $x = 1$, 由 f 递减, 我们可以注意到如下不等式成立

$$\int_x^{\infty} f(t)\, dt \geqslant f(1)(1-x) + \int_1^{\infty} f(t)\, dt, \forall x \in (0, +\infty)$$

于是有

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} t^a f(t)\, dt &= \int_0^{\infty} \int_t^{\infty} a t^{a-1} f(x)\, dx dt \\
&\geqslant \int_0^{\frac{a+1}{a}} a t^{a-1} \left[f(1)(1-t) + \int_1^{\infty} f(x)\, dx\right] dt \\
&= a f(1) \int_0^{\frac{a+1}{a}} \left(t^{a-1} - t^a\right) dt + \left(\frac{a+1}{a}\right)^a \int_1^{\infty} f(t)\, dt \\
&= a f(1) \left[\frac{\left(\frac{a+1}{a}\right)^a}{a} - \frac{\left(\frac{a+1}{a}\right)^{a+1}}{a+1}\right] + \left(\frac{a+1}{a}\right)^a \int_1^{\infty} f(t)\, dt \\
&= \left(\frac{a+1}{a}\right)^a \int_1^{\infty} f(t)\, dt
\end{aligned}$$

这里我们用到了

$$0 \leqslant \lim_{t \to \infty} t^a \int_t^{\infty} f(x)\, dx \leqslant \lim_{t \to \infty} \int_t^{\infty} x^a f(x)\, dx = 0$$

这就完成了证明.

Problem 36

上述问题的这个方法得到的最好系数是如下确定的:

设 $g\left(x\right)=x^{a+1}-\frac{a+1}{a}x^{a}$, 在约束条件:

$$g\left(x_1\right)=g\left(x_2\right),0\leqslant x_1<x_2$$

下计算

$$\frac{x_2^a-x_1^a}{a}$$

最大值,

Problem 37

设 $f(x)\in R[-\pi,\pi]$, $f(x)\geqslant 0, a\geq 1$, 证明

$$\begin{cases}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin xdx\right)^a+\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos xdx\right)^a\leqslant \frac{\pi^{\frac{a-1}{2}}}{2^{a-2}}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{2a-1}{2a-2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3a-2}{2a-2}\right)}\right)^{a-1}\int_{-\pi}^{\pi} f^a(x)\,dx & a\in[1,2]\\ \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin xdx\right)^a+\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos xdx\right)^a\leqslant \pi^{\frac{a-1}{2}}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{2a-1}{2a-2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3a-2}{2a-2}\right)}\right)^{a-1}\int_{-\pi}^{\pi} f^a(x)\,dx & a\in[2,+\infty)\end{cases}$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学)

当 $a=1$ 命题是显然的 (此时系数视为在极限下的极限值), 注意到恒等式

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin xdx\right)^a=\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)-f(x-\pi)+f(\pi-x)-f(-x)\right]\sin xdx\right)^a$$

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos xdx\right)^a=\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)-f(x-\pi)-f(\pi-x)+f(-x)\right]\cos xdx\right)^a$$

由 *holder* 不等式, 我们有

$$\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)-f(x-\pi)+f(\pi-x)-f(-x)\right]\sin xdx\right)^a\leqslant$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|f(x)-f(x-\pi)+f(\pi-x)-f(-x)\right|^a dx\cdot\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{a}{a-1}}xdx\right)^{a-1}$$

以及

$$\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)-f(x-\pi)-f(\pi-x)+f(-x)\right]\cos xdx\right)^a\leqslant$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|f(x)-f(x-\pi)-f(\pi-x)+f(-x)\right|^a dx\cdot\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{a}{a-1}}xdx\right)^{a-1}$$

注意到

$$\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{a}{a-1}}xdx\right)^{a-1}=\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{a}{a-1}}xdx\right)^{a-1}=\frac{\pi^{\frac{a-1}{2}}}{2^{a-1}}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{2a-1}{2a-2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3a-2}{2a-2}\right)}\right)^{a-1}$$

以及初等不等式

$$\begin{cases}|x-y+z-w|^a+|x-y-z+w|^a\leqslant 2\left(x^a+y^a+z^a+w^a\right) & a\in[1,2]\\ |x-y+z-w|^a+|x-y-z+w|^a\leqslant 2^{a-1}\left(x^a+y^a+z^a+w^a\right) & a\in[2,+\infty)\end{cases},x,y,z,w>0$$

则当 $a \geq 2$, 有

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x dx\right)^a + \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x dx\right)^a \leqslant$$

$$\pi^{\frac{a-1}{2}}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{2a-1}{2a-2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3a-2}{2a-2}\right)}\right)^{a-1}\int_{-\pi}^{\pi} f^a(x) + f^a(\pi - x) + f^a(x-\pi) + f^a(-x)\,dx$$

$$= \pi^{\frac{a-1}{2}}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{2a-1}{2a-2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3a-2}{2a-2}\right)}\right)^{a-1}\int_{-\pi}^{\pi} f^a(x)\,dx$$

类似可证明 $1 < a \leq 2$ 的情形, 这里初等不等式可如下证明:

由对称性我们不妨设

$$x - y > 0, z - w > 0, , x - y \geq z - w$$

因此

$$\frac{|x-y+z-w|^a + |x-y-z+w|^a}{x^a + y^a + z^a + w^a} \leqslant \frac{(x-y+z-w)^a + (x-y-z+w)^a}{(x-y)^a + (z-w)^a}$$

$$= \frac{\left(\frac{x-y}{z-w}+1\right)^a + \left(\frac{x-y}{z-w}-1\right)^a}{\left(\frac{x-y}{z-w}\right)^a + 1} = \frac{(t+1)^a + (t-1)^a}{t^a+1}, t = \frac{x-y}{z-w} \geqslant 1$$

令

$$h(t) = \frac{(t+1)^a + (t-1)^a}{t^a+1}, t \geqslant 1$$

注意到

$$h'(t) = a\frac{(t^a+t)(t-1)^{a-1} + (t+1)^{a-1}(t-t^a)}{t(1+t^a)^2}, \forall t \geqslant 1$$

以及

$$\lim_{t\to+\infty} h(t) = 2, h(1) = 2^{n-1}$$

以及

$$\begin{cases} \frac{t^{a-1}+1}{(t+1)^{a-1}} \geqslant \frac{t^{a-1}-1}{(t-1)^{a-1}} & a \in [1,2] \\ \frac{t^{a-1}+1}{(t+1)^{a-1}} \leqslant \frac{t^{a-1}-1}{(t-1)^{a-1}} & a \in [2,+\infty) \end{cases}, \forall t > 1$$

则

$$h(t)\begin{cases} \text{递增} & a \in [1,2] \\ \text{递减} & a \in [2,+\infty) \end{cases}$$

从而完成了我们初等不等式的证明.

Problem 38

若 $s>0$ 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^s}{s\left(s+1\right)\dots\left(s+n\right)}\text{存在}$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 这个结果是经典的, 网上有学生和老师在传, 所以这里顺便码一下 (证法不唯一, 这里采用数分证法).

我们考虑

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^s}{s\left(s+1\right)\dots\left(s+n\right)}=\lim_{n\to\infty}n^s\frac{\Gamma\left(n+1\right)\Gamma\left(s+1\right)}{\Gamma\left(s+n+1\right)}=\lim_{n\to\infty}n^{s+1}\int_0^1 x^n\left(1-x\right)^s dx$$

进一步

$$\lim_{n\to\infty}n^{s+1}\int_0^1 x^n\left(1-x\right)^s dx=\lim_{n\to\infty}n^{s+1}\int_0^1\left(1-x\right)^n x^s dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^s dx$$

于是有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^s dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty\chi_{[0,n]}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^s dx=\int_0^\infty e^{-x}x^s dx=\Gamma\left(s+1\right)$$

这里用到了

$$\int_0^\infty\left|\chi_{[0,n]}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^s\right|dx\leqslant\int_0^\infty e^{-x}x^s dx<\infty$$

Problem 39

若连续函数 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 且满足 $\int_0^1 xf(x)\,dx=0$ 证明

$$\int_0^1 x^2 f(x)\,dx \leqslant \frac{2-\sqrt{2}}{6}\max_{x\in[0,1]}|f(x)|$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 注意到

$$\int_0^1 x^2 f(x)\,dx=\int_0^1\left(x^2-\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)f(x)\,dx\leqslant\int_0^1\left|x^2-\frac{\sqrt{2}}{2}x\right||f(x)|\,dx$$

故有

$$\int_0^1\left|x^2-\frac{\sqrt{2}}{2}x\right||f(x)|\,dx\leqslant\max_{x\in[0,1]}|f(x)|\int_0^1\left|x^2-\frac{\sqrt{2}}{2}x\right|dx=\frac{2-\sqrt{2}}{6}\max_{x\in[0,1]}|f(x)|$$

由逼近方法 (超出非数范围) 可知对满足条件的黎曼可积函数也成立, 所以取

$$f(x)=\begin{cases}-1 & 0\leqslant x\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

可知等号成立. 故得到的系数是最佳的.

Problem 40

计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}\sqrt[n]{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^n}{k!}}$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学)

取 $f(x)=\frac{x^n}{\Gamma(1+x)}$, 容易知道 $\exists x_n>0, x_n\psi(1+x_n)=n$,$f(x)$ 在 $(x_n,+\infty)$ 递减.

记 $N_n=[x_n]+1$, 注意到

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^n}{k!}=\sum_{k=1}^{N_n}\frac{k^n}{k!}+\sum_{k=N_n+1}^{\infty}\frac{k^n}{k!}\geqslant\sum_{k=1}^{N_n}\frac{k^n}{k!}+\sum_{k=N_n+1}^{\infty}\int_k^{k+1}\frac{x^n}{\Gamma(x+1)}dx=\sum_{k=1}^{N_n}\frac{k^n}{k!}+\int_{N_n+1}^{\infty}\frac{x^n}{\Gamma(x+1)}dx$$

以及

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^n}{k!}=\sum_{k=1}^{N_n}\frac{k^n}{k!}+\sum_{k=N_n+1}^{\infty}\frac{k^n}{k!}\leqslant\sum_{k=1}^{N_n}\frac{k^n}{k!}+\sum_{k=N_n+1}^{\infty}\int_{k-1}^{k}\frac{x^n}{\Gamma(x+1)}dx=\sum_{k=1}^{N_n}\frac{k^n}{k!}+\int_{N_n}^{\infty}\frac{x^n}{\Gamma(x+1)}dx$$

Problem 41

设 $f(x) \in C^2(0,+\infty)$, 且满足

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{e^x} = 1, \left|f''(x)\right| < c\left|f'(x)\right|, \forall x > 0$$

证明

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{e^x} = 1$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学)

令

$$g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$$

于是有

$$g'(x) = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x}, g''(x) = \frac{f'' - 2f' + f}{e^x}, \lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$$

显然 $f'(x)$ 无零点且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. 注意到 **这里说明f'(x)恒正**

$$\left|f'(x)\right| \leqslant \left|f'(1)\right| + c\int_1^x f'(y)\,dy = \left|f'(1)\right| - cf(1) + cf(x), x > 1$$

g''有界可以由题设和上述推论结合三角不等式推出

于是容易知道 $g''(x)$ 有界, 故

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} = 0$$

于是有

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{e^x} = 1$$

我们完成了证明.

Problem 42

若 $f(x) \in R[0,1]$, 且 $m = \inf\limits_{x\in[0,1]} f(x), M = \sup\limits_{x\in[0,1]} f(x), \int_0^1 f(x)\,dx = 0$ 证明

$$\int_0^1 \left[\int_0^x f(y)\,dy\right]^2 dx \leqslant \frac{-Mm}{6(M-m)^2}\left(3M^2 - 8mM + 3m^2\right)$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学)

显然 $m \le 0 \le M$, 注意到

$$\frac{-Mm}{6(M-m)^2}\left(3M^2-8mM+3m^2\right) - \frac{7}{12}m^2 = -\frac{m\left(M - \frac{15-\sqrt{57}}{12}m\right)(M+m)\left(6M - \frac{\sqrt{57}+15}{2}m\right)}{12(M-m)^2}$$

所以我们结合轮换对称性有

$$\frac{-Mm}{6(M-m)^2}\left(3M^2-8mM+3m^2\right) \geqslant \frac{7}{12}\min\left\{M^2, m^2\right\}$$

进一步由条件, 显然有

$$\int_0^1 \left[\int_0^x f(y)\,dy\right]^2 dx \leqslant \int_0^1 \min\left\{M^2 \max\left\{x^2, (1-x)^2\right\}, m^2 \max\left\{x^2, (1-x)^2\right\}\right\} dx = \frac{7}{12}\min\left\{m^2, M^2\right\}$$

我们完成了证明.

Problem 43

若 $f \in C^1(\mathbb{R})$ 且满足

$$\left|f(x+t)-2f(x)+f(x-t)\right| \leqslant Mt^2$$

证明

$$\left|f'(x+t)-f'(x)\right| \leqslant M|t|$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学)

取

这是磨光子 $$j(x)=\begin{cases}\frac{1}{\int_{-1}^{1} e^{-\frac{1}{1-x^2}}dx}e^{-\frac{1}{1-x^2}} & |x|<1\\ 0 & |x|\geqslant 1\end{cases}$$

我们令

$$f_\epsilon(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)j_\epsilon(y)\,dy \in C^\infty(\mathbb{R}),\, j_\epsilon(x)=\frac{1}{\epsilon}j\left(\frac{x}{\epsilon}\right),\epsilon>0$$

显然有

$$\left|f_\epsilon(x+t)-2f_\epsilon(x)+f_\epsilon(x-t)\right| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x-y+t)-2f(x-y)+f(x-y-t)\right| j_\epsilon(y)\,dy \leqslant Mt^2$$

从而我们有

$$\lim_{t\to 0}\frac{\left|f_\epsilon(x+t)-2f_\epsilon(x)+f_\epsilon(x-t)\right|}{t^2}=\left|f_\epsilon''(x)\right| \leqslant M$$

故

$$\left|f_\epsilon'(x+t)-f_\epsilon'(x)\right| \leqslant \int_x^{x+t}\left|f_\epsilon''(y)\right|dy \leqslant Mt, \forall t\geqslant 0, x\in\mathbb{R}$$

由磨光基本结论我们有

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} f_\epsilon(x)=f(x),\ \lim_{\epsilon\to 0^+} f_\epsilon'(x)=f'(x)$$

从而我们得到

$$\left|f'(x+t)-f'(x)\right| \leqslant M|t|$$

Problem 44

当 $0 < x < \pi$, 证明

$$\int_0^x \frac{\sin 2nt}{\sin t} dt > 0$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 令

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin 2nt}{\sin t} dt$$

则

$$f'(x) = \frac{\sin 2nx}{\sin x}, f''(x) = \frac{2n \cos 2nx \sin x - \cos x \sin 2nx}{\sin^2 x}$$

只需证明 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 极小值点为正, 即

$$\int_0^{\frac{m\pi}{n}} \frac{\sin 2nt}{\sin t} dt = \frac{1}{n} \int_0^{m\pi} \frac{\sin 2t}{\sin \frac{t}{n}} dt = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{m-1} \int_{\frac{2k}{2}\pi}^{\frac{2k+1}{2}\pi} \frac{\sin 2t}{\sin \frac{t}{n}} dt + \frac{1}{n} \int_{\frac{2k+1}{2}\pi}^{\frac{2k+2}{2}\pi} \frac{\sin 2t}{\sin \frac{t}{n}} dt$$

这里将后面的积分平移了pi/2

故

$$\int_0^{\frac{m\pi}{n}} \frac{\sin 2nt}{\sin t} dt = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{m-1} \int_{\frac{2k}{2}\pi}^{\frac{2k+1}{2}\pi} \frac{\sin 2t}{\sin \frac{t}{n}} - \frac{\sin 2t}{\sin \frac{t+\frac{\pi}{2}}{n}} dt > 0$$

Problem 45

设

$$f(x) \in C^2[-1,1], f(1) = f(-1) = f'(1) = f'(-1) = 0$$

证明

$$\sup_{x\in[-1,1]} |f(x)|^2 \leqslant \frac{1}{6}\int_{-1}^{1} |f''(x)|^2 dx$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 不妨设

$$\sup_{x\in[-1,1]} |f(x)| = |f(x_0)|, x_0 \in [-1,0]$$

取

$$p(x) = \begin{cases} \frac{x_0^3-3x_0-\sqrt{x_0^6-6x_0^4-12x_0^3-15x_0^2-12x_0}-2}{4}x & x_0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \frac{x_0^3-3x_0-\sqrt{x_0^6-6x_0^4-12x_0^3-15x_0^2-12x_0}+2}{4}x - x_0 & -1 < x < x_0 \end{cases}$$

这里显然有

$$x_0^6 - 6x_0^4 - 12x_0^3 - 15x_0^2 - 12x_0 \geqslant 0$$

由 *cauchy* 不等式和直接计算得

$$\int_{-1}^{1} p^2(x)\,dx \int_{-1}^{1} |f''(x)|^2 dx \geqslant \left(\int_{-1}^{1} p(x) f''(x)\,dx\right)^2 = |f(x_0)|^2, \int_{-1}^{1} p^2(x)\,dx = \frac{1}{6}$$

我们完成了证明.

Problem 46

设

$$f(x) \in C^2[-1,1], f(1) = f(-1) = f'(1) = f'(-1) = 0$$

证明

$$\sup_{x\in[-1,1]} |f(x)|^2 \leqslant \frac{1}{24}\int_{-1}^{1} |f''(x)|^2 dx$$

$$\sup_{x\in[-1,1]} |f'(x)|^2 \leqslant \frac{1}{6}\int_{-1}^{1} |f''(x)|^2 dx$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 我们给出一般性结果, 设

$$f(x) \in C^{(n)}[a,b], f^{(j)}(a) = f^{(j)}(b) = 0, j = 0,1,2,...,n-1$$

且

$$\sup_{x\in[a,b]} \left|f^{(k)}(x)\right|^2 = \left|f^{(k)}(x_0)\right|, x_0 \in [a,b]$$

则存在 $C_{a,b,k,n,x_0} > 0$, 使得

$$\sup_{x\in[a,b]} \left|f^{(k)}(x)\right|^2 \leqslant C_{a,b,k,n,x_0}\int_a^b \left|f^{(n)}(x)\right|^2 dx, 0 \leqslant k < n$$

这里 $C_{a,b,k,n,x_0} > 0$ 如下确定是最好的, 记

$$\tilde{x}_0 = \frac{x_0 - a}{b - a}$$

令

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^{n-k-1}}{(n-k-1)!} & x > \tilde{x}_0 \\ \frac{x^{n-k-1} - (x-\tilde{x}_0)^{n-k-1}}{(n-k-1)!} & x \leqslant \tilde{x}_0 \end{cases}, H = \begin{pmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}, c_l = \int_0^1 g(t)\, t^l dt, l = 0,1,2,...,n-1$$

则有

$$C_{a,b,k,n,x_0}=\left[\int_0^1[g(t)]^2dt-\begin{pmatrix}c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-1}\end{pmatrix}H^{-1}\begin{pmatrix}c_0\\c_1\\\vdots\\c_{n-1}\end{pmatrix}\right](b-a)^{2n-2k-1}$$

证明是容易的, 不妨设 $a=0,b=1$(否则做换元 $x=(b-a)y+a$) 只需要利用 $cauchy$ 不等式, 直接计算就有

$$\int_0^1\left[g(t)-\begin{pmatrix}1 & t & \cdots & t^{n-1}\end{pmatrix}H^{-1}\begin{pmatrix}c_0\\c_1\\\vdots\\c_{n-1}\end{pmatrix}\right]^2dt\int_0^1\left|f^{(n)}(t)\right|^2dt\geqslant\sup_{t\in[0,1]}\left|f^{(k)}(t)\right|^2$$

$$\int_0^1\left[g(t)-\begin{pmatrix}1 & t & \cdots & t^{n-1}\end{pmatrix}H^{-1}\begin{pmatrix}c_0\\c_1\\\vdots\\c_{n-1}\end{pmatrix}\right]^2dt=C_{0,1,k,n,x_0}$$

熟知 $hilbert$ 矩阵 H^{-1} 是可求的, 上述结果亦可以显式解出.

原不等式证明:

我们让 $a=-1,b=1,k=0,1,n=2$, 则有

$$C_{-1,1,1,2,x_0}=\frac{-3x_0^4+2x_0^2+1}{8},C_{-1,1,0,2,x_0}=\frac{-x_0^6+3x_0^4-3x_0^2+1}{24}$$

容易知道

$$C_{-1,1,1,2,x_0}=\frac{-3x_0^4+2x_0^2+1}{8}\leqslant\frac{1}{6},C_{-1,1,0,2,x_0}=\frac{-x_0^6+3x_0^4-3x_0^2+1}{24}\leqslant\frac{1}{24}$$

我们完成了证明, 事实上我们还能导出如下更强的不等式

$$\sup_{x\in[a,b]}\left|f^{(k)}(x)\right|^p\leqslant C_{a,b,k,n,x_0,p}\int_a^b\left|f^{(n)}(x)\right|^pdx,0\leqslant k<n,p\geqslant 1$$

但因为笔者还要做科研, 留给有兴趣的读者完成.

Problem 47

设

$$a_1 = a_2 = 1, a_{n+2} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}}$$

证明:

(1): $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$.

(2):$b_n = \frac{a_{n+1}-\sqrt{2}}{a_n-\sqrt{2}}$ 无界.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 显然 $a_n > 0, n = 1, 2, ...,$ 注意到

$$\varlimsup_{n\to\infty} a_{n+2} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{a_{n+1}} + \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{2}{\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n}$$

故可记

$$\varlimsup_{n\to\infty} a_n = B, \varliminf_{n\to\infty} a_n = A, BA \leqslant 2$$

于是有

$$A = \varliminf_{n\to\infty} a_{n+2} = \varliminf_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant \frac{2}{B}$$

故

$$AB = 2$$

抽收敛子列知, 不妨设

$$B = \lim_{k\to\infty} a_{n_k+2}, \lim_{k\to\infty} a_{n_k+1} = l_1, \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = l_2, \lim_{k\to\infty} a_{n_k-1} = l_3$$

显然有

$$B = \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}, l_2 = \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_3}, A \leqslant l_1, l_2, l_3 \leqslant B$$

由小学不等式的性质, 显然有

$$l_1 = l_2 = A, l_2 = l_3 = B, A = B = \sqrt{2}$$

(1) 证毕.

记

$$c_n=-\frac{1}{\sqrt{2}a_n},p_n=\frac{c_{n+1}+i\sqrt{-c_{n+1}^2-4c_n}}{2},q_n=\frac{c_{n+1}-i\sqrt{-c_{n+1}^2-4c_n}}{2},y_n=\frac{1-p_1}{1-q_1}\prod_{i=1}^n\frac{q_i}{p_i}$$

注意到

$$x=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2x}$$

无实数解, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 不存在, 读者不难自行归纳证明有等式

$$b_{n+1}=\frac{p_n-q_ny_n}{1-y_n}$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}p_n-q_ny_n=\frac{\sqrt{7}}{2}i$.
显然

$$b_n\text{无界}\Leftrightarrow 2^{\frac{n}{2}-2n}\prod_{j=1}^n a_j\left(\frac{1}{a_{j+1}}+i\sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{a_j}-\frac{1}{\sqrt{2}a_j^2}}\right)^2\text{在}\mathbb{C}\text{上有聚点}\frac{5\sqrt{2}-5}{4}+\frac{\sqrt{50\sqrt{2}-59}}{4}i$$

但是我们指出 y_n 的聚点是复平面上的单位圆, 利用连分数理论, 易证明如下简单的引理:

$$\gamma\text{是无理数},\lim_{n\to+\infty}a_n=\gamma,\text{则}\left\{\sum_{t=1}^n a_t\right\}(\text{小数部分})\text{的聚点集是}[0,1]$$

考虑

$$y_n=\frac{1-p_1}{1-q_1}\prod_{j=1}^n\frac{q_j}{p_j}=e^{i\theta_0}\prod_{j=1}^n e^{i\theta_j}=e^{i\theta_0}e^{i\sum\limits_{j=1}^n\theta_j}=e^{i\theta_0}e^{2\pi i\sum\limits_{j=1}^n\frac{\theta_j}{2\pi}}$$

这里

$$\theta_0=\arg\left(\frac{1-p_1}{1-q_1}\right),\theta_j=\arg\left(\frac{q_j}{p_j}\right),j=1,2,...$$

注意到

$$\lim_{j\to+\infty}\frac{q_j}{p_j}=e^{i\left(\pi-\arctan\frac{\sqrt{7}}{3}\right)},\lim_{j\to+\infty}\frac{\theta_j}{2\pi}=\lim_{j\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\arg\frac{q_j}{p_j}=\frac{1}{2}-\frac{\arctan\frac{\sqrt{7}}{3}}{2\pi}\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$$

于是

$$\{\sum_{j=1}^n\frac{\theta_j}{2\pi}\}\text{聚点是}[0,1]$$

于是我们证明了 y_n 的聚点是复平面上的单位圆, 而 $|\frac{5\sqrt{2}-5}{4}+\frac{\sqrt{50\sqrt{2}-59}}{4}i|=1$, 我们证明了命题.

Problem 48

设 $a>0, k\in\mathbb{N}$, 令

$$J=\begin{pmatrix} a & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix}$$

证明: 存在唯一的实矩阵 A, 使得 A 特征值全为正, 且 $A^k=J$.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 记 $J_n(c)$ 是特征值为 c 的 n 阶 $jordan$ 块.

$k=1$ 时问题是显然的, 当 $k>1$ 时, 直接计算可知当 $c\neq 0, [J_n(c)]^k\sim J_n\left(c^k\right)$, 故

$$P^{-1}[J_n(a^{\frac{1}{k}})]^kP=J_n\left(a\right), A=P^{-1}J_n\left(a^{\frac{1}{k}}\right)P$$

存在性即得, 我们更强的, 证明存在这样一个 A 满足条件且是 J 的多项式, 同时给出 A 的另外一种构造方法, 即

$$A=e^{\frac{\ln J}{k}}=a^{\frac{1}{k}}e^{\frac{\ln\frac{J}{a}}{k}}=a^{\frac{1}{k}}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!k^i}(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}\left(\frac{J}{a}-I\right)^j}{j})^i=g\left(J\right)$$

这里 g 是实多项式, 且取 A 特征值为正的分支, 再证唯一性:

设若还有正特征值的矩阵 B 使得 $A^k=B^k=J_n\left(a\right)$, 由特征值为正, 和直接计算 $jordan$, 显然必有

$$B\sim J_n\left(a^{\frac{1}{k}}\right)\sim A$$

故

$$Q^{-1}BQ=A, Q^{-1}J_n\left(a\right)Q=Q^{-1}B^kQ=A^k=J_n\left(a\right)$$

故存在多项式 f 使得

$$Q=f\left(J_n\left(a\right)\right)$$

故

$$B=QAQ^{-1}=AQQ^{-1}=A$$

我们完成了证明.

Problem 49

设 $a \in \mathbb{R}$, 讨论收敛性

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sin x^a}{1+x} dx$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 当 $a > 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sin x^a}{1+x} dx \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} x^a dx = \frac{1}{a+1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{a+1}} < \infty$$

当 $a = 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{1}{1+x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \infty$$

当 $a < 0$,

漏了1/a **分部积分**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sin x^a}{1+x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n^{-a}}^{\infty} \frac{\sin y}{y^{1-\frac{1}{a}}+y} dy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n^{-a}}{n^{-a+1}+n^{-a}} - \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n^{-a}}^{\infty} \frac{\cos y \left(\left(1-\frac{1}{a}\right) y^{-\frac{1}{a}}+1\right)}{\left(y^{1-\frac{1}{a}}+y\right)^2} dy$$

而

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\cos n^{-a}}{n^{-a+1}+n^{-a}}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1-a}} < \infty$$

并有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\int_{n^{-a}}^{\infty} \frac{\cos y \left(\left(1-\frac{1}{a}\right) y^{-\frac{1}{a}}+1\right)}{\left(y^{1-\frac{1}{a}}+y\right)^2} dy\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n^{-a}}^{\infty} \frac{\left(1-\frac{1}{a}\right)}{y^{2-\frac{1}{a}}} + \frac{1}{y^{2-\frac{2}{a}}} dy = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^{1-a}} + \frac{a}{a-2} \frac{1}{n^{2-a}}\right) < \infty$$

故级数收敛当且仅当 $a \neq 0$.

Problem 50

设

$$f \in H\left(B\left(0,1\right)\right), f\left(0\right)=0, \left|Ref\left(z\right)\right|<1$$

证明

$$\left|Ref\left(z\right)\right| \leqslant \frac{4}{\pi}\arctan\left|z\right|, \left|Imf\left(z\right)\right| \leqslant \frac{2}{\pi}\ln\frac{1+\left|z\right|}{1-\left|z\right|}$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 我们断言

$$\tan\left|Rez\right| \leqslant \left|\tan z\right| < 1, \forall z \in \left\{z\in\mathbb{C}:\left|Rez\right|<\frac{\pi}{4}\right\}$$

对 $z=x+iy, |x|<\frac{\pi}{4}$, 有

$$\tan\left|Rez\right|=\tan\left|x\right|, \left|\tan z\right|=\frac{\sqrt{\sin^2\left(2x\right)+\sinh^2\left(2y\right)}}{\cos\left(2x\right)+\cosh\left(2y\right)}$$

只需断言

$$\tan x \leqslant \frac{\sqrt{\sin^2\left(2x\right)+\sinh^2\left(2y\right)}}{\cos\left(2x\right)+\cosh\left(2y\right)} < 1, \forall x\in[0,\frac{\pi}{4}), y\in\mathbb{R}$$

显然

$$\sin^2\left(2x\right)+\sinh^2\left(2y\right)-\left(\cos\left(2x\right)+\cosh\left(2y\right)\right)^2 \leqslant \sin^2\left(2x\right)-\cos^2\left(2x\right)-1-2\cos\left(2x\right)<0$$

以及

$$\sin^2\left(2x\right)+\sinh^2\left(2y\right)-\left(\cos\left(2x\right)+\cosh\left(2y\right)\right)^2\tan^2 x=\frac{2\cos\left(2x\right)}{\cos^2 x}\sinh^2 y\left(\cos\left(2x\right)+\cosh\left(2y\right)\right) \geqslant 0$$

我们完成了断言, 注意到

$$g\left(z\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}f\left(z\right)\right): B\left(0,1\right)\to B\left(0,1\right)$$

由 *schwarzs* 引理

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\left|Ref\left(z\right)\right|\right) \leqslant \left|g\left(z\right)\right| \leqslant \left|z\right|, \left|Ref\left(z\right)\right| \leqslant \frac{4}{\pi}\arctan\left|z\right|$$

我们完成了第一部分证明, 第二部分是类似的, 因为右边实际上是反双曲正切, 留作读者训练.

Problem 51

如果 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 递增函数, 且 $f(+\infty)=0$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} f\left(x\right)\sin\left(nx\right)dx=0$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 本题是竞赛班学员所问, 不过并非使用黎曼引理, 因为 f 缺乏可积性.

也并非直接使用第二积分中值定理，因为是广义积分.

显然

$$\int_0^{+\infty} f\left(x\right)\sin\left(nx\right)dx\text{收敛}$$

这里给出做法:

证法 (1): 课内强调过, 分部积分具有提升阶的作用, 但对函数有较好的性态要求, 当然函数有不好的性态时, 利用 $R-S$ 积分工具能一定程度上代替, 即:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f\left(x\right)\sin\left(nx\right)dx&=-\lim_{s\to+\infty}\frac{1}{n}\int_0^{s} f\left(x\right)d\cos\left(nx\right)\\&=\lim_{s\to+\infty}-\frac{f\left(s\right)\cos\left(ns\right)-f\left(0\right)\cos\left(0\right)}{n}+\frac{1}{n}\int_0^{s}\cos\left(nx\right)df\left(x\right)\\&=\frac{f\left(0\right)\cos\left(0\right)}{n}+\frac{1}{n}\lim_{s\to+\infty}\int_0^{s}\cos\left(nx\right)df\left(x\right)\end{aligned}\tag{1}$$

注意到

$$\lim_{s\to+\infty}\left|\int_0^{s}\cos\left(nx\right)df\left(x\right)\right|\leqslant\lim_{s\to+\infty}\int_0^{s}\left|df\left(x\right)\right|=\lim_{s\to+\infty}f\left(s\right)-f\left(0\right)=-f\left(0\right)$$

故令 $n\to+\infty$, 我们完成了证明.

证法 (2): 由于本题是基础题, 常规的分段估计求和, 留作读者练习.

Problem 52

证明

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}=0$$

Proof. 注意到

$$\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}\right)^2\leqslant\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k+1}=\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k+1}=\frac{1}{2n+1}$$

故

$$0\leqslant\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}\right)^2\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}=0$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}=0$$

Problem 53

设 A, B 是 n 阶实矩阵,λ 是 AB 任一特征值, 证明

$$\lambda_{\min}\left(A^T A\right)\lambda_{\min}\left(B^T B\right) \leqslant |\lambda|^2 \leqslant \lambda_{\max}\left(A^T A\right)\lambda_{\max}\left(B^T B\right)$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 我们设

$$ABa = \lambda a, |a| = 1$$

则

$$a^\star B^T A^T = \bar{\lambda} a^\star$$

故有

$$a^\star B^T A^T ABa = |\lambda|^2 a^\star a \geqslant \lambda_{\min}\left(A^T A\right) a^\star B^T Ba \geqslant \lambda_{\min}\left(A^T A\right)\lambda_{\min}\left(B^T B\right) a^\star a$$

从而

$$\lambda_{\min}\left(A^T A\right)\lambda_{\min}\left(B^T B\right) \leqslant |\lambda|^2$$

类似可证另外一半不等式, 我们完成了证明.

Problem 54

求

$$a_{n+1} = a_n^3 - 3a_n, a_1 = 3$$

通项.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 我们断言

$$a_n = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{3^{n-1}} + \left(\frac{2}{3+\sqrt{5}}\right)^{3^{n-1}}$$

事实上

$$a_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{3+\sqrt{5}} = 3$$

归纳并经过简单的代数运算即证.

Problem 55

设 A,B 是 n 阶实矩阵,λ 是 AB 任一特征值, 证明

$$\lambda_{\min}\left(A^TA\right)\lambda_{\min}\left(B^TB\right)\leqslant|\lambda|^2\leqslant\lambda_{\max}\left(A^TA\right)\lambda_{\max}\left(B^TB\right)$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 我们设

$$ABa=\lambda a,|a|=1$$

则

$$a^\star B^TA^T=\bar{\lambda}a^\star$$

故有

$$a^\star B^TA^TABa=|\lambda|^2a^\star a\geqslant\lambda_{\min}\left(A^TA\right)a^\star B^TBa\geqslant\lambda_{\min}\left(A^TA\right)\lambda_{\min}\left(B^TB\right)a^\star a$$

从而

$$\lambda_{\min}\left(A^TA\right)\lambda_{\min}\left(B^TB\right)\leqslant|\lambda|^2$$

类似可证另外一半不等式, 我们完成了证明.

Problem 56

设

$$S=\left\{f(x)\in C[0,1]:\int_{x^2}^{x}f(t)\,dt\geqslant\frac{x^2-x^4}{2},\forall x\in[0,1]\right\}$$

计算

$$\inf_{f(x)\in S}\int_0^1 f^2(x)\,dx$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 令 $f(x)=x\in S$, 有

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$$

进一步对 $f(x)\in S$, 令

$$g(x)=\int_x^1 f(y)\,dy+\frac{x^2}{2}$$

有　**直接相减得**

$$g(x)\geqslant g\left(x^{\frac{1}{2}}\right),\forall x\in[0,1],g(1)=\frac{1}{2}$$

于是

$$g(x)\geqslant g\left(x^{\frac{1}{2}}\right)\geqslant g\left(x^{\frac{1}{4}}\right)...\geqslant g\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right),\forall n\geqslant 1,x\in(0,1]$$

因此

$$g(x)\geqslant g(1),\forall x\in(0,1]$$

故

$$\int_x^1 f(t)\,dt\geqslant\frac{1-x^2}{2},\forall x\in[0,1]$$

于是

柯西+化简

$$\sqrt{\int_0^1 t^2dt\int_0^1 f^2(t)\,dt}\geqslant\int_0^1 dx\int_x^1 f(t)\,dt=\int_0^1 tf(t)\,dt\geqslant\int_0^1\frac{1-x^2}{2}dx=\frac{1}{3},\forall x\in[0,1]$$

至此, 我们有

$$\inf_{f(x)\in S}\int_0^1 f^2(x)\,dx=\frac{1}{3}$$

Problem 57

设 $a_{n+1}=\sqrt{1+a_n},a_1=1$, 证明 $\exists c,\ell>0$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} c^n\left(\ell-a_n\right)\text{存在且非}0$$

Proof. (By 清疏竞赛数学) 显然 a_n 递增趋于 $\ell=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, 注意到

$$\ell-a_{n+1}=\frac{\ell-a_n}{\sqrt{1+\ell}+\sqrt{1+a_n}},\lim_{n\to\infty}\frac{\ell-a_{n+1}}{\ell-a_n}=\frac{1}{2\ell}$$

以及

$$a_{n+1}=\sqrt{1+\ell}\sqrt{1+\frac{a_n-\ell}{1+\ell}}=\ell\left(1+\frac{a_n-\ell}{2\left(1+\ell\right)}\right)+O\left(\left(a_n-\ell\right)^2\right)$$

故

$$\left(2\ell\right)^n\left(\ell-a_{n+1}\right)=\left(2\ell\right)^{n-1}\left(\ell-a_n\right)+\left(2\ell\right)^nO\left(\left(a_n-\ell\right)^2\right)$$

从而

$$\left(2\ell\right)^n\left(\ell-a_{n+1}\right)=\ell-1+\sum_{k=1}^{n}\left(2\ell\right)^kO\left(\left(a_k-\ell\right)^2\right)$$

注意到

这说明后面那一堆收敛

$$|\left(2\ell\right)^kO\left(\left(a_k-\ell\right)^2\right)|\leqslant M\left(2\ell\right)^k\left(\ell-a_k\right)^2,\lim_{k\to\infty}\frac{\left(2\ell\right)^{k+1}\left(\ell-a_{k+1}\right)^2}{\left(2\ell\right)^k\left(\ell-a_k\right)^2}=\frac{2\ell}{\left(2\ell\right)^2}=\frac{1}{2\ell}<1$$

故有

$$\lim_{n\to\infty}\left(2\ell\right)^n\left(\ell-a_n\right)\text{存在}$$

Problem 58

$f(x)\in C^4[a,b]$, 证明:

(1):

$$\left|\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,dx-\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\,dx\right|\leqslant\frac{1}{4}(b-a)\left|f(b)-f(a)\right|+\frac{\sup\limits_{x\in[a,b]}\left|f^{(3)}(x)\right|}{192}(b-a)^4$$

(2): 若还有 $f'\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$, 则

$$\left|\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,dx-\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\,dx\right|\leqslant\frac{1}{8}(b-a)\left|f(b)-f(a)\right|+\frac{\sup\limits_{x\in[a,b]}\left|f^{(4)}(x)\right|}{2880}(b-a)^5$$

Proof. (By 清疏竞赛数学) 记 $c=\frac{a+b}{2}$.

本部分的第一问来自美国数学月刊平凡的加强, 第二问是一点平凡的小推广, 由 K 值法, 容易证明

$$f(x)=\frac{(x-c)(x-b)}{(a-c)(a-b)}f(a)+\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}f(b)+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}f(c)+\frac{f'''(\theta)(x-a)(x-b)(x-c)}{6}$$

以及

$$\begin{aligned}f(x)=&\frac{(x-c)(x-b)}{(a-c)(a-b)}f(a)+\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}f(b)+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}f(c)\\&-\frac{4\left[f(a)-f(b)\right]}{(b-a)^3}(x-a)(x-b)(x-c)+\frac{f^{(4)}(\theta)(x-a)(x-b)(x-c)^2}{24}\end{aligned}\tag{2}$$

直接计算有

$$\begin{aligned}&\int_a^c\left[\frac{(x-c)(x-b)}{(a-c)(a-b)}f(a)+\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}f(b)+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}f(c)\right]dx=\frac{b-a}{24}\left(5f(a)+8f(c)-f(b)\right)\\&\int_c^b\left[\frac{(x-c)(x-b)}{(a-c)(a-b)}f(a)+\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}f(b)+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}f(c)\right]dx=\frac{b-a}{24}\left(5f(b)+8f(c)-f(a)\right)\\&\int_a^b(x-a)(b-x)\left|(x-c)\right|dx=\frac{(b-a)^4}{32}\\&\int_a^c(x-a)(x-b)(x-c)\,dx=\frac{(b-a)^4}{64}\\&\int_c^b(x-a)(x-b)(x-c)\,dx=-\frac{(b-a)^4}{64}\\&\int_a^b(x-a)(b-x)\left|(x-c)\right|^2dx=\frac{(b-a)^5}{120}\end{aligned}\tag{3}$$

故有

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,dx-\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\,dx\right|\\
&\leqslant\left|\frac{b-a}{4}\left[f(a)-f(b)\right]\right|+\int_a^b\frac{\left|f'''(\theta)\right|}{6}(x-a)(b-x)\left|(x-c)\right|dx\\
&=\frac{1}{4}(b-a)\left|f(b)-f(a)\right|+\frac{\sup\limits_{x\in[a,b]}\left|f^{(3)}(x)\right|}{192}(b-a)^4\\
&\left|\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,dx-\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\,dx\right|\\
&\leqslant\left|\frac{1}{8}(b-a)\left[f(a)-f(b)\right]\right|+\int_a^b\frac{\left|f^{(4)}(\theta)\right|}{24}(x-a)(b-x)\left|(x-c)\right|^2dx\\
&=\frac{1}{8}(b-a)\left|f(b)-f(a)\right|+\frac{\sup\limits_{x\in[a,b]}\left|f^{(4)}(x)\right|}{2880}(b-a)^5
\end{aligned}\tag{4}$$

我们完成了证明.

Problem 59

证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{1}\sqrt[nx]{n}dx=1$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 注意到

$$\frac{n+\sum\limits_{k=2}^{n}1}{n}\leqslant\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}n^{\frac{1}{k}}}{n}\leqslant\frac{n+\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{2\sqrt{n}+(k-2)}{k}}{n}=1+\frac{2\sqrt{n}\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{k}+(n-1)-2\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{k}}{n}$$

利用

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{k}}{\ln n}=1$$

我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}n^{\frac{1}{k}}}{n}=2$$

又

$$1+\frac{\int_1^n n^{\frac{1}{x}}dx}{n}=1+\frac{\sum\limits_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}n^{\frac{1}{x}}dx}{n}\geqslant\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}n^{\frac{1}{k}}}{n}\geqslant 1+\frac{\sum\limits_{k=2}^{n-1}\int_{k}^{k+1}n^{\frac{1}{x}}dx}{n}=1+\frac{\int_2^n n^{\frac{1}{x}}dx}{n}$$

注意到

差个常数倍

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_1^2 n^{\frac{1}{x}}dx}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\int_1^2\frac{1}{x^2}n^{\frac{1}{x}}dx}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-\sqrt{n}}{n\ln n}=0$$

故我们得到

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{1}\sqrt[nx]{n}dx=1$$

Problem 60

设

$$f(x) \in C^6[a,b], f(a) = -f(b), f\left(\frac{2a+b}{3}\right) = -f\left(\frac{a+2b}{3}\right), f'\left(\frac{2a+b}{3}\right) = f'\left(\frac{a+2b}{3}\right)$$

证明

$$\left|\int_a^{\frac{2a+b}{3}} f(x)\,dx + \int_{\frac{a+2b}{3}}^{b} f(x)\,dx - \int_{\frac{2a+b}{3}}^{\frac{a+2b}{3}} f(x)\,dx\right| \leqslant \frac{19}{24494400} \sup_{x\in[a,b]} \left|f^{(6)}(x)\right| (b-a)^7$$

PROOF. (*By* 清疏竞赛数学)

Problem 61

设 $S=\{f(x)\in C^1[0,1]:f(0)=f(1)=0\}$, 证明

$$|f(x)|^2\leqslant\frac{1}{2}\tanh\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^1[f(y)+f'(y)]^2\,dy,\forall f(y)\in S$$

并说明是最佳的系数.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 我们记

$$|f(x_0)|=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$$

取

$$g(x)=\begin{cases}\frac{e^{2x_0}-1}{e^{2+x_0}-e^{x_0}}e^x & x_0\leqslant x\leqslant 1\\ \frac{e^{2x_0}-e^2}{e^{2+x_0}-e^{x_0}}e^x & 0\leqslant x\leqslant x_0\end{cases}$$

直接计算有

$$\int_0^1 g^2(y)\,dy\int_0^1[f(y)+f'(y)]^2\,dy\geqslant\left|\int_0^1 g(y)f(y)+g(y)f'(y)\,dy\right|^2=|f(x_0)|^2$$

以及

$$\int_0^1 g^2(y)\,dy=\frac{e^{2+2x_0}-e^2-e^{4x_0}+e^{2x_0}}{2e^{2+2x_0}-2e^{2x_0}}$$

故

$$|f(x)|^2\leqslant\frac{e^{2+2x_0}-e^2-e^{4x_0}+e^{2x_0}}{2e^{2+2x_0}-2e^{2x_0}}\int_0^1[f(y)+f'(y)]^2\,dy\leqslant\frac{1}{2}\tanh\frac{1}{2}\int_0^1[f(y)+f'(y)]^2\,dy$$

我们完成了证明, 事实上当

$$f(x)=\begin{cases}\frac{e^{\frac{1}{2}-x}\left(e^{2x}-1\right)}{2e+2} & 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\\ \frac{e^{-x}\left(e^{2x}-e^2\right)}{2e^{\frac{3}{2}}+2e^{\frac{1}{2}}} & \frac{1}{2}<x\leqslant 1\end{cases}$$

等号成立. 虽然 $f(x)\notin C^1[0,1]$ 但是

$$f(x)\in C[0,1]\bigcap W_0^{1,2}(0,1)$$

由基本的逼近常识知上述不等式的界也是最佳的.

事实上我们同样可以证明

$$\left|f\left(x\right)\right|^{2}\leqslant\frac{1}{2}\tanh\left(\frac{1}{2}\right)\int_{0}^{1}\left[\left|f\left(y\right)\right|+\left|f'\left(y\right)\right|\right]^{2}dy,\forall f\left(y\right)\in S$$

Problem 62

严格证明
$$\int_0^{\infty} e^{-n(x-\ln(1+x))}dx=\sqrt{\frac{\pi}{2n}}+\frac{2}{3n}+\frac{\sqrt{2\pi}}{24n^{\frac{3}{2}}}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 显然

$$\int_a^b e^{-n(x-\ln(1+x))}dx=o\left(\frac{1}{n^k}\right),\forall k\geqslant 1,b>a>0$$

因此, 再结合

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\ln(1+x)}{x}=1$$

就有
$$\int_a^{\infty} e^{-n(x-\ln(1+x))}dx=o\left(\frac{1}{n^k}\right),\forall k\geqslant 1,a>0$$

因此问题是局部的, 考虑 $f(z)=z-\ln(1+z)$, 这里 $\ln(1+z)$ 是划破复平面 $(-\infty,-1]$ 所确定的单值解析函数, 且有展开
$$f(z)=\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}...,\forall|z|<\frac{1}{2}$$

由拉格朗日反演, 存在正数 $\delta,\eta>0$, 使得在闭区域 $|w|\leqslant\delta,|\arg(w)|\leqslant\pi-\eta$ 内存在 $w=f(z)$ 的反函数 (在 x 轴上取实值的那一支) 在该区域内解析, 且有

$$z(w)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}}\left\{\frac{\zeta^n}{f(\zeta)^{\frac{n}{2}}}\right\}_{\zeta=0}w^{\frac{n}{2}}=\sqrt{2w}+\frac{2}{3}w+\frac{\sqrt{2}}{18}w^{\frac{3}{2}}+O\left(w^2\right)$$

于是
$$z'(w)=\frac{1}{\sqrt{2w}}+\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{2w}}{12}+O(w)$$

取 a 充分小, 有
$$|\int_0^{\infty}e^{-nw}O(w)\,dw|\leqslant\int_0^{\infty}e^{-nw}wdw=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

从而
$$\int_0^{\infty} e^{-n(x-\ln(1+x))}dx=\sqrt{\frac{\pi}{2n}}+\frac{2}{3n}+\frac{\sqrt{2\pi}}{24n^{\frac{3}{2}}}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Problem 63

若 $x_{n+1}=\sin x_n, x_1=x>0$, 计算

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^3}{x}$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 显然有 x_n 单调递减且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$, 且有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}x_n=\sqrt{3}$.
故 $g(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^3$ 存在.
显然有 $g(x)-g(\sin x)=x^3$. 我们断言一个更强的结果, 若

$$f(x)-f(\sin x)=Ax^3+o\left(x^3\right)$$

则有

$$f(x)=6Ax+o(x)$$

不妨设 $A=0$, 否则用 $f(x)-6Ax$ 代替, 事实上 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 使得当 $0<|x|<\delta$ 时, 有

$$|f(x)-f(\sin x)|<\varepsilon|x|^3$$

不妨设 $x>0$, 于是此时

$$|f(x)|=\sum_{n=1}^{\infty}|f(x_n)-f(x_{n+1})|\leqslant\varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}|x_n^3|$$

注意到不等式

$$\sin\frac{2}{\sqrt{n}}\leqslant\frac{2}{\sqrt{n+1}}, n=1,2,...$$

于是

$$\exists n_0\geqslant 1, x_n\leqslant\frac{2}{\sqrt{n+n_0}}, n=1,2,..$$

这里 $n_0=\left[\left(\frac{2}{x}-1\right)^2\right]$, 因此有

$$|f(x)|\leqslant\varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{(n_0+n)^{\frac{3}{2}}}\leqslant 8\varepsilon\int_0^{\infty}\frac{1}{(n_0+x)^{\frac{3}{2}}}dx=\frac{16}{\sqrt{n_0}}\varepsilon$$

故

$$|f(x)|\leqslant\frac{16}{\sqrt{n_0}}\varepsilon\leqslant\frac{1}{\sqrt{n_0x^2}}16|x|\varepsilon\leqslant C\varepsilon|x|$$

我们完成了证明, 故原极限答案为 6.

Problem 64

第十三届大学生数学竞赛数学类 a 组多项式证明.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 设 x_i 是全体实根, 显然非 0, 显然注意到

$$\left(40^2+2\times 40\right)^2 \geqslant \sum_{i=1}^{2021} x_i^2 \sum_{i=1}^{2021} \frac{1}{x_i^2} \geqslant 2021^2$$

矛盾, 这里

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = a_{2020}^2 - 2a_{2019}, \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2} = \frac{a_1^2}{a_0^2} - \frac{2a_2}{a_0}$$

是根与系数的关系, 我们完成了证明.

Problem 65

设 B_1 是三维空间中的单位球面, 已知

$$f(x,y,z) = a_1x^4 + a_2y^4 + a_3z^4 + 3a_4x^2y^2 + 3a_5y^2z^2 + 3a_6x^2z^2$$

计算

$$\int_{B_1} f(x,y,z)\,dS$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 注意到曲面积分的正交变换不变形, 我们有

$$\int_{B_1} \zeta^4 dS = \int_{B_1} [e^{\frac{\pi}{4}i}\xi]^4 dS = -\int_{B_1} \xi^4 dS = 0$$

$$\zeta = x + y\sqrt{-1}, \int_{B_1} \zeta^4 dS = 0 = \int_{B_1} x^4 + y^4 + 4\sqrt{-1}x^3y - 4\sqrt{-1}xy^3 - 6x^2y^2 dS$$

$$\int_{B_1} x^2y^2 dS = \frac{1}{6}\int_{B_1} x^4 + y^4 dS = \frac{1}{9}\int_{B_1} x^4 + y^4 + z^4 dS$$

$$\int_{B_1} f(x,y,z)\,dS = \frac{\sum_{i=1}^6 a_i}{3}\int_{B_1} x^4 + y^4 + z^4 dS$$

$$\int_{B_1} x^4 + y^4 + z^4 dS = \int_{B_1} 1 - 6x^2y^2 dS = 4\pi - \frac{2}{3}\int_{B_1} x^4 + y^4 + z^4 dS$$

$$\int_{B_1} x^4 + y^4 + z^4 dS = \frac{12\pi}{5}$$

$$\int_{B_1} f(x,y,z)\,dS = \frac{4\pi}{5}\sum_{i=1}^6 a_i$$

Problem 66

若

$$\lim_{n\to\infty} n^{k+1}\sin\left(2\pi\left(n!e-\sum_{i=0}^{k}\frac{a_i}{n^i}\right)\right) \text{存在}$$

计算

$$a_0, a_1, ..., a_k$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学)

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} n^{k+1}\sin\left(2\pi\left(n!e-\sum_{i=0}^{k}\frac{a_i}{n^i}\right)\right)\\
&=\lim_{n\to\infty} n^{k+1}\sin\left(2\pi\left(n!\sum_{i=0}^{n+k+1}\frac{1}{i!}-\sum_{i=0}^{k}\frac{a_i}{n^i}\right)+\frac{2\pi e^{\theta}}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k+2)}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty} n^{k+1}\sin\left(2\pi\left(\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{(n+1)\ldots(n+i)}-\sum_{i=0}^{k}\frac{a_i}{n^i}\right)+\frac{2\pi e^{\theta}}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k+2)}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty} n^{k+1}\sin\left(\sum_{i=1}^{k+1}\frac{2\pi}{(n+1)\ldots(n+i)}-2\pi\sum_{i=0}^{k}\frac{a_i}{n^i}\right)
\end{aligned}\tag{5}$$

故问题等价于寻求如下渐进

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{(n+1)\ldots(n+i)}=\sum_{i=0}^{k}\frac{a_i}{n^i}+O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right)$$

事实上

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(n+1)\ldots(n+i)}&=\sum_{j=1}^{i}\frac{A_{i,j}}{n+j}\\
&=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{i}\frac{A_{i,j}}{1+\frac{j}{n}}\\
&=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{i}A_{i,j}[\sum_{\ell=0}^{k-1}(-1)^{\ell}\frac{j^{\ell}}{n^{\ell}}+O\left(\frac{1}{n^k}\right)]\\
&=\sum_{\ell=0}^{k-1}\frac{(-1)^{\ell}}{n^{\ell+1}}\sum_{j=1}^{i}A_{i,j}j^{\ell}+O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right)
\end{aligned}\tag{6}$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+i)}&=\sum_{i=1}^{k}\sum_{\ell=0}^{k-1}\frac{(-1)^{\ell}}{n^{\ell+1}}\sum_{j=1}^{i}A_{i,j}j^{\ell}+O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right)\\&=\sum_{j=1}^{k}\sum_{\ell=0}^{k-1}\frac{(-1)^{\ell}}{n^{\ell+1}}\sum_{i=j}^{k}A_{i,j}j^{\ell}+O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right)\\&=\sum_{\ell=0}^{k-1}\frac{(-1)^{\ell}}{n^{\ell+1}}\sum_{j=1}^{k}j^{\ell}\sum_{i=j}^{k}A_{i,j}+O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right)\\&=\sum_{\ell=1}^{k}\frac{(-1)^{\ell-1}}{n^{\ell}}\sum_{j=1}^{k}j^{\ell-1}\sum_{i=j}^{k}A_{i,j}+O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right)\end{aligned}\tag{7}$$

故

$$a_0\in\mathbb{Z},a_{\ell}=(-1)^{\ell-1}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=j}^{k}A_{i,j}j^{\ell-1},A_{i,j}=\frac{(-1)^{i-1}}{(j-1)(j-2)(j-(j-1))\dots(j-(j+1))\dots(j-i)}$$

这里 $\ell=1,2,...,k$. 事实上我们还能计算 $a_{\ell},\ell=0,1,2,...,k$ 的生成幂级数, 考虑到明天可能没素材, 留到明天完成.

Problem 67

$$\lim_{n\to\infty} n^{k+1}\sin\left(2\pi\left(n!e-\sum_{i=0}^{k}\frac{a_i}{n^i}\right)\right) \text{存在}$$

证明

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_{k+1}}{k!}x^k=e^{1-x-e^{-x}}$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 正如上一推文所说

$$a_{k+1}=\sum_{j=1}^{k}(-j)^k\sum_{i=j}^{k+1}\prod_{\ell\neq j,1\leqslant\ell\leqslant i}\frac{1}{\ell-j}$$

$$f(x)=e^{1-x-e^{-x}}, f'(x)=\left(-1+e^{-x}\right)f(x)$$

故

$$f(0)=1=a_1, f'(0)=0=a_2, f^{(k)}(0)=\sum_{j=1}^{k-1}C_{k-1}^{j}(-1)^{k-j}f^{(j-1)}(0), \forall k\geqslant 2$$

注意到

$$\sum_{j=1}^{k}(-j)^k\sum_{i=j}^{k+1}\prod_{\ell\neq j,1\leqslant\ell\leqslant i}\frac{1}{\ell-j}$$

满足递推

$$a_{k+1}=(-1)^{k+1}\sum_{t=0}^{k-1}C_k^{t+1}(-1)^{t+1}a_{t+1}, \forall k\geqslant 1$$

于是我们完成了证明.

Problem 68

1

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 正如上一推文所说

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{(n+1)\dots(n+i)} = \sum_{i=1}^{k+1} \frac{a_i}{n^i} + O\left(\frac{1}{n^{k+2}}\right)$$

Problem 69

设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 连续下凸函数, 证明:

$$\int_0^1 x(1-x)f(x)\,dx \leqslant \frac{1}{6}\int_0^1 f(x)\,dx$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 当 $f(x)$ 二阶连续可微时, 我们有:

$$\int_0^1 x(1-x)f(x)\,dx - \frac{1}{6}\int_0^1 f(x)\,dx = -\frac{1}{12}\int_0^1 [x(1-x)]^2 f''(x)\,dx \leqslant 0$$

一般情况令

$$j(x) = \begin{cases} \frac{1}{\int_{-1}^1 e^{-\frac{1}{1-x^2}}dx} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geqslant 1 \end{cases}, j_\delta(x) = \frac{1}{\delta} j\left(\frac{x}{\delta}\right)$$

在 $[0,1]$ 外补充定义使得 f 仍然下凸, 令

$$f_\delta(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) j_\delta(y)\,dy \in C^\infty(\mathbb{R})$$

故

$$\int_0^1 x(1-x)f_\delta(x)\,dx \leqslant \frac{1}{6}\int_0^1 f_\delta(x)\,dx$$

注意

$$p(x) \geqslant 0, \lim_{\delta\to 0} |\int_0^1 p(x)[f_\delta(x) - f(x)]dx| = \lim_{\delta\to 0} ||f_\delta - f||_{L^1([0,1],p)} = 0$$

于是令 δ 趋于 0, 我们完成了证明.

Problem 70

计算

$$\lim_{t\to0^+}\frac{\iint_{\sin t\leqslant x^2+y^2\leqslant t}[e^{\left(x^2+y^2\right)^2}-1]dxdy}{\left(\tan^2 t-\sin^2 t\right)t}$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学)

$$\begin{aligned}\lim_{t\to0^+}\frac{\iint_{\sin t\leqslant x^2+y^2\leqslant t}[e^{\left(x^2+y^2\right)^2}-1]dxdy}{\left(\tan^2 t-\sin^2 t\right)t}&=\lim_{t\to0^+}\frac{\int_{\sqrt{\sin t}}^{\sqrt{t}}dr\int_{x^2+y^2=r^2}[e^{r^4}-1]ds}{t^5}\\&=2\pi\lim_{t\to0^+}\frac{\int_{\sqrt{\sin t}}^{\sqrt{t}}r\left(e^{r^4}-1\right)dr}{t^5}\\&=\pi\lim_{t\to0^+}\frac{\int_{\sin t}^{t}\left(e^{r^2}-1\right)dr}{t^5}\\&=\pi\lim_{t\to0^+}\frac{e^{t^2}-1-\cos t\left(e^{\sin^2 t}-1\right)}{5t^4}\\&=\frac{\pi}{6}\end{aligned}\tag{8}$$

Problem 71

设 $f(x) \in C^1(\mathbb{R})$ 且满足

$$|f'(x) - f'(y)| \leqslant M_1 |x-y|, \ |f(x)| \leqslant M_0$$

证明

$$|f'(x)| \leqslant \sqrt{2M_0M_1}$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 记

$$j(x) = \begin{cases} \frac{1}{\int_{-1}^{1} e^{\frac{1}{x^2-1}} dx} e^{\frac{1}{x^2-1}} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geqslant 1 \end{cases}, \ j_\delta(x) = \frac{1}{\delta} j\left(\frac{x}{\delta}\right)$$

令

$$f_\delta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) j_\delta(x-y)\, dy \in C^\infty(\mathbb{R})$$

我们有

$$|f_\delta(x)| \leqslant M_0 \int_{-\infty}^{+\infty} j_\delta(x-y)\, dy = M_0$$

并且

$$f_\delta'(x) = \frac{1}{\delta} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) j_\delta'(x-y)\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(y) j_\delta(x-y)\, dy$$

于是我们有

$$|f_\delta'(x) - f_\delta'(z)| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x-\delta y) - f'(z-\delta y)| j(y)\, dy \leqslant M_1 |x-z|$$

于是我们有 $|f_\delta''(x)| \leqslant M_1$, 由 taylor 公式

$$f_\delta\left(x \pm \sqrt{\frac{2M_0}{M_1}}\right) = f_\delta(x) \pm f_\delta'(x)\sqrt{\frac{2M_0}{M_1}} + \frac{f_\delta''(\theta_\pm)}{2}\frac{2M_0}{M_1}, \ \theta_\pm \in \mathbb{R}$$

两式做差解出导数项并利用绝对值不等式有

$$|f_\delta'(x)| \leqslant \sqrt{2M_1M_0}$$

显然有

$$\lim_{\delta\to0^+} f_\delta\left(x\right)=f\left(x\right),\ \lim_{\delta\to0^+} f'_\delta\left(x\right)=f'\left(x\right)$$

我们完成了证明.

Problem 72

设非 0 实对称矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 满足

$$a_{ij}\in\{0,-1\}\,,\ \forall i\neq j,\ \sum_{i=1}^{n}a_{ij}=0,\ \forall j=1,2,...,n$$

证明

$$\lambda_{\max}(A)\geqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}a_{ii}+1$$

这里 $\lambda_{\max}(A)$ 表示 A 的最大特征值.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 事实上交换行列是正交变换, 且只带来对角元的顺序改变, 因此我们不妨设

$$a_{11}=\max_{1\leqslant i\leqslant n}a_{ii},\ a_{1j}=\begin{cases}t-1 & j=1\\ -1 & 2\leqslant j\leqslant t\\ 0 & t<j\leqslant n\end{cases},\ 2\leqslant\ t\leqslant n$$

事实上对 $x=(x_1,x_2,...,x_n)^t\in\mathbb{R}^n$, $x_1^2+x_2^2...+x_n^2=1$, 我们有

$$\begin{aligned}
x^TAx &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j \\
&= \sum_{i=1}^{n}a_{ii}x_i^2+\sum_{i\neq j}a_{ij}x_ix_j \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}a_{ij}x_i^2+\sum_{i\neq j}a_{ij}x_ix_j \\
&= -\sum_{i\neq j}a_{ij}x_i^2+\sum_{i\neq j}a_{ij}x_ix_j \\
&= \sum_{i\neq j}a_{ij}x_i\left(x_j-x_i\right) \\
&= \sum_{i\neq j}a_{ji}x_j\left(x_i-x_j\right) \\
&= -\sum_{i\neq j}a_{ij}x_j\left(x_j-x_i\right) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}a_{ij}\left(x_j-x_i\right)^2 \\
&\geqslant -\sum_{j=2}^{t}a_{1j}\left(x_j-x_1\right)^2 \\
&= \sum_{j=2}^{t}\left(x_j-x_1\right)^2
\end{aligned} \tag{9}$$

令 $x_1=-\sqrt{\frac{t-1}{t}}$, $x_2=x_3...=x_t=\frac{1}{\sqrt{t^2-t}}$, $x_{t+1}=x_{t+2}...=x_n=0$, 于是有

$$\lambda_{\max}\left(A\right)\geqslant x^TAx\geqslant t=t-1+1=a_{11}+1=\max_{1\leqslant i\leqslant n}a_{ii}+1$$

我们完成了证明.

Problem 73

设 $p(x)$ 是 $\mathbb{C}$ 上的多项式, 且满足

$$P|_{\mathbb{Q}}:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}\text{ 是满射}$$

证明:

$p(x)$ 是 $\mathbb{Q}$ 上的一次多项式.

Proof. *(By 清疏竞赛数学)* 显然 $p(x)$ 是 $\mathbb{Q}$ 上的多项式 (取一些有理点解方程就能在 $\mathbb{Q}$ 上确定好系数), 进一步, 不妨设 $p(x)$ 是整系数多项式, $\deg p(x)>1$. 设 $p(x)$ 的首系数不含有素因子 $q>1$, 记

$$p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0$$

显然由艾森斯坦判别法的推广

$$qa_nx^n+qa_{n-1}x^{n-1}+...qa_1x+(a_0q-1)$$

是 $\mathbb{Q}$ 上不可约，故无有理根, 故此时 $p(x)=\frac{1}{q}$ 无解, 由 q 任意性,$p(x)$ 首系数必然含有任何素因子, 这是矛盾的. 当 $\deg p(x)=1$, 此时显然满足题目条件, 我们完成了证明.

Problem 74

设 $a_n \in (0,1)$ 是 $x^n + x = 1$ 的根, 证明: 如下渐进成立

$$a_n \sim 1 - \frac{\ln n - \ln\ln n}{n} - \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{m!}\left[{k+m \atop k+1}\right]\frac{(\ln\ln n)^m(\ln n)^{-k-m}}{n}$$

这里 $\left[{k+m \atop k+1}\right]$ 是 stirling cycle mumber.

Proof. *(By 清疏竞赛数学)* 事实上由

$$t_n = 1 - a_n,\ n = \frac{\ln(t_n)}{\ln(1-t_n)}$$

容易知道 $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 0$, 以及

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{nt_n}{\ln n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{t_n\ln t_n}{\ln(1-t_n)}}{\ln\frac{\ln t_n}{\ln(1-t_n)}} \\
&= \lim_{x\to0^+}\frac{x\ln x}{\ln(1-x)\ln\frac{\ln x}{\ln(1-x)}} \\
&= -\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\ln(-\ln x)-\ln(-\ln(1-x))} \\
&= -\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\frac{\ln(-\ln x)}{\ln x}-\frac{\ln(-\ln(1-x))}{\ln x}} \\
&= 1
\end{aligned} \tag{10}$$

于是有 $t_n = \frac{\ln n}{n} + \frac{\ln n}{n}o(1)$.

注意到 $\frac{t_n}{\ln t_n} = -\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$, 设 $w(x): [-\frac{1}{e}, +\infty) \to [-1, +\infty)$ 是 xe^x 在 $[-1, +\infty)$ 的反函数 (lambert W 函数), 熟知有渐进展开

$$w(n) \sim \ln n - \ln\ln n + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{m!}\left[{k+m \atop k+1}\right](\ln\ln n)^m(\ln n)^{-k-m}$$

于是有

$$\begin{aligned} t_n &= \left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right) w\left(\frac{1}{\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)}\right) \\ &= \left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right) w\left(\frac{n}{1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}\right) \\ &= \frac{1}{n} w\left(\frac{n}{1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}\right) + O\left(\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}\right) \\ &\sim \frac{\ln n - \ln\ln n}{n} + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{m!} \left[{k+m \atop k+1}\right] \frac{(\ln\ln n)^m (\ln n)^{-k-m}}{n} \end{aligned} \tag{11}$$

我们可以给出

$$t_n = \frac{\ln n - \ln\ln n}{n} + \frac{\ln\ln n}{n\ln n} + \frac{\ln\ln n\,(\ln\ln n - 2)}{2n\ln^2 n} + o\left(\frac{1}{n\ln^2 n}\right)$$

Problem 75

证明

$$\lim_{x\to1^-}\sum_{n=1}^{\infty}x^{n^2}-\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-x}}=\frac{1}{2}$$

PROOF. (*By* 清疏竞赛数学) 记

$$b(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12},\ x\in[0,1),\ b(x+1)=b(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$$

直接计算可以得到恒等式

$$\sum_{n=0}^{m}x^{n^2}=\int_0^m x^{y^2}dy+\frac{x^{m^2}+1}{2}+\frac{\ln x}{6}mx^{m^2}-2\ln x\int_0^m b(y)x^{y^2}dy-4\ln^2 x\int_0^m b(y)y^2x^{y^2}dy$$

让 $m\to+\infty$, 我们有

这里x介于0,1

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}x^{n^2}&=\int_0^{\infty}x^{y^2}dy+\frac{1}{2}-2\ln x\int_0^{\infty}b(y)x^{y^2}dy-4\ln^2 x\int_0^{\infty}b(y)y^2x^{y^2}dy\\&=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}}+\frac{1}{2}+O\left(\frac{\ln x}{\sqrt{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}}\right)+O\left(\frac{\ln^2 x}{\ln^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{x}\right)}\right)\\&=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}}+\frac{1}{2}+O\left(\sqrt{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}\right)\\&=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}}+\frac{1}{2}+O\left(\sqrt{1-x}\right)\\&=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}+O\left(\sqrt{1-x}\right)\right)+\frac{1}{2}+O\left(\sqrt{1-x}\right)\\&=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-x}}+\frac{1}{2}+O\left(\sqrt{1-x}\right)\end{aligned}\tag{12}$$

这里使用了洛朗展开

我们完成了证明.

Problem 76

设 $f(x)\in C[a,b]$ 满足:

$$\int_a^b dx_1\int_a^{x_2}dx_2...\int_a^{x_k}f\left(x_{k+1}\right)dx_{k+1}=0,\ \ k=0,2...,n-1$$

这里记 $x_0=b$, 如果

$$|\int_a^b dx_1\int_a^{x_2}dx_2...\int_a^{x_n}f\left(x_{n+1}\right)dx_{n+1}|\leqslant\varphi_n\left(b-a\right)^{n+1}\sup_{x\in[a,b]}|f\left(x\right)|$$

恒成立, 求最小的 φ_n.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 因为全体 $n-1$ 次多项式是赋范空间 $L^1\left[0,1\right]$ 的有限维子空间, 因此存在一个 $n-1$ 次多项式 p_0 使得

$$s_n=\inf_{p\text{是}n-1\text{多项式}}\int_0^1\left|x^n-p\left(x\right)\right|dx=\int_0^1\left|x^n-p_0\left(x\right)\right|dx$$

如果不引入泛函分析的语言, 也可以注意到所求下确界是一个关于 $p(x)$ 系数的凸函数的下确界, 从而得到相同的论断.

$$\begin{aligned}|\int_0^{b-a}f\left(b-x\right)x^n dx|&=\left(b-a\right)^{n+1}\left|\int_0^1 f\left(b-\left(b-a\right)x\right)x^n dx\right|\\&=\left(b-a\right)^{n+1}\left|\int_0^1 f\left(b-\left(b-a\right)x\right)\left(x^n-p_0\left(x\right)\right)dx\right|\\&\leqslant\left(b-a\right)^{n+1}\sup_{x\in[a,b]}\left|f\left(x\right)\right|s_n\end{aligned}\tag{13}$$

注意到

$$\begin{aligned}|\int_a^b dx_1\int_a^{x_2}dx_2...\int_a^{x_n}f\left(x_{n+1}\right)dx_{n+1}|&=|\frac{1}{n!}\int_a^b f\left(x\right)\left(b-x\right)^n dx|\\&=|\frac{1}{n!}\int_0^{b-a}f\left(b-x\right)x^n dx|\\&\leqslant\frac{\left(b-a\right)^{n+1}}{n!}s_n\sup_{x\in[a,b]}\left|f\left(x\right)\right|\end{aligned}\tag{14}$$

这种方法得到的系数是非常好的. 但是仍然缺乏最佳常数的表述, 原因是我们在非 *hilbert* 空间操作了. 但这种方法其实会给出许多经典习题的方法:

特别的 $n=1$ 时,$\int_a^b\int_a^x f(y)\,dydx=\int_a^b f(y)(b-y)\,dy$ 于是

$$\begin{aligned}|\int_a^b f(y)(b-y)\,dy| &= \inf_{c\in\mathbb{R}}\left|\int_a^b f(y)[b-y-c]\,dy\right| \\ &\leqslant \sup_{x\in|a,b|}|f(x)|\inf_{c\in\mathbb{R}}\int_a^b|b-y-c|\,dy=\frac{1}{4}(b-a)^2\sup_{x\in|a,b|}|f(x)|\end{aligned} \tag{15}$$

事实上我们仍然可以给出一种计算最佳常数的方法, 实际上此方法在前面的推文也有所涉及. 见下次推文.

Problem 77

设 $f(x) \in C[a,b]$ 满足:

$$\int_a^b dx_1 \int_a^{x_2} dx_2 ... \int_a^{x_k} f(x_{k+1})\, dx_{k+1} = 0,\ \ k = 0, 2..., n-1$$

这里记 $x_0 = b$, 如果

$$\left| \int_a^b dx_1 \int_a^{x_2} dx_2 ... \int_a^{x_n} f(x_{n+1})\, dx_{n+1} \right| \leqslant \varphi_n (b-a)^{n+1} \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

恒成立, 求最小的 φ_n.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 对于空间 $C[0,1]$, 考虑其上的连续线性泛函

$$T_{p(x)} : f(x) \to \int_0^1 f(x)\, p(x)\, dx,\ \ p(x)\text{是}n\text{次首1多项式}$$

记

$$V \triangleq \left\{ f(x) \in C[0,1] : \int_0^1 f(x)\, x^k dx = 0,\ \ k = 0, 1, 2, ..., n-1 \right\}$$

于是有

$$T_{p(x)}(f) = T_{x^n}(f),\ \forall f \in V$$

以及

$$||T_{x^n}|_V|| = \left|\left|T_{p(x)}|_V\right|\right| \leqslant \left|\left|T_{p(x)}\right|\right| = \text{复测度}p(x)\, dx\text{全变差} = \int_0^1 |p(x)|\, dx,\ \forall p(x)\text{是}n\text{次首1多项式}$$

泛函延拓定理告诉我们

$$\exists T \in (C[0,1])^{\star}, ||T|| = ||T_{x^n}|_V||, T(f) = T_{x^n}(f), \forall f \in V$$

里斯表示定理告诉我们有复正则 *borel* 测度 μ 使得

$$T(f) = \int_0^1 f(x)\, d\mu,\ \forall f \in C[0,1]$$

故

$$\int_0^1 f(x)\,d\mu = \int_0^1 f(x)\,x^n dx,\ \forall f \in V$$

把 T 视为 $L^2[0,1]$ 中的连续泛函，设

$$\tilde{V} \triangleq span\left\{1, x, x^2, ..., x^{n-1}\right\}^{\perp}$$

事实上在 $L^2[0,1]$ 中 $\bar{V} = \tilde{V}$, 这是因为所有勒让德多项式 $(1, x, x^2, ...$ 进行 smith 正交化) 是完备正交基, 对 $\tilde{V}$ 中每个元素都是若干勒让德多项式线性组合的 L^2 极限, 因此我们有

$$\int_0^1 f(x)\,d\mu = \int_0^1 f(x)\,x^n dx,\ \forall f \in \tilde{V}$$

记 $h(x)$ 是 x^n 在 $\tilde{V}$ 中正交投影, 显然 $h(x)$ 是 n 次首 1 多项式, 且有

$$Tf = \int_0^1 f(x)\,d\mu = \int_0^1 f(x)\,h(x)\,dx,\ \forall f \in \tilde{V}$$

由 L^2 的对偶, 存在唯一 $h_0(x) \in L^2[0,1]$ 使得

$$\int_0^1 f(x)\,d\mu = \int_0^1 f(x)\,h_0(x)\,dx, \forall f \in L^2[0,1]$$

设 $h_0(x)$ 在 $\tilde{V}$ 中正交投影是 $h_1(x)$, 则有

$$\int_0^1 f(x)\,d\mu = \int_0^1 f(x)\,h_1(x)\,dx, \forall f \in \tilde{V}$$

注意 $h_1 - h \in \tilde{V}$,$\tilde{V}$ 是内积空间, 我们有 $h_1 = h$, 故 h_0 是 n 次首一多项式, 故 $T = T_{h_0(x)}$, 从而我们有

$$||T_{x^n}|_V|| = ||T|| = ||T_{h_0}||$$

从而上一推文所叙述结果为真. 即 $\varphi_n = \frac{s_n}{n!}$ 是最佳常数.

Problem 78

计算

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{(1+x^2)^n}dx$$

Proof. (By 清疏竞赛数学) 事实上

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{(1+x^2)^n}dx &= \int_0^{\infty}e^{-n\ln\left(1+x^2\right)}\cos x dx\\
&= \int_{\delta}^{\infty}e^{-n\ln\left(1+x^2\right)}\cos x dx+\int_0^{\delta}e^{-n\ln\left(1+x^2\right)}\cos x dx\\
&\leqslant O(\int_{\delta}^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+\delta^2)^{n-1}}dx)+\int_0^{\delta}e^{-n\ln\left(1+x^2\right)}\cos x dx\\
&= O(\frac{1}{(1+\delta^2)^n})+\int_0^{\ln\left(1+\delta^2\right)}e^{-nx}\cos\left(\sqrt{e^x-1}\right)\left(\sqrt{e^x-1}\right)'dx \qquad (16)\\
&= O(\frac{1}{(1+\delta^2)^n})+\int_0^{\ln\left(1+\delta^2\right)}e^{-nx}[\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{8}-\frac{31x^{\frac{3}{2}}}{192}-\frac{1583x^{\frac{5}{2}}}{11520}+O\left(x^{\frac{7}{2}}\right)dx\\
&= \int_0^{\infty}e^{-nx}[\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{8}-\frac{31x^{\frac{3}{2}}}{192}-\frac{1583x^{\frac{5}{2}}}{11520}dx+O\left(\frac{1}{n^{\frac{9}{2}}}\right)\\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{\sqrt{\pi}}{16}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}-\frac{31\sqrt{\pi}}{256}\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}-\frac{1583\sqrt{\pi}}{6144}\frac{1}{n^{\frac{7}{2}}}+O\left(\frac{1}{n^{\frac{9}{2}}}\right)
\end{aligned}$$

于是我们有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{(1+x^2)^n}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

并有如下推广

$$\lim_{n\to\infty}n[\sqrt{n}\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{(1+x^2)^n}dx-\frac{\sqrt{\pi}}{2}]=\frac{\sqrt{\pi}}{16}$$

$$\lim_{n\to\infty}n[n[\sqrt{n}\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{(1+x^2)^n}dx-\frac{\sqrt{\pi}}{2}]-\frac{\sqrt{\pi}}{16}]=-\frac{31\sqrt{\pi}}{256}$$

$$\lim_{n\to\infty}n[n[n[\sqrt{n}\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{(1+x^2)^n}dx-\frac{\sqrt{\pi}}{2}]-\frac{\sqrt{\pi}}{16}]+\frac{31\sqrt{\pi}}{256}]=-\frac{1583\sqrt{\pi}}{6144}$$

Problem 79

十三届非数第五大题速解

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 第六大题老题就不写了, 到处都是答案.

显然

$$f(x) = x - [x]\ln x + \sum_{k=1}^{[x]} \ln k$$

由 $E - M$ 公式, 显然

$$e^{f(x)} = \sqrt{x} + O(1)$$

做换元 $x = \sqrt{y}$, 显然原积分 $\sim \int_1^\infty \frac{\cos\left(x - \frac{1}{x}\right)}{x^{\frac{2p+1}{4}}} dx$, 由狄利克雷判别法, 显然 $\int_1^\infty \frac{\cos\left(x - \frac{1}{x}\right)}{x^{\frac{2p+1}{4}}} dx$ 收敛, 事实上我们还能判断绝对收敛和条件收敛, 当 $\frac{2p+1}{4} > 1 \Leftrightarrow p > \frac{3}{2}$ 容易知道绝对收敛, 对于其余的 p,$\int_1^\infty \frac{\sin x \sin \frac{1}{x}}{x^{\frac{2p+1}{4}}} dx \sim \int_1^\infty \frac{\sin x}{x^{\frac{2p+1}{2}+1}} dx$ 显然绝对, 但是 cos 部分

$$\int_1^\infty \frac{|\cos x||\cos \frac{1}{x}|}{x^{\frac{2p+1}{4}}} dx \sim \int_1^\infty \frac{|\cos x|}{x^{\frac{2p+1}{4}}} dx = \infty$$

故原题在 $0 < p \leqslant \frac{3}{2}$ 条件收敛,$p > \frac{3}{2}$ 绝对收敛

Problem 80

证明
$$\lim_{a\to 1^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n+1)}{n^a}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n+1)}{n},\quad \lim_{a\to 0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^a}=\frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 首先

$$|\sum_{k=1}^{m}\cos(k+1)|=|\frac{1}{\sin\frac{1}{2}}\sin\frac{m}{2}\cos\frac{m+3}{2}|\leqslant\csc\frac{1}{2}$$

于是有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n+1)}{n^a}&=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\frac{\cos(n+1)}{n^a}\qquad \text{abel展开}\\&=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m-1}[\left(\frac{1}{n^a}-\frac{1}{(n+1)^a}\right)\sum_{k=1}^{n}\cos(k+1)]+\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m^a}\sum_{k=1}^{m}\cos(k+1)\qquad(17)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}[\left(\frac{1}{n^a}-\frac{1}{(n+1)^a}\right)\sum_{k=1}^{n}\cos(k+1)]\end{aligned}$$

注意到
$$\sum_{n=1}^{\infty}|\left(\frac{1}{n^a}-\frac{1}{(n+1)^a}\right)\sum_{k=1}^{n}\cos(k+1)|\leqslant\csc\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{n^{a+1}}\leqslant\csc\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}<\infty$$
故级数一致收敛, 从而

$$\begin{aligned}\lim_{a\to 1^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n+1)}{n^a}&=\lim_{a\to 1^+}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^a}-\frac{1}{(n+1)^a}\right)\sum_{k=1}^{n}\cos(k+1)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{(n+1)}\right)\sum_{k=1}^{n}\cos(k+1)\qquad(18)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n+1)}{n}\end{aligned}$$

另一方面, 完全类似上面的操作, 令 $z=e^i$, 我们有

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^a}&=\lim_{a\to0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^a}-\frac{1}{(n+1)^a}\right)\sum_{k=1}^{n}z^k\\
&=\lim_{a\to0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^a}-\frac{1}{(n+1)^a}\right)\frac{z-z^{n+1}}{1-z}\\
&=\frac{z}{1-z}-\lim_{a\to0^+}\frac{z}{1-z}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^a}-\frac{1}{(n+1)^a}\right)z^n\\
&=\frac{z}{1-z}-\lim_{a\to0^+}\frac{z}{1-z}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^a}-\frac{2}{(n+1)^a}+\frac{1}{(n+2)^a}\right)\sum_{k=1}^{n}z^k
\end{aligned}\tag{19}$$

再次由级数的控制收敛定理, 我们得到

$$\lim_{a\to0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^a}=\frac{z}{1-z}=\frac{e^i}{1-e^i}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\cot\frac{1}{2}$$

于是

$$\lim_{a\to0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^a}=\frac{1}{2}\cot\frac{1}{2},\ \lim_{a\to0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^a}=-\frac{1}{2}$$

Problem 81

设 a_1，a_2，a_3，b_1，$b_2 \in \mathbb{R}$ 且满足

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1,\ b_1^2 + b_2^2 = 1$$

考虑 5×5 矩阵 $M = (A, B)$, 其中 A 每行都是 a_1，a_2，a_3 排列,B 每行都是 b_1，b_2 排列, 证明:

$(1) : (tr\,(M))^2 \leqslant (5 + 2\sqrt{6}) rank\,(M)$,

$(2) : M$有实特征值λ, $|\lambda| \leqslant \sqrt{3} + \sqrt{2}$.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 本次补赛压轴题就是本题的第一问 (原卷第四题第一问).

(1):

显然 $rank(M) > 0$, 并且 $[tr\,(M)]^2 \leqslant 25$, $\frac{25}{5+2\sqrt{6}} < 3$, 只需分别考虑 $rank(M) = 1, 2$ 的情形.

对于 $rank(M) = 1$:

有矩阵排列形状知此时必然有

$$|tr\,(M)\,| \leqslant |a_1| + |a_2| + |a_3| + |b_1| + |b_2| \leqslant \sqrt{3} \cdot 1 + \sqrt{2} \cdot 1 = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

两边平方即得.

对于 $rank(M) = 2$:

我们只需证明

$$|tr\,(M)| \leqslant 2 + \sqrt{6}$$

事实上如果 M 的三阶顺序主子式的对角线是 a_1, a_2, a_3 的排列情形，则

$$|trM| \leqslant |a_1| + |a_2| + |a_3| + |b_i| + |b_j| \leqslant \sqrt{3} + 2 \leqslant 2 + \sqrt{6},\ i, j \in \{1, 2\}$$

如果 M 的三阶顺序主子式的对角线是 a_1, a_2, a_3 中某个数出现了两次的情形，则类似的

$$|trM| \leqslant 2\,|a_{i'}| + |a_{j'}| + |b_i| + |b_j| \leqslant \sqrt{5} + 2 \leqslant 2 + \sqrt{6},\ i, j \in \{1, 2\}\,, i', j' \in \{1, 2, 3\}$$

如果 M 的三阶顺序主子式的对角线是三个相同元，有轮换对称, 只需考虑如下情况

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_1 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_1 & a_3 \\ a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_1 & a_2 \\ a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}$$

此时

$$|\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_1 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_1 \end{pmatrix}| = |\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_1 & a_3 \\ a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}| = |\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_1 & a_2 \\ a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}| = (a_3 - a_1)(a_2 - a_1)(a_1 + a_2 + a_3)$$

以及

$$|\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_1 \end{pmatrix}| = \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_1a_2 - a_2a_3 - a_3a_1 - a_2a_3\right)(a_1 + a_2 + a_3)$$

注意基本不等式

$$a^2 + b^2 + c^2 > ab + bc + ca,\ \forall a, b, c\text{不全为}0$$

显然如果上面有某个行列式为 0, 则 a_1, a_2, a_3 必有重复元或者和为 0, 这显然导致不等式仍然成立.

(2):

奇数阶矩阵必有实特征值, 记对应的实特征值和特征向量为 λ, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix}$.

我们不妨设 $|x_1| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant 5} |x_i| > 0$, 显然

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + b_1x_4 + b_2x_5 = \lambda x_1$$

于是

$$|\lambda| \leqslant |a_1| + |a_2| \frac{|x_2|}{|x_1|} + |a_3| \frac{|x_3|}{|x_1|} + |b_1| \frac{|x_4|}{|x_1|} + |b_2| \frac{|x_5|}{|x_1|}$$

由 *cauchy* 不等式

$$|\lambda| \leqslant \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

Problem 82

设

$$a_{n+2021} = \sqrt[2022]{a_n + a_{n+1} + ... + a_{n+2020}},\ a_0, a_1, ..., a_{2020} \in (0,1)\,,\ n \geqslant 0$$

计算

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

Proof. (By 清疏竞赛数学) 显然

$$a = \varliminf_{n\to\infty} a_{n+2021} = \sqrt[2022]{a_n + a_{n+1} + ... + a_{n+2020}} \geqslant \sqrt[2022]{2021a}$$

记 $c = \sqrt[2021]{2021} > 1$, 归纳显然有

$$a_{n+2021} < \sqrt[2022]{2021c} = c$$

故

$$\varlimsup_{n\to\infty} a_n \leqslant c,\ \varliminf_{n\to\infty} a_n \geqslant c$$

从而

$$\lim_{n\to\infty} a_n = c = \sqrt[2021]{2021}$$

Problem 83

计算

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i^2}\frac{1}{n^3}\frac{\frac{j}{n^2}}{\left(1+\left(\frac{i}{n}\right)^2\right)}$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i^2}\frac{1}{n^3}\frac{\frac{j}{n^2}}{\left(1+\left(\frac{i}{n}\right)^2\right)}&=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{i^2}{n^2}\left(\frac{i^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}\right)}{1+\frac{i^2}{n^2}}\\&=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\frac{i^2}{n^2}\right)^2}{1+\frac{i^2}{n^2}}+\frac{1}{2n^3}\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{i^2}{n^2}}{1+\frac{i^2}{n^2}}\end{aligned}\tag{20}$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i^2}\frac{1}{n^3}\frac{\frac{j}{n^2}}{\left(1+\left(\frac{i}{n}\right)^2\right)}=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^4}{1+x^2}dx=\frac{3\pi-8}{24}$$

顺便留一组思考题:

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}n[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i^2}\frac{1}{n^3}\frac{\frac{j}{n^2}}{\left(1+\left(\frac{i}{n}\right)^2\right)}-\frac{3\pi-8}{24}]=\frac{1}{8}\\&\lim_{n\to\infty}n[n[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i^2}\frac{1}{n^3}\frac{\frac{j}{n^2}}{\left(1+\left(\frac{i}{n}\right)^2\right)}-\frac{3\pi-8}{24}]-\frac{1}{8}]=\frac{9-2\pi}{16}\\&\lim_{n\to\infty}n[n[n[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i^2}\frac{1}{n^3}\frac{\frac{j}{n^2}}{\left(1+\left(\frac{i}{n}\right)^2\right)}-\frac{3\pi-8}{24}]-\frac{1}{8}]-\frac{9-2\pi}{16}]=\frac{1}{8}\\&\lim_{n\to\infty}n[n[n[n[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i^2}\frac{1}{n^3}\frac{\frac{j}{n^2}}{\left(1+\left(\frac{i}{n}\right)^2\right)}-\frac{3\pi-8}{24}]-\frac{1}{8}]-\frac{9-2\pi}{16}]-\frac{1}{8}]=\frac{1}{48}\end{aligned}\tag{21}$$

Problem 84

计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k\left(n-k\right)}}$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 容易猜测

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k\left(n-k\right)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)}}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x\left(1-x\right)}}dx=\pi$$

但这并非黎曼可积积分, 这样做是不严谨的, 事实上我们可以给出如下做法,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)}}&=\lim_{n\to\infty}\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}[\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)}}-\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}}-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{k}{n}}}]+\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n-1}[\sqrt{\frac{1}{k}}+\sqrt{\frac{1}{n-k}}]\}\\&=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x\left(1-x\right)}}-\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{1-x}}dx+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{\frac{1}{k}}\\&=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x\left(1-x\right)}}-\frac{2}{\sqrt{x}}dx+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}\\&=\pi-4+4=\pi\end{aligned}\tag{22}$$

Problem 85

设 $p>1, a\in\mathbb{R}$, 且有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}=a$$

证明当 x_n 非负时

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1^p+x_2^p+...+x_n^p}{n^p}=0$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 首先

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}x_k}{n}-\frac{n-1}{n}\frac{\sum\limits_{k=2}^{n}x_{k-1}}{n-1}=0$$

记

$$m_n=\sup\left\{1\leqslant s\leqslant n: x_s=\sup_{1\leqslant k\leqslant n}x_k\right\}$$

如果 x_n 无上界, 则显然有 $\lim\limits_{n\to\infty}m_n=+\infty$ 此时

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{x_1^p+x_2^p+...+x_n^p}{n^p}&=\lim_{n\to\infty}\frac{x_1^{p-1}x_1+x_2^{p-1}x_2+...+x_n^{p-1}x_n}{n^p}\\&\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{x_{m_n}^{p-1}}{m_n^{p-1}}\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}=0\end{aligned}\tag{23}$$

若 x_n 有上界, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1^p+x_2^p+...+x_n^p}{n^p}\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{M^{p-1}}{n^{p-1}}\frac{x_1+x_2...+x_n}{n}=0$$

于是我们完成了证明.

Problem 86

求极限

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}-\sqrt{\pi n}]$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学)

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{n\ln\sin x}dx \\ &= \int_{+\infty}^0 e^{-ny} d\arcsin e^{-y} \\ &= \int_0^{\infty} e^{-ny}\frac{e^{-y}}{\sqrt{1-e^{-2y}}}dy \\ &= \int_0^{\infty} e^{-ny}\left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{y}}-\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{y}+\frac{\sqrt{2}}{48}y\sqrt{y}+\frac{\sqrt{2}}{96}y^{\frac{5}{2}}+O\left(y^{\frac{7}{2}}\right)\right)dy \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{\sqrt{2\pi}}{8}\frac{1}{n\sqrt{n}}+\frac{\sqrt{2\pi}}{64}\frac{1}{n^2\sqrt{n}}+\frac{5\sqrt{2\pi}}{256}\frac{1}{n^3\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{n^4\sqrt{n}}\right)\end{aligned} \tag{24}$$

特别的

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\,(2n-1)!!}{(2n)!!}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}xdx=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

于是就证明了 *wallis* 公式

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\sim\sqrt{\pi n}$$

并且得到了更强的结果

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}-\sqrt{\pi n}]=\frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

Problem 87

对于 $n \in \mathbb{N}$, 计算

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x |\cos t^n|\,dt$$

PROOF. (*By* 清疏竞赛数学)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x |\cos t^n|\,dt &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{n}\int_0^1 |\cos(x^n t)|\,t^{\frac{1}{n}-1}dt \\ &= \frac{1}{\pi n}\int_0^1 t^{\frac{1}{n}-1}dt\int_0^\pi |\cos t|\,dt = \frac{2}{\pi}\end{aligned} \tag{25}$$

Riemann引理

Problem 88

证明

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}[\sqrt{n}[\sqrt{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+\sqrt{k}}-1\right)+\frac{2}{3}]-\frac{1}{2}]=\frac{1}{10}$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+\sqrt{k}}&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\sqrt{\frac{k}{n^2}}}\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\sqrt{\frac{k}{n^2}}+\frac{k}{n^2}-\frac{k}{n^2}\sqrt{\frac{k}{n^2}}+O\left(\frac{k^2}{n^4}\right)\right)\\&=\frac{1}{n}\left(n-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k}}{n}+\frac{n+1}{2n}-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}k\sqrt{k}}{n^3}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\&=\frac{1}{n}\left(n-\frac{\frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}}+\frac{\sqrt{n}}{2}}{n}+\frac{1}{2}-\frac{\frac{2}{5}n^{\frac{5}{2}}}{n^3}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\&=1-\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n\sqrt{n}}-\frac{2}{5}\frac{1}{n\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\\&=1-\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{10n\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}\tag{26}$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}[\sqrt{n}[\sqrt{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+\sqrt{k}}-1\right)+\frac{2}{3}]-\frac{1}{2}]=\frac{1}{10}$$

Problem 89

设 $x_1 \in (1,2)$, 数列 $x_{n+1} = \frac{e^{x_n}-1}{x_n}$, $x_1 \in (1,2)$, 证明 $\exists C = C(x_1) > 1$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(x_n-1)}{2^n} = C(x_1)$, 并且有:

(1) : $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n[\frac{\ln(x_n-1)}{2^n} - C(x_1)] = \ln 2$.

(2) : $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n[2^n[\frac{\ln(x_n-1)}{2^n} - C(x_1)] - \ln 2] = -\frac{2}{3\ln 2\cdot C(x_1)}$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 显然 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, 令 $y_n = x_n - 1$, 我们有

$$y_{n+1} = \frac{e^{y_n}}{y_n+1} - 1 = \frac{y_n^2}{2} + O\left(y_n^3\right)$$

故

$$\ln y_{n+1} = \ln\frac{y_n^2}{2} + \ln\left(1 + O\left(y_n\right)\right) = 2\ln y_n - \ln 2 + O\left(y_n\right)$$

因此

$$\frac{\ln y_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{\ln y_n}{2^n} = -\frac{\ln 2}{2^{n+1}} + O\left(\frac{y_n}{2^{n+1}}\right)$$

我们令

$$r_n = \frac{\ln y_n}{2^n} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{\ln 2}{2^{k+1}}$$

故

$$r_{n+1} - r_n = O\left(\frac{y_n}{2^{n+1}}\right) = o\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

因此

$$r_n = C + \sum_{k=n}^{\infty}\left(r_k - r_{k+1}\right) = C + o\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

于是就有

$$\frac{\ln y_n}{2^n} = C\left(x_1\right) + \frac{\ln 2}{2^n} + o\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

于是

$$y_n = 2e^{2^n C(x_1)}\left(1 + o\left(1\right)\right),\ C\left(x_1\right) < 0$$

注意到

$$\ln y_{n+1} = \ln\left(\frac{y_n^2}{2} - \frac{y_n^3}{3} + O\left(y_n^4\right)\right)$$

于是有

$$\frac{\ln y_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{\ln y_n}{2^n}=-\frac{\ln 2}{2^{n+1}}-\frac{2}{3}\frac{y_n}{2^{n+1}}+O\left(\frac{y_n^2}{2^{n+1}}\right)$$

于是

$$\frac{\ln y_n}{2^n}=C\left(x_1\right)+\frac{\ln 2}{2^n}+\frac{4}{3}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{e^{-2^k c\left(x_1\right)}2^{k+1}}+o\left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{e^{-2^k c\left(x_1\right)}2^{k+1}}\right)$$

又

$$\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{e^{-2^k c\left(x_1\right)}2^{k+1}}\sim\frac{-C\left(x_1\right)}{2\ln 2}\int_{-2^n C\left(x_1\right)}^{\infty}\frac{1}{e^x x^2}dx\sim-\frac{1}{C\left(x_1\right)2\ln 2\cdot 4^n}$$

于是

$$\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{e^{-2^k c\left(x_1\right)}2^{k+1}}=-\frac{1}{C\left(x_1\right)2\ln 2\cdot 4^n}+o\left(\frac{1}{4^n}\right)$$

故

$$\frac{\ln y_n}{2^n}=C\left(x_1\right)+\frac{\ln 2}{2^n}-\frac{2}{3\ln 2\cdot C\left(x_1\right)}\frac{1}{4^n}+o\left(\frac{1}{4^n}\right)$$

Problem 90

设实数列 $\{a_{n,k}\}_{n,k\geqslant 1}$ 满足:

(1) : 对固定的 k, 只有有限个 n, 使得 $a_{n,k}\neq 0$.

(2) : 对固定的 n, 只有有限个 k, 使得 $a_{n,k}\neq 0$.

(3) : $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{n,k}|<\infty$.

是否有 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{n,k}$ 收敛, 且满足

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{n,k}=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{n,k}$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学)

Problem 91

设 x_n 是 $e^x + x^{2n+1} = 0$ 的实根, 证明

$$\lim_{n\to\infty} n[n[n[n(x_n+1)-\frac{1}{2}]+\frac{5}{8}]-\frac{5}{6}] = -\frac{449}{384}$$

PROOF. (*By* 清疏竞赛数学) 显然

$$x_n \in (-1,0), \ \lim_{n\to\infty} x_n = -1$$

令 $y_n = 1 + x_n$ 注意到

$$\frac{2\ln(1-y_n)}{y_n - 1 - \ln(1-y_n)} = \frac{1}{n}$$

以及

$$f(x) = \frac{2\ln(1-x)}{x-1-\ln(1-x)} = 2x + 5x^2 + \frac{35x^3}{3} + 27x^4 \ldots., \ |x| < t$$

这里 $t - 1 = \ln(1-t)$, $t \approx 0.43285671...$, 待定系数或者利用反函数的导数公式有

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{5}{8}x^2 + \frac{5}{6}x^3 - \frac{449}{384}x^4 + O(x^5)$$

故

$$x_n = f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) - 1 = \frac{1}{2n} - \frac{5}{8n^2} + \frac{5}{6n^2} - \frac{449}{384n^4} + O\left(\frac{1}{n^5}\right)$$

于是

$$\lim_{n\to\infty} n[n[n[n(x_n+1)-\frac{1}{2}]+\frac{5}{8}]-\frac{5}{6}] = -\frac{449}{384}$$

我们完成了证明.

Problem 92

设 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ 存在, 令

$$a_{n+1} = b_n - \frac{na_n}{2n+1}$$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 归纳可知

$$a_{n+1} = \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!!}a_1 + \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{(2k+1)!!}{k!}b_k,\ n \geqslant 1$$

由 *wallis* 公式, 我们有

$$\frac{n!}{(2n+1)!!} = \frac{n!}{(2n-1)!!\,(2n+1)} \sim \frac{n!\sqrt{\pi n}}{(2n)!!\,(2n+1)} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2^{n+1}\sqrt{n}}$$

注意到

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\frac{(2m)!}{(4m+1)!!}\sum_{k=1}^{2m}(-1)^k\frac{(2k+1)!!}{k!}b_k &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\lim_{m\to\infty}\frac{\frac{(4m+1)!!}{(2m)!}b_{2m}-\frac{(4m-1)!!}{(2m-1)!}b_{2m-1}}{4^m\sqrt{m}-4^{m-1}\sqrt{m-1}}\\ &= \frac{2\sqrt{\pi}}{3\sqrt{2}}\lim_{m\to\infty}\frac{\frac{2^{2m+1}\sqrt{2m}}{\sqrt{\pi}}b_{2m}-\frac{2^{2m}\sqrt{2m-1}}{\sqrt{\pi}}b_{2m-1}}{4^m\sqrt{m}} = \frac{2}{3}b\end{aligned} \tag{27}$$

以及

$$\begin{aligned}-\lim_{m\to\infty}\frac{(2m-1)!}{(4m-1)!!}\sum_{k=1}^{2m-1}(-1)^k\frac{(2k+1)!!}{k!}b_k &= -\lim_{m\to\infty}\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m}\sqrt{2m-1}}b_k\sum_{k=1}^{2m-1}(-1)^k\frac{(2k+1)!!}{k!}\\ &= -\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\lim_{m\to\infty}\frac{1}{4^m\sqrt{m}}\sum_{k=1}^{2m-1}(-1)^k\frac{(2k+1)!!}{k!}b_k\\ &= -\frac{4\sqrt{\pi}}{3\sqrt{2}}\lim_{m\to\infty}\frac{\frac{(4m-3)!!}{(2m-2)!}b_{2m-2}-\frac{(4m-1)!!}{(2m-1)!}b_{2m-1}}{4^m\sqrt{m}}\\ &= -\frac{4\sqrt{\pi}}{3\sqrt{2}}\lim_{m\to\infty}\frac{\frac{2^{2m-1}\sqrt{2m-2}}{\sqrt{\pi}}b_{2m-2}-\frac{2^{2m}\sqrt{2m-1}}{\sqrt{\pi}}b_{2m-1}}{4^m\sqrt{m}} = \frac{2}{3}b\end{aligned} \tag{28}$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!!}a_1 + \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{(2k+1)!!}{k!}b_k = \frac{2}{3}b$$

我们完成了证明.

Problem 93

设

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

证明

$$\lim_{n\to\infty} n[n[n^2[nn![\ln x_n - 1] + \frac{1}{e}] - \frac{1}{e}] + \frac{1}{e}] = -\frac{2}{e}$$

并得到推论

$$\lim_{n\to\infty} n^2[n^2[n[\frac{\ln x_n}{\sqrt[n]{e}-1} - n + \frac{1}{2}] - \frac{1}{12}] + \frac{1}{720}] = \frac{1}{30240}$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 注意到

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e - \frac{e}{n!}\int_0^1 e^{-t}t^n dt$$

E-M展开

进一步

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-t}t^n dt &= \int_0^{\infty} e^{-sn}e^{-(e^{-s}+s)}ds \\ \text{taylor展开} \quad &= \int_0^{\infty} e^{-sn}\left(\frac{1}{e} - \frac{s^2}{2e} + \frac{s^3}{6e} + \frac{s^4}{12e} + O\left(s^5\right)\right)ds \\ &= \frac{1}{en} - \frac{1}{en^3} + \frac{1}{en^4} + \frac{2}{en^5} + O\left(\frac{1}{n^6}\right) = t_n \end{aligned} \tag{29}$$

故

$$\begin{aligned} \ln\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} &= 1 + \ln\left(1 - \frac{1}{n!}t_n\right) \\ &= 1 - \frac{t_n}{n!} + O\left(\frac{t_n^2}{(n!)^2}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{enn!} + \frac{1}{en^3n!} - \frac{1}{en^4n!} - \frac{2}{en^5n!} + O\left(\frac{1}{n!n^6}\right) \end{aligned} \tag{30}$$

又

$$\frac{1}{\sqrt[n]{e}-1} = n - \frac{1}{2} + \frac{1}{12n} - \frac{1}{720n^3} + O\left(\frac{1}{n^5}\right)$$

故

$$\frac{\ln x_n}{\sqrt[n]{e}-1} = n - \frac{1}{2} + \frac{1}{12n} - \frac{1}{720n^3} + \frac{x^5}{30240} + O\left(\frac{1}{n^7}\right)$$

于是我们得到

$$\lim_{n\to\infty} n^2[n^2[n[\frac{\ln x_n}{\sqrt[n]{e}-1} - n + \frac{1}{2}] - \frac{1}{12}] + \frac{1}{720}] = \frac{1}{30240}$$

我们还有

$$\lim_{n\to\infty} n[n[n^2[nn![\ln x_n - 1] + \frac{1}{e}] - \frac{1}{e}] + \frac{1}{e}] = -\frac{2}{e}$$

Problem 94

设

$$a_{n+1}=a_n+\frac{a_n^2}{n^2},\ a_1=t\in(0,1)$$

证明 $\exists C(t)>0$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=C(t)$ 并且有

$$\lim_{n\to\infty}n[n[a_n-C(t)]+C^2(t)]=\frac{C^3(t)-C^2(t)}{2}$$

PROOF. (*By* 清疏竞赛数学) 当 $t<1$, 容易知道 $a_n\leqslant tn$, 平凡的归纳可以知道

$$a_n\leqslant tn^{\frac{\ln(t+1)}{\ln 2}}$$

于是累乘有

$$a_{n+1}\leqslant t\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{t}{k^{2-\frac{\ln(t+1)}{\ln 2}}}\right)<\infty$$

于是累和

$$a_n=C+\sum_{k=n}^{\infty}O\left(\frac{1}{k^2}\right)=C+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

因此就有

$$a_n=C-C^2\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^2}+\sum_{k=n}^{\infty}O\left(\frac{1}{k^3}\right)=C-\frac{C^2}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

进一步

$$a_n=C-\sum_{k=n}^{\infty}\frac{C^2}{k^2}+\sum_{k=n}^{\infty}\frac{2C^3}{k^3}+\sum_{k=n}^{\infty}O\left(\frac{1}{k^4}\right)=C-\frac{C^2}{n}-\frac{C^2-C^3}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Problem 95

设

$$a_{n+1} = a_1 + \frac{n}{a_n},\ a_1 > 0$$

证明

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}[\sqrt{n}[\sqrt{n}[a_n - \sqrt{n} - \frac{a_1}{2}] - \frac{a_1^2 - 2}{8}] + \frac{a_1}{8}] = \frac{a_1^2}{32} - \frac{a_1^4}{128} + \frac{1}{32}$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 设

$$a_n = a\sqrt{n} + b + c\frac{1}{\sqrt{n}} + d\frac{1}{n} + f\frac{1}{n\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

则

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= a\sqrt{n+1} + b + c\frac{1}{\sqrt{n+1}} + d\frac{1}{n+1} + f\frac{1}{(n+1)^{\frac{3}{2}}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= a\sqrt{n} + b + \left(\frac{a}{2} + c\right)\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{d}{n} + \frac{-\frac{a}{8} - \frac{c}{2} + f}{n\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
a_{n+1} &= a_1 + \frac{n}{a_n} \\
&= a_1 + \frac{n}{a\sqrt{n} + b + c\frac{1}{\sqrt{n}} + d\frac{1}{n} + f\frac{1}{n\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)} \\
\text{长除法}\quad &= \frac{\sqrt{n}}{a} + a_1 - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2 - ac}{a^2\sqrt{n}} + \frac{2abc - b^3 - a^2 d}{a^4 n} + \frac{-a^3 f + 2a^2 bd + a^2c^2 - 3ab^2c + b^4}{a^5 n\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned} \tag{31}$$

对比即得

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}[\sqrt{n}[\sqrt{n}[a_n - \sqrt{n} - \frac{a_1}{2}] - \frac{a_1^2 - 2}{8}] + \frac{a_1}{8}] = \frac{a_1^2}{32} - \frac{a_1^4}{128} + \frac{1}{32}$$

考虑二次复合迭代即可严格证明上述渐进.

Problem 96

设 $a_1, a_2, a_3 > 0$, 若

$$f(x) = \sin(a_1 x) + \sin(a_2 x) + \sin(a_3 x)$$

证明: $\exists\, t_n \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{n\to\infty} t_n = +\infty$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} f(x + t_n) = f(x),\ \text{关于}x \in \mathbb{R}\text{一致收敛}$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 我们宁可证明更强的: 给定 $a_1, a_2, ..., a_m > 0,\ m \in \mathbb{N}$.

设周期为 $T > 0$ 的 $g(x) \in C(\mathbb{R})$ 并且 $g(x)$ 是一致连续的, 令

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m} g(a_k x)$$

则 $\exists\, t_n \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{n\to\infty} t_n = +\infty$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} f(x + t_n) = f(x),\ \text{关于}x \in \mathbb{R}\text{一致收敛}$$

事实上:

如果我们能找到满足条件的 t_n 使得

$$\lim_{n\to\infty} \{t_n \frac{a_k}{T}\} = 0,\ k = 1, 2, ..., n$$

那么就有

$$f(x + t_n) = \sum_{k=1}^{m} g(a_k x + a_k t_n) = \sum_{k=1}^{m} g\left(a_k x + \{\frac{a_k}{T} t_n\} T\right)$$

$\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得 $|x - y| < \delta$ 时, 有 $|g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{m}$, 又 $\exists N \geqslant 1$, 使得

$$\left\{t_n \frac{a_k}{T}\right\} \leqslant \frac{\delta}{T},\ \forall n \geqslant N, k = 1, 2, ..., m$$

于是

$$|f(x + t_n) - f(x)| \leqslant \varepsilon,\ \forall x \in \mathbb{R}, n \geqslant N$$

就完成了证明.

因此我们来探索 t_n 存在性, 记 $b_k = \frac{a_k}{T}, k = 1, 2, ..., m$, 当 $b_k \in \mathbb{Q}$, 显然可取正整数列 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = +\infty$, 使

得

$$\{r_n b_k\} = 0,\ \forall b_k \in \mathbb{Q}, n \geqslant 1$$

又 $\forall q \geqslant 1, q \in \mathbb{N}$, 考虑

$$\bigcup_{j=1}^{q} [\frac{j-1}{q}, \frac{j}{q}) = [0, 1)$$

由抽屉原理,$\{r_n b_1\}$ 中有无穷多项落入 $[\frac{j_1-1}{q}, \frac{j_1}{q})$, 无妨仍记为 $\{r_n b_1\}$.

$\{r_n b_2\}$ 中有无穷多项落入 $[\frac{j_2-1}{q}, \frac{j_2}{q})$, 无妨仍记为 $\{r_n b_2\}$, 依次下去,

对每个 $k = 1, 2, ..., m$

$$\{r_n b_k\} \in [\frac{j_k - 1}{q}, \frac{j_k}{q}),\ \forall n \geqslant 1$$

注意到 $|\{r_n b_k\} - \{r_m b_k\}| = |\{(r_n - r_m) b_k\}| \leqslant \frac{1}{q},\ \forall n > m \geqslant 1$, 注意到 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = +\infty$, 故对 $q \geqslant 1$, 可以找到的充分大的 $r_n - r_1$, 使得

$$\{(r_n - r_1) b_k\} \leqslant \frac{1}{q},\ k = 1, 2, ..., m$$

于是我们可以找到满足条件的 t_n, 使得需要的结果成立. **这里的证明很像Dirichlet定理**

Problem 97

设单调递增函数 $f(x)$ 满足

$$f(x+1)=f(x)+1$$

定义 $x_{n+1}=f(x_n)$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}$$

存在且与 x_1 无关.

PROOF. (*By* 清疏竞赛数学) 先证:

$$|f(x)-f(y)|<1,\ \forall|x-y|<1$$

无妨设 $y<x<y+1$, 故

$$|f(x)-f(y)|=f(x)-f(y)<f(y+1)-f(y)=1$$

(1) : 我们首先假定极限存在来证明与初值 x 无关. 为方便, 我们用

$$x_n=f^{n-1}(x),\ \ f^0(x)=x=x_1$$

表示数列, 于是

$$|f^n(x)-f^n(y)|<1,\ \forall|x-y|<1,\ \ n\geqslant 0$$

$$f^n(x+1)=f^n(x)+1,\ \forall n\geqslant 0$$

于是

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{|f^n(x)-f^n(y)|}{n}&\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{|f^n(x)-f^n(x-[x])|}{n}+\frac{|f^n(x-[x])-f^n(y-[y])|}{n}+\frac{|f^n(y)-f^n(y-[y])|}{n}\\&\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{|[x]|}{n}+\frac{1}{n}+\frac{|[y]|}{n}=0\end{aligned}\tag{32}$$

于是我们证明了 (1), 并且如果对某个 x 极限存在的话, 则对所有 x, 极限都存在且一致.

(2) : 来证明对某个 x, 极限存在.

事实上若对某个 x, 有某个 $m\geqslant 1$, 有 $f^m(x)-x\in\mathbb{Z}$, 那么对每一个 $r=0,1,2,...,m-1$

by induction

$$\begin{aligned}\lim_{j\to\infty}\frac{f^{jm+r}(x)}{jm+r}&=\lim_{j\to\infty}\frac{f^r\left(f^{jm}(x)\right)}{jm}\\&=\lim_{j\to\infty}\frac{f^r\left[x+j\left(f^m(x)-x\right)\right]}{jm}\\&=\lim_{j\to\infty}\frac{f^r(x)+j\left(f^m(x)-x\right)}{jm}=\frac{f^m(x)-x}{m}\end{aligned}\tag{33}$$

于是有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f^n(x)}{n}=\frac{f^m(x)-x}{m}$.

我们假设 $f^m(x)-x\notin\mathbb{Z},\forall m\geqslant 1,x\in\mathbb{R}$. 于是存在 $k_m(x)\in\mathbb{Z}$, 使得

$$k_m(x)<f^m(x)-x<k_m(x)+1,\ m=1,2,...$$

下证 $k_m(x)$ 与 x 无关, 事实上, 若不然不妨考虑如下情况

$$f^m(x)-x>k_m(x)>f^m(y)-y,\ x<y$$

这里是假设对于所有x，[f^m(x)]不完全相等.

记

$$z_0=\sup\left\{z\in[x,y]:f^m(z)-z>k_m(x)\right\}$$

故

$$\exists z_n\in\left\{z\in[x,y]:f^m(z)-z>k_m(x)\right\},\ \lim_{n\to\infty}z_n=z_0$$

于是

$$f^m(z_n)-z_n>k_m(x),\ f^m(z)-z\leqslant k_m(x),\forall z>z_0$$

这是因为单调性,且x<y

令 $n\to\infty,\ z\to z_0$ 并结合 $f^m(x)$ 递增有

$$f^m\left(z_0^-\right)-z_0\geqslant k_m(x),\ f^m\left(z_0^+\right)-z_0\leqslant k_m(x)$$

于是

$$k_m(x)=f^m(z_0)-z_0\in\mathbb{Z}$$

这是一个矛盾. 因此 $k_m(x)$ 与 x 无关.

故

$$k_m<f^m\left(f^{jm}(0)\right)-f^{jm}(0)<k_m+1,\ j=0,1,2....$$

于是

$$nk_m < f^{nm}(0) = \sum_{j=0}^{n-1}[f^{(j+1)m}(0) - f^{jm}(0)] < n(k_m + 1)$$

这样就有

$$\frac{k_m}{m} < \frac{f^{nm}(0)}{nm} < \frac{k_m + 1}{m}$$

因此

$$|\frac{f^{nm}(0)}{nm} - \frac{f^{m}(0)}{m}| < \frac{1}{m}$$

由轮换对称性知

$$|\frac{f^{nm}(0)}{nm} - \frac{f^{n}(0)}{n}| < \frac{1}{n}$$

这导出了 $cauchy$ 列

$$|\frac{f^{m}(0)}{m} - \frac{f^{n}(0)}{n}| < \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f^n(x)}{n}$ 存在且与 x 无关, 我们完成了证明

Problem 98

设

$$I_n = \frac{\int_0^1 (1-x^2+x^3)^n \ln(x+2)\,dx}{\int_0^1 (1-x^2+x^3)^n\,dx}$$

证明:

(1) : $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(I_n-\ln 2\right)=\frac{-4\ln 2+4\ln 3+1}{2\sqrt{\pi}}$.

(2) : $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n}\left(I_n-\ln 2\right)-\frac{-4\ln 2+4\ln 3+1}{2\sqrt{\pi}})=\frac{5\pi+96\ln 2-96\ln 3-24}{16\pi}$

(3) : $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n}(\sqrt{n}\left(I_n-\ln 2\right)-\frac{-4\ln 2+4\ln 3+1}{2\sqrt{\pi}})-\frac{5\pi+96\ln 2-96\ln 3-24}{16\pi})=a$, 这里

$$a=\frac{-156\pi\sqrt{\pi}\ln 2+156\pi\sqrt{\pi}\ln 3-35\pi\sqrt{\pi}-576\sqrt{\pi}\ln 2+576\sqrt{\pi}\ln 3+144\sqrt{\pi}}{32\pi^2}$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 事实上, 对光滑函数 $f(x)$, 我们有 $\forall a\geqslant 1, \frac{1}{3}>\delta>0$, 记 $s(x),t(x)$ 满足

$$s\left(\ln\frac{1}{1-x^2+x^3}\right)=x,\ t\left(\ln\frac{1}{-x^3+2x^2-x+1}\right)=x,\ x\in[0,\delta]$$

于是我们直接求极限验证有

$$\begin{aligned}
&f(x)=a+bx+cx^2+dx^3+fx^4+gx^5+O\left(x^6\right)\\
&f(1-x)=a'+b'x+c'x^2+O\left(x^3\right)\\
&s(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x\sqrt{x}+\frac{3}{4}x^2+\frac{533}{384}x^2\sqrt{x}+O\left(x^3\right)\\
&t(x)=x+\frac{3}{2}x^2+O\left(x^3\right)\\
&f(s(x))\\
&=a+b\sqrt{x}+\frac{b+2c}{2}x+\frac{3b+8c+8d}{8}x\sqrt{x}+\frac{3b+4c+6d+4f}{4}x^2+\left(\frac{533b}{384}+\frac{15c+15d}{8}+2f+g\right)x^2\sqrt{x}+O\left(x^3\right)\\
&f(1-t(x))=a'+b'x+\left(\frac{3b'}{2}+c'\right)x^2+O\left(x^3\right)
\end{aligned}\tag{34}$$

我们分别代入 $f(x)=1, f(x)=\ln(x+2)$, 得到

$$\begin{aligned}
&\ln(s(x)+2)s'(x)=\frac{\ln 2}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{4}+\frac{\ln 2}{2}+\left(\frac{9\ln 2}{16}+\frac{5}{16}\right)\sqrt{x}+\left(\frac{19}{48}+\frac{3\ln 2}{2}\right)x+O\left(x\sqrt{x}\right)\\
&\ln(3-t(x))t'(x)=\ln 3+\left(3\ln 3-\frac{1}{3}\right)x+O\left(x\sqrt{x}\right)
\end{aligned}\tag{35}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left(1-x^2+x^3\right)^n f(x)\,dx \\
&= \int_0^1 e^{-n\ln\frac{1}{1-x^2+x^3}} f(x)\,dx \\
&= \int_0^\delta e^{-n\ln\frac{1}{1-x^2+x^3}} f(x)\,dx + \int_{1-\delta}^1 e^{-n\ln\frac{1}{1-x^2+x^3}} f(x)\,dx + O\left(\frac{1}{n^a}\right) \\
&= \int_0^\delta e^{-n\ln\frac{1}{1-x^2+x^3}} f(x)\,dx + \int_0^\delta e^{-n\ln\frac{1}{1-(1-x)^2+(1-x)^3}} f(1-x)\,dx + O\left(\frac{1}{n^a}\right) \\
&= \int_0^\delta e^{-n\ln\frac{1}{1-x^2+x^3}} f(x)\,dx + \int_0^\delta e^{-n\ln\frac{1}{-x^3+2x^2-x+1}} f(1-x)\,dx + O\left(\frac{1}{n^a}\right) \\
&= \int_0^{s^{-1}(\delta)} e^{-nx} f(s(x))\,s'(x)\,dx + \int_0^{t^{-1}(\delta)} e^{-nx} f(1-t(x))\,t'(x)\,dx + O\left(\frac{1}{n^a}\right) \\
&\begin{cases}
= \int_0^\infty e^{-nx}\left[\frac{\ln 2}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{4}+\frac{\ln 2}{2}+\ln 3+\left(\frac{9\ln 2}{16}+\frac{5}{16}\right)\sqrt{x}+\left(\frac{19}{48}+\frac{3\ln 2}{2}+3\ln 3-\frac{1}{3}\right)x\right]dx + O\left(\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}\right) & f(x)=\ln(x+2) \\
= \int_0^\infty e^{-nx}\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{3}{2}+\frac{9\sqrt{x}}{16}+\frac{9x}{2}\right]dx + O\left(\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}\right) & f(x)=1
\end{cases}
\end{aligned} \tag{36}$$

于是

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{\int_0^\infty e^{-nx}\left[\frac{\ln 2}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{4}+\frac{\ln 2}{2}+\ln 3+\left(\frac{9\ln 2}{16}+\frac{5}{16}\right)\sqrt{x}+\left(\frac{19}{48}+\frac{3\ln 2}{2}+3\ln 3-\frac{1}{3}\right)x\right]dx}{\int_0^\infty e^{-nx}\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{3}{2}+\frac{9\sqrt{x}}{16}+\frac{9x}{2}\right]dx} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= \ln 2 + \frac{(-32\ln 2+32\ln 3+8)}{16\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{5\pi+96\ln 2-96\ln 3-24}{16\pi}\frac{1}{n} \\
&+ \frac{-156\pi\sqrt{\pi}\ln 2+156\pi\sqrt{\pi}\ln 3-35\pi\sqrt{\pi}-576\sqrt{\pi}\ln 2+576\sqrt{\pi}\ln 3+144\sqrt{\pi}}{32\pi^2}\frac{1}{n\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned} \tag{37}$$

于是我们完成了证明.

Problem 99

证明

$$\lim_{n\to\infty} n\left[n\left[n\left[n\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ln\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)\cos^n x dx-\ln 2\right]+\frac{1+4\ln 2}{6}\right]-\frac{4\ln 2}{15}-\frac{61}{180}\right]=a$$

这里 $a=\frac{144\ln 2-793}{1890}$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学)

Problem 100

证明

$$\lim_{n\to\infty} n\left[n\left[n\left[n\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ln\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)\cos^n x dx-\ln 2\right]+\frac{1+4\ln 2}{6}\right]-\frac{4\ln 2}{15}-\frac{61}{180}\right]=a$$

这里 $a=\frac{144\ln 2-793}{1890}$

PROOF. (*By* 清疏竞赛数学)

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{x^2}\int_0^x e^{-y^2}dy=e^{x^2}-\frac{1}{\sqrt{\pi}x}+\frac{1}{2\sqrt{\pi}x^5}-\frac{3}{4\sqrt{\pi}x^5}+\frac{15}{8\sqrt{\pi}x^7}+O\left(\frac{1}{x^9}\right)$$

Problem 101

设 $I\left(x\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{y^2}\int_y^{\infty}e^{-z^2}dz$, 证明

$$\lim_{x\to+\infty}x^2[x^2[x^2\left[I\left(x\right)-\frac{\ln x}{\sqrt{\pi}}-\frac{4\ln 2+2\gamma}{4\sqrt{\pi}}\right]-\frac{1}{4\sqrt{\pi}}]+\frac{3}{16\sqrt{\pi}}]=\frac{5}{16\sqrt{\pi}}$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学)

$$\begin{aligned}
I\left(x\right)&=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{1-e^{-x^2y}}{y\sqrt{1+y}}dy\\
&=\frac{\ln 2}{\sqrt{\pi}}-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^1 e^{-x^2y}(\frac{1}{y\sqrt{1+y}}-\frac{1}{y})dy-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_1^{\infty}\frac{e^{-x^2y}}{y\sqrt{1+y}}dy+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^1\frac{1-e^{-x^2y}}{y}dy\\
&=\frac{\ln 2}{\sqrt{\pi}}-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^1 e^{-x^2y}(-\frac{1}{2}+\frac{3}{8}y-\frac{5y^2}{16}+O\left(y^3\right))dy-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_1^{\infty}\frac{e^{-x^2y}}{y\sqrt{1+y}}dy+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^1\frac{1-e^{-x^2y}}{y}dy\\
&=\frac{\ln 2}{\sqrt{\pi}}-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(-\frac{1}{2x^2}+\frac{3}{8x^4}-\frac{5}{8x^6}+O\left(\frac{1}{x^8}\right)\right)-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_1^{\infty}\frac{e^{-x^2y}}{y\sqrt{1+y}}dy+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^1\frac{1-e^{-x^2y}}{y}dy\\
&=\frac{\ln 2}{\sqrt{\pi}}-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(-\frac{1}{2x^2}+\frac{3}{8x^4}-\frac{5}{8x^6}+O\left(\frac{1}{x^8}\right)\right)+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{x^2}\frac{1-e^{-y}}{y}dy\\
&=\frac{\ln 2}{\sqrt{\pi}}-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(-\frac{1}{2x^2}+\frac{3}{8x^4}-\frac{5}{8x^6}+O\left(\frac{1}{x^8}\right)\right)+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(2\ln x+\gamma\right)\\
&=\frac{\ln x}{\sqrt{\pi}}+\frac{4\ln 2+2\gamma}{4\sqrt{\pi}}+\frac{1}{4\sqrt{\pi}x^2}-\frac{3}{16\sqrt{\pi}x^4}+\frac{5}{16\sqrt{\pi}x^6}+O\left(\frac{1}{x^8}\right)
\end{aligned}\tag{38}$$

Problem 102

设 $a>0, g(x)\in C^1(\mathbb{R}^n)$, 且 $\exists x_0\in\mathbb{R}^n$ 使得 $g(x_0)=\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} g(x)$, 证明

$$||\nabla g(x)||^{a+1}\leqslant\left(\frac{a+1}{a}\right)^a [g(x)-g(x_0)]^a\sup_{x\neq y}\frac{||\nabla g(x)-\nabla g(y)||}{||x-y||^a}$$

Proof. (By 清疏竞赛数学) 引理: 设 $f\in C^1(\mathbb{R})$ 且是非负函数, 对 $a>0$, 则有

$$|f'(x)|^{a+1}\leqslant\left(\frac{a+1}{a}\right)^a f^a(x)\sup_{x\neq y}\frac{|f'(x)-f'(y)|}{|x-y|^a}$$

引理证明: 无妨设

$$f(x)>0,\ \sup_{x\neq y}\frac{|f'(x)-f'(y)|}{|x-y|^a}=1$$

否则用

$$\frac{1}{\sup\limits_{x\neq y}\frac{|f'(x)-f'(y)|}{|x-y|^a}}f(x)+\varepsilon\text{代替}f(x)\text{, 并令}\varepsilon\to 0^+\text{即可}$$

我们不妨仅证对某个固定的 x, $f'(x)>0$ 的情形.

事实上

$$\begin{aligned}
f(x)&>f(x)-f\left(x-[f'(x)]^{\frac{1}{a}}\right)\\
&=\int_{x-[f'(x)]^{\frac{1}{a}}}^{x}f'(t)\,dt\\
&\geqslant\int_{x-[f'(x)]^{\frac{1}{a}}}^{x}f'(x)-|t-x|^a\,dt\\
&=[f'(x)]^{1+\frac{1}{a}}-\int_0^{[f'(x)]^{\frac{1}{a}}}t^a dt\\
&=\frac{a}{a+1}[f'(x)]^{1+\frac{1}{a}}
\end{aligned}\tag{39}$$

我们完成了引理的证明.

对于原来的命题, 我们不妨设 $g(x_0)=0$, 对 $w\in\partial B_1\triangleq\{w\in\mathbb{R}^n:|w|=1\}$, 令 $f(t)=g(x+tw)\in C^1(\mathbb{R})$, 并且成立

$$f'(t)=\sum_{i=1}^n w_i\frac{\partial g}{\partial x_i}(x+tw)$$

由引理, 我们有

$$|f'(t)|\leqslant\left(\frac{a+1}{a}\right)^{\frac{a}{a+1}} f^{\frac{a}{a+1}}(t)\,[\sup_{x\neq y}\frac{|f'(x)-f'(y)|}{|x-y|^a}]^{\frac{1}{a+1}}$$

故有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\partial g}{\partial x_i}(x+tw)\right| \leqslant \left(\frac{a+1}{a}\right)^{\frac{a}{a+1}} f^{\frac{a}{a+1}}(t)[\sup_{x\neq y} \frac{|f'(x)-f'(y)|}{|x-y|^a}]^{\frac{1}{a+1}}$$

令 $t=0$, 就有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\partial g(x)}{\partial x_i}\right| \leqslant \left(\frac{a+1}{a}\right)^{\frac{a}{a+1}} g^{\frac{a}{a+1}}(x)[\sup_{x\neq y} \frac{|f'(x)-f'(y)|}{|x-y|^a}]^{\frac{1}{a+1}}$$

注意到

$$\begin{aligned} |f'(t_1)-f'(t_2)| &= \left|\sum_{i=1}^{n} w_i \left[\frac{\partial g}{\partial x_i}(x+t_1w) - \frac{\partial g}{\partial x_i}(x+t_2w)\right]\right| \\ &\leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial g}{\partial x_i}(x+t_1w) - \frac{\partial g}{\partial x_i}(x+t_2w)\right|^2} \\ &\leqslant \sup_{x\neq y} \frac{||\nabla g(x)-\nabla g(y)||}{||x-y||^a}|t_1-t_2|^a \end{aligned} \tag{40}$$

于是

$$\left|\sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\partial g(x)}{\partial x_i}\right| \leqslant \left(\frac{a+1}{a}\right)^{\frac{a}{a+1}} g^{\frac{a}{a+1}}(x)[\sup_{x\neq y} \frac{||\nabla g(x)-\nabla g(y)||}{||x-y||^a}]^{\frac{1}{a+1}}$$

由 w 任意性即得

$$||\nabla g(x)||^{a+1} \leqslant \left(\frac{a+1}{a}\right)^a g^a(x) \sup_{x\neq y} \frac{||\nabla g(x)-\nabla g(y)||}{||x-y||^a}$$

Problem 103

计算

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{\left(1+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{x^k}{k}\right)^{n+1}}{\left(1+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}\right)^{n}}dx$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 注意到

$$\int_0^1 \frac{\left(1+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{x^k}{k}\right)^{n+1}}{\left(1+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}\right)^{n}}dx \leqslant \int_0^1\left(1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{x^k}{k}\right)dx \leqslant \int_0^1 1-\ln(1-x)\,dx<\infty$$

故由控制收敛定理即得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{\left(1+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{x^k}{k}\right)^{n+1}}{\left(1+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}\right)^{n}}dx=\int_0^1(1-\ln(1-x))\,dx=1-\int_0^1\ln x dx=2$$

Problem 104

对某个 $C>0$, 如果有 $n\left(a_n-a_{n-1}\right)\geqslant -C,\ \forall n\geqslant 2$, 且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}=a\in\mathbb{R}$$

证明

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a$$

PROOF. (*By* 清疏竞赛数学) 不妨设 $a=0$, 记

$$b_1=a_1,\ b_n=a_n-a_{n-1},\ \forall n\geqslant 2,\ S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$$

$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

$\forall 1>\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}$, 使得 $|S_n|\leqslant n\varepsilon,\ \forall n\geqslant N$, 于是当 $n\geqslant N$, 有

$$\begin{aligned}
a_n&=\frac{S_{n+[n\sqrt{\varepsilon}]}-S_n}{[n\sqrt{\varepsilon}]}-\frac{1}{[n\sqrt{\varepsilon}]}\left([n\sqrt{\varepsilon}]\,b_{n+1}+\left([n\sqrt{\varepsilon}]-1\right)b_{n+2}+\ldots+b_{n+[n\sqrt{\varepsilon}]}\right)\\
&\leqslant\frac{|S_{n+[n\sqrt{\varepsilon}]}|+|S_n|}{[n\sqrt{\varepsilon}]}+\frac{1}{[n\sqrt{\varepsilon}]}\left([n\sqrt{\varepsilon}]\frac{C}{n+1}+\left([n\sqrt{\varepsilon}]-1\right)\frac{C}{n+2}+\ldots+\frac{C}{n+[n\sqrt{\varepsilon}]}\right)\\
&\leqslant\frac{|S_{n+[n\sqrt{\varepsilon}]}|+|S_n|}{[n\sqrt{\varepsilon}]}+\frac{1}{[n\sqrt{\varepsilon}]}\left([n\sqrt{\varepsilon}]\frac{C}{n}+\left([n\sqrt{\varepsilon}]-1\right)\frac{C}{n}+\ldots+\frac{C}{n}\right)\\
&=\frac{|S_{n+[n\sqrt{\varepsilon}]}|+|S_n|}{[n\sqrt{\varepsilon}]}+\frac{[n\sqrt{\varepsilon}]+1}{2n}C\\
&\leqslant\frac{2n\varepsilon}{[n\sqrt{\varepsilon}]}+\frac{[n\sqrt{\varepsilon}]+1}{2n}C+\varepsilon
\end{aligned}\tag{41}$$

于是我们得到

$$\varlimsup_{n\to\infty}a_n\leqslant 2\sqrt{\varepsilon}+\frac{C}{2}\sqrt{\varepsilon}+\varepsilon$$

另外一方面, 当 $n \geqslant \frac{N}{1-\sqrt{\varepsilon}} > N$, 有 $n - [n\sqrt{\varepsilon}] \geqslant n(1-\sqrt{\varepsilon}) \geqslant N$, 因此

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{S_n - S_{n-[n\sqrt{\varepsilon}]}}{[n\sqrt{\varepsilon}]} + \frac{([n\sqrt{\varepsilon}]-1)\,b_n + ([n\sqrt{\varepsilon}]-2)\,b_{n-1} + ... + b_{n-[n\sqrt{\varepsilon}]+2}}{[n\sqrt{\varepsilon}]} \\
&\geqslant \frac{S_n - S_{n-[n\sqrt{\varepsilon}]}}{[n\sqrt{\varepsilon}]} + \frac{([n\sqrt{\varepsilon}]-1) + ([n\sqrt{\varepsilon}]-2) + ... + 1}{(n-[n\sqrt{\varepsilon}])\,[n\sqrt{\varepsilon}]} \\
&\geqslant -\frac{|S_n| + \left|S_{n-[n\sqrt{\varepsilon}]}\right|}{[n\sqrt{\varepsilon}]} - \frac{C}{2}\frac{[n\sqrt{\varepsilon}]-1}{n-[n\sqrt{\varepsilon}]} \\
&\geqslant -\frac{2n\varepsilon}{[n\sqrt{\varepsilon}]} - \frac{C}{2}\frac{[n\sqrt{\varepsilon}]-1}{n-[n\sqrt{\varepsilon}]} + \varepsilon
\end{aligned} \tag{42}$$

于是我们得到

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n \geqslant -2\sqrt{\varepsilon} - \frac{C}{2}\frac{\sqrt{\varepsilon}}{1-\sqrt{\varepsilon}} + \varepsilon$$

由 ε 任意性即得

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Problem 105

设 $f_1, f_2, ..., f_n \in C^1(\mathbb{R}^n)$, 且满足

$$\lim_{|x|\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} |f_j(x)|^2 = +\infty$$

$\forall y \in \mathbb{R}^n$, 证明 $\exists x_0 \in \mathbb{R}^n$, 使得

$$(Jf)^T(x_0) \cdot f(x_0) = (Jf)^T(x_0) \cdot y$$

这里

$$Jf = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix},\ f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

PROOF. (*By* 清疏竞赛数学) 对 $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, 令

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} |f_i(x) - y_i|^2$$

显然

$$\lim_{|x|\to+\infty} F(x) = +\infty$$

因此 F 存在最小值点 x_0, 故 $\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_0) = 0,\ i = 1, 2, ..., n$, 容易知道此时有

$$(Jf)^T(x_0) \cdot f(x_0) = (Jf)^T(x_0) \cdot y$$

Problem 106

设 X 是 $banach$ 空间,$A : X \to X$ 是有界线性算子, 记

$$S = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A\text{是单射, 但不是满射, 并且有闭值域,}\}$$

证明 S 是 $\mathbb{C}$ 的开子集.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 不妨设 $\lambda = 0 \in S$, 下证 0 是 S 内点, 容易知道 $\exists c > 0$, 使得

$$||Ax|| \geqslant c\,||x||\,,\ \forall x \in X$$

故

$$||\lambda x - Ax|| \geqslant c\,||x|| - |\lambda|\,||x|| \geqslant \frac{c}{2}\,||x||\,,\ \forall\,|\lambda| < \frac{c}{2},\ x \in X$$

由此对 $|\lambda| < \frac{c}{2}$, 显然有 $\lambda I - A$ 是单射和闭值域.

如果此时的某个 λ 是正则值, 则有 $||\,(\lambda I - A)^{-1}\,|| \leqslant \frac{2}{c}$, 注意到

$$\sqrt[n]{||\,(\lambda I - A)^{-n}\,||} \leqslant ||\,(\lambda I - A)^{-1}\,|| \leqslant \frac{2}{c}$$

因此 $(\lambda I - A)^{-1}$ 的谱半径小于等于 $\frac{2}{c}$.

所以 $(\lambda I - A)$ 的谱点绝对值应该大于等于 $\frac{c}{2}$.

注意到 $|\lambda| < \frac{c}{2}$, 因为 0 是 A 的谱点, 所以 λ 也是 $(\lambda I - A)$ 的谱点, 这是一个矛盾, 因此 λ 是 A 的谱点, 故 $\lambda \in S$.

因此 S 是开集.

Problem 107

设 $m,n\in\mathbb{N}$, $f(z)$ 是 $\mathbb{C}$ 上除点 $a_1,a_2,...,a_m$ 外解析的函数, 且满足 $a_i\notin\mathbb{Z}$, 如果还成立

$$\lim_{n\to\infty}\oint_{C_n}|f(z)|\,ds=0$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}f(k)=-\pi\sum_{k=1}^{m}Res_{z=a_k}\{f(z)\cot(\pi z)\}$$

以及

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}(-1)^k f(k)=-\pi\sum_{k=1}^{m}Res_{z=a_k}\{f(z)\csc(\pi z)\}$$

这里

$$C_n=\left\{z=x\pm in\in\mathbb{C}:-\frac{1}{2}-n\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}+n\right\}\bigcup\left\{z=\pm\left(\frac{1}{2}+n\right)+yi\in\mathbb{C}:-n\leqslant y\leqslant n\right\}$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 对 $n\in\mathbb{N}$ 充分大时, 由留数定理

$$\oint_{C_n}f(z)\cot(\pi z)\,dz=\sum_{k=1}^{m}Res_{z=a_k}\{f(z)\cot(\pi z)\}+\sum_{k=-n}^{n}Res_{z=k}\{f(z)\cot(\pi z)\}$$

$$\oint_{C_n}f(z)\csc(\pi z)\,dz=\sum_{k=1}^{m}Res_{z=a_k}\{f(z)\csc(\pi z)\}+\sum_{k=-n}^{n}Res_{z=k}\{f(z)\csc(\pi z)\}$$

注意到

$$Res_{z=k}\{f(z)\cot(\pi z)\}=\lim_{z\to k}(z-k)f(z)\cot(\pi z)=\frac{f(k)}{\pi}$$

$$Res_{z=k}\{f(z)\csc(\pi z)\}=\lim_{z\to k}(z-k)f(z)\csc(\pi z)=\frac{(-1)^k f(k)}{\pi}$$

以及

$$|\oint_{C_n}f(z)\cot(\pi z)\,dz|\leqslant\sup_{z\in C_n}|\cot(\pi z)|\oint_{C_n}|f(z)|\,ds$$

$$|\oint_{C_n}f(z)\csc(\pi z)\,dz|\leqslant\sup_{z\in C_n}|\csc(\pi z)|\oint_{C_n}|f(z)|\,ds$$

直接计算可以知道

$$\sup_{n\geqslant 1}\sup_{z\in C_n}|\cot(\pi z)|<\infty$$

$$\sup_{n\geqslant 1}\sup_{z\in C_n}|\csc(\pi z)|<\infty$$

因此我们得到

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n} f\left(k\right) = -\pi\sum_{k=1}^{m} Res_{z=a_k}\{f\left(z\right)\cot\left(\pi z\right)\}\\&\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}\left(-1\right)^k f\left(k\right) = -\pi\sum_{k=1}^{m} Res_{z=a_k}\{f\left(z\right)\csc\left(\pi z\right)\}\end{aligned}\tag{43}$$

Problem 108

设 a_n 递减到 0, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 证明

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln f(x)}{x^2} dx \text{发散}$$

这里

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^n x^n$$

PROOF. *(By 清疏竞赛数学)* 由 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n^n} = 0$ 知,$f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有定义, 显然 $f(x)$ 是递增的且 $f(x) > 0, \forall x > 0$. 对 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$ 且递增.

$$\begin{aligned}
\int_{b_n}^{b_{n+1}} \frac{\ln f(x)}{x^2} dx &\geqslant \int_{b_n}^{b_{n+1}} \frac{\ln f(b_n)}{x^2} dx \\
&= \ln f(b_n) \int_{b_n}^{b_{n+1}} \frac{1}{x^2} dx \\
&= \ln f(b_n) \left[\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}}\right] \\
&\geqslant \ln(a_n^n b_n^n) \left[\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}}\right] \\
&= n \ln(a_n b_n) \left[\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}}\right]
\end{aligned} \tag{44}$$

只需要 $a_n b_n = c > 1$, 就知道

$$\int_{b_1}^{b_{n+1}} \frac{\ln f(x)}{x^2} dx = \sum_{n=1}^{n} \int_{b_n}^{b_{n+1}} \frac{\ln f(x)}{x^2} dx \geqslant \ln c \cdot \sum_{k=1}^{n} k \left(\frac{1}{b_k} - \frac{1}{b_{k+1}}\right)$$

注意到

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b_k} = \frac{1}{c} \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty$$

由清疏数学公众号曾经的推文知

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{1}{b_k} - \frac{1}{b_{k+1}}\right) = \infty$$

于是我们完成了证明.

Problem 109

设 X 是 Hilbert 空间,$A\in L(X)$ 是酉算子, 则 $A-I$ 可逆的充分必要条件是: 存在 $\delta>0$, 使得

$$E_\theta=\begin{cases}0 & \theta\in(0,\delta)\\ I & \theta\in(2\pi-\delta,2\pi)\end{cases}$$

这里 $\{E_\theta\}_{\theta\in[0,2\pi]}$ 是 A 诱导的谱系, 即 $A=\int_0^{2\pi}e^{i\theta}dE_\theta, E_0=0$.

Proof. (By 清疏竞赛数学) 充分性:

取 $f(\theta)\in C[0,2\pi]$, 使得 $f(\theta)\neq 1,\ \theta\in[0,\delta)\bigcup(2\pi-\delta,2\pi]$ 以及 $f(\theta)=e^{i\theta},\theta\in[\delta,2\pi-\delta]$. 注意到

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}e^{i\theta}dE_\theta&=\int_0^{2\pi}\chi_{[0,\delta)\bigcup(2\pi-\delta,2\pi]}(\theta)e^{i\theta}dE_\theta+\int_0^{2\pi}\chi_{[\delta,2\pi-\delta]}(\theta)f(\theta)dE_\theta\\&=\int_0^{2\pi}\chi_{[0,\delta)\bigcup(2\pi-\delta,2\pi]}(\theta)\left(e^{i\theta}-f(\theta)\right)dE_\theta+\int_0^{2\pi}f(\theta)dE_\theta\\&=\int_0^{2\pi}f(\theta)dE_\theta\end{aligned}\tag{45}$$

这里用到了

$$E[0,\delta)=E_{\delta^-}=0,\ E(2\pi-\delta,2\pi]=E_{2\pi}-E_{2\pi-\delta}=I-I=0$$

故

$$(A-I)^{-1}=\int_0^{2\pi}(f(\theta)-1)^{-1}dE_\theta\in L(X)$$

必要性:

若不然, 不妨设

$$E_{\theta_n}\neq 0,\ \lim_{n\to\infty}\theta_n=0$$

我们取

$$x_n\in E_{\theta_n}X,\ ||x_n||=1,\ \forall n\in\mathbb{N}_+$$

有

$$\begin{aligned}
\left|\left|\left(A-I\right)x_n\right|\right|^2 &= \big(\left(A-I\right)^\star\left(A-I\right)x_n, x_n\big) \\
&= \int_0^{2\pi}\left|e^{i\theta}-1\right|^2 d\left(E_\theta x_n, x_n\right) \\
&= \int_0^{\theta_n}\left|e^{i\theta}-1\right|^2 d\left(E_\theta x_n, x_n\right) \\
&\leqslant \sup_{\theta\in[0,\theta_n]}\left|e^{i\theta}-1\right|^2
\end{aligned} \tag{46}$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{\theta\in[0,\theta_n]}\left|e^{i\theta}-1\right|^2=0$, 这导致 $A-I$ 没有有界逆, 矛盾, 我们完成了证明

Problem 110

若定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=x$, $x\in(0,1]$, 且 $f(x)$ 关于 $x=1$ 对称, 设方程 $f(x)=x+1$ 的所有正实根从小到大排列为 $x_1,x_2,...,x_n$, 证明:

$$\lim_{n\to\infty} e^{4n}[e^{4n}[e^{4n}[x_{2n}-4n]+\frac{1}{e}]+\frac{1}{e^2}]=-\frac{3}{2e^3}$$

以及

$$\lim_{n\to\infty} e^{4n}[e^{4n}[e^{4n}[x_{2n-1}-4n+2]-e]+e^2]=\frac{3e^3}{2}$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 显然.

Problem 111

设 $f(x)\in C^4[0,1]$, 且满足

$$\int_0^1 f(x)\,dx+3f\left(\frac{1}{2}\right)=8\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} f(x)\,dx$$

证明:

$\exists c\in(0,1)$, 使得 $f^{(4)}(c)=0$.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 我们令

三个点处的插值多项式

$$p(x)=[-16f\left(\frac{1}{2}\right)+8f\left(\frac{1}{4}\right)+8f\left(\frac{3}{4}\right)]x^2+[16f\left(\frac{1}{2}\right)-10f\left(\frac{1}{4}\right)-6f\left(\frac{3}{4}\right)]x-3f\left(\frac{1}{2}\right)+3f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right) \tag{47}$$

$\forall x\in[0,1]$, 取常数 k 满足

$$f(x)-p(x)=\frac{k}{6}\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)$$

我们令

$$g(y)=f(y)-p(y)-\frac{k}{6}(y-\frac{1}{2})\left(y-\frac{1}{4}\right)\left(y-\frac{3}{4}\right)$$

注意到 $g(y)$ 有四个零点 $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{3}{4},x$(计重数).

由罗尔中值定理, 存在 $c(x)\in(0,1)$, 使得 $f^{(3)}(c(x))=k$, 于是

$$f(x)-p(x)=\frac{f^{(3)}(c(x))}{6}\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)$$

注意到

$$\int_0^1 f(x)-p(x)\,dx+3f\left(\frac{1}{2}\right)-3p\left(\frac{1}{2}\right)-8\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} f(x)-p(x)\,dx=0$$

故

$$\int_0^1\frac{f^{(3)}(c(x))}{6}\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)dx-8\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}\frac{f^{(3)}(c(x))}{6}\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)dx=0$$

因此有

$$
\begin{aligned}
&7\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} f^{(3)}\left(c\left(x\right)\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)dx+7\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} f^{(3)}\left(c\left(x\right)\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)dx\\
&=\int_{0}^{\frac{1}{4}} f^{(3)}\left(c\left(x\right)\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)dx+\int_{\frac{3}{4}}^{1} f^{(3)}\left(c\left(x\right)\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)dx
\end{aligned}
\tag{48}
$$

故由积分中值定理有

$$
\begin{aligned}
&7f^{(3)}\left(c_1\right)\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)dx+7f^{(3)}\left(c_2\right)\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)dx\\
&=f^{(3)}\left(c_3\right)\int_{0}^{\frac{1}{4}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)dx+f^{(3)}\left(c_4\right)\int_{\frac{3}{4}}^{1}\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)dx
\end{aligned}
\tag{49}
$$

这里 $0 \leqslant c_3 \leqslant c_2 \leqslant c_1 \leqslant c_4 \leqslant 1$ 于是有

$$
-7f^{(3)}\left(c_1\right)+7f^{(3)}\left(c_2\right)=-9f^{(3)}\left(c_3\right)+9f^{(4)}\left(c_4\right)
$$

由介值定理可以找到

$$
16f^{(3)}\left(c_5\right)=9f^{(3)}\left(c_3\right)+7f^{(3)}\left(c_2\right)=7f^{(3)}\left(c_1\right)+9f^{(4)}\left(c_4\right)=16f^{(3)}\left(c_6\right)
$$

这里 $c_3 \leqslant c_5 \leqslant c_2 \leqslant c_1 \leqslant c_6 \leqslant c_4$, 故 $f^{(3)}\left(c_5\right)=f^{(3)}\left(c_6\right)$.

如果 $c_5=c_6=c_1=c_2$, 显然 $f^{(3)}\left(c_3\right)=f^{(3)}\left(c_4\right)$, $c_3<c_4$, 由罗尔定理,$\exists c\in(0,1)$, 使得 $f^{(4)}\left(c\right)=0$. 我们完成了证明.

Problem 112

给定 $n \in \mathbb{N}_+$, 设 $f(x) \in C^n[0,1]$, 且 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有 $n+1$ 个互不相同的零点.

证明 : $\exists \zeta \in (0,1)$, 使得 $f^{(n)}(\zeta) = -f(\zeta)$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 我们举几个例子, 一般情形留作之后推文, 当 $n=1$ 时, 只需构造 $g_1(x) = f(x)e^x$, 容易由罗尔中值定理知 : $\exists \zeta \in (0,1)$, 使得 $f^{(1)}(\zeta) = -f(\zeta)$.

当 $n=2$, 令 $g_2(x) = \frac{f(x)}{\cos x}$, 注意到

$$[g_2'(x)\cos^2(x)]' = \cos x\,[f(x) + f''(x)]$$

容易由罗尔中值定理知 : $\exists \zeta \in (0,1)$, 使得 $f^{(2)}(\zeta) = -f(\zeta)$.

当 $n=3$, 令 $g_3(x) = \frac{f(x)}{e^{\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)}$, 注意到

$$[\frac{e^{\frac{3}{2}x}}{\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)}[g_2'(x)\cos^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)]']' = e^x\left(f'''(x) + f(x)\right)$$

容易由罗尔中值定理知 : $\exists \zeta \in (0,1)$, 使得 $f^{(3)}(\zeta) = -f(\zeta)$.

Problem 113

给定 $n \in \mathbb{N}_+$, 设 $f(x) \in C^{2n+2}[0,1]$, 且满足 $f^{(k)}(0) = f^{(k)}(1) = 0,\ k = 0,1,2,\cdots,n-1$.

证明 :

(1) : 若 $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, 则存在 $c_1 \in (0,1)$, 使得 $f^{(2n+1)}(c_1) = 0$.

(2) : 若 $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} f\left(\frac{1}{2}\right)$, 则存在 $c_2 \in (0,1)$, 使得 $f^{(2n+2)}(c_2) = 0$.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 令

$$p(x) = x^n (1-x)^n \left[2^{2n} f'\left(\frac{1}{2}\right) x + 2^{2n} f\left(\frac{1}{2}\right) - 2^{2n-1} f'\left(\frac{1}{2}\right)\right]$$

对 $x \in [0,1]$, 取常数 k 满足

$$f(x) = p(x) + \frac{k}{(2n+2)!} x^n (x-1)^n \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

令

$$h(y) = f(y) - p(y) - \frac{k}{(2n+2)!} y^n (y-1)^n \left(y - \frac{1}{2}\right)^2$$

注意到

$$h(x) = h^{(j)}(0) = h^{(j)}(1) = h\left(\frac{1}{2}\right) = h'\left(\frac{1}{2}\right) = 0,\ j = 0,1,\cdots,n-1$$

于是由罗尔中值定理, 存在 $\theta(x) \in (0,1)$, 使得 $h^{(2n+2)}(\theta(x)) = 0$. 于是

$$f(x) = p(x) + \frac{f^{(2n+2)}(\theta(x))}{(2n+2)!} x^n (x-1)^n \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

又

$$\int_0^1 p(x)\,dx = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} f\left(\frac{1}{2}\right)$$

因此

$$\int_0^1 \frac{f^{(2n+2)}(\theta(x))}{(2n+2)!} x^n (x-1)^n \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx = 0$$

显然 $f^{(2n+2)}(\theta(x)) \in C[0,1]$.

由积分中值定理

$$f^{(2n+2)}(\theta(\zeta)) \int_0^1 \frac{1}{(2n+2)!} x^n (x-1)^n \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx = 0,\ \zeta \in [0,1]$$

令 $c_2 = \theta(\zeta) \in (0,1)$, 这就是 $f^{(2n+2)}(c_2) = 0$.

构造 $g(x) = f(x) - p(x)$, 注意到 $g(x)$ 满足 $g^{(j)}(0) = g^{(j)}(1) = g\left(\frac{1}{2}\right) = g'\left(\frac{1}{2}\right) = 0,\ j = 0,1,\cdots,n-1$. 由罗尔中值定理, 存在 $c_1 \in (0,1)$, 使得 $g^{(2n+1)}(c_1) = 0$, 这就是 $f^{(2n+1)}(c_1) = 0$. 我们完成了证明.

Problem 114

证明

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\prod_{k=1}^{n}\frac{e^{1-\frac{1}{k}}}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}}=\frac{\sqrt{2\pi}}{e^{1+\gamma}}$$

这里

$$\gamma\triangleq\lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n)$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 事实上

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\prod_{k=1}^{n}\frac{e^{1-\frac{1}{k}}}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}} &= \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\prod_{k=1}^{n}\frac{e^{1-\frac{1}{k}}}{\frac{(k+1)^{k}}{k^{k}}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\prod_{k=1}^{n}\frac{(k+1)\,e^{1-\frac{1}{k}}}{\frac{(k+1)^{k+1}}{k^{k}}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\frac{(n+1)!e^{n-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}}{(n+1)^{n+1}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\frac{n!e^{n-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}}{(n+1)^{n}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\frac{\sqrt{2\pi n}\frac{n^{n}}{e^{n}}e^{n-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}}{(n+1)^{n}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2\pi}n^{n}e^{\ln n-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}}{(n+1)^{n}}\\
&= \lim_{n\to\infty}e^{n\ln\frac{n}{n+1}}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt{2\pi}e^{\ln n-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}\\
&= \lim_{n\to\infty}e^{n[\frac{n}{n+1}-1]}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt{2\pi}e^{-\gamma}\\
&= e^{-1}\cdot\sqrt{2\pi}e^{-\gamma}=\frac{\sqrt{2\pi}}{e^{1+\gamma}}
\end{aligned}\tag{50}$$

Problem 115

(1) : $f\left(x\right)\in R\left[a,b\right]$, $g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的非负递减函数, 则存在 $\zeta\in[a,b]$, 使得

$$\int_a^b f\left(x\right)g\left(x\right)dx=g\left(a\right)\int_a^{\zeta} f\left(x\right)dx$$

(2) : $f\left(x\right)\in R\left[a,b\right]$, $g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的非负递增函数, 则存在 $\zeta\in[a,b]$, 使得

$$\int_a^b f\left(x\right)g\left(x\right)dx=g\left(b\right)\int_{\zeta}^{b} f\left(x\right)dx$$

(3) : $f\left(x\right)\in R\left[a,b\right]$, $g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的单调函数, 则存在 $\zeta\in[a,b]$, 使得

$$\int_a^b f\left(x\right)g\left(x\right)dx=g\left(a\right)\int_a^{\zeta} f\left(x\right)dx+g\left(b\right)\int_{\zeta}^{b} f\left(x\right)dx$$

(4) : $f\left(x\right)\in R\left[a,b\right]$ 且不变号, $g(x)\in R[a,b]$, 则存在 η 介于 $g(x)$ 上下确界之间, 使得

$$\int_a^b f\left(x\right)g\left(x\right)dx=\eta\int_a^{b} f\left(x\right)dx$$

(5) : $f\left(x\right)\in R\left[a,b\right]$ 且不变号, $g(x)\in C[a,b]$, 则存在 $\zeta\in(a,b)$, 使得

$$\int_a^b f\left(x\right)g\left(x\right)dx=g\left(\zeta\right)\int_a^{b} f\left(x\right)dx$$

(6) : 若 (1), (2), (3) 中再加入条件 $g(x)$ 在 (a,b) 中不为常数, 则结论可以加强到 $\zeta\in(a,b)$

Proof. *(By 清疏竞赛数学)*

(1), (2) 是完全类似的, 我们仅仅证明 (1), 这里给出两种方法.

方法一:

$F\left(x\right)=\int_a^x f\left(x\right)dx$ 是连续的, 对

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,\ \lambda=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i-x_{i-1}|$$

我们知道

$$\begin{aligned}
(R)\int_a^b g(x)f(x)\,dx &= \lim_{\lambda\to0^+}\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,g(x)\,dx \\
&= \lim_{\lambda\to0^+}\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\left[g(x)-g(x_i)\right]dx + \lim_{\lambda\to0^+}\sum_{i=1}^n g(x_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \\
&= \lim_{\lambda\to0^+}\sum_{i=1}^n g(x_i)\left[F(x_i)-F(x_{i-1})\right] \\
&= \lim_{\lambda\to0^+}\{\sum_{i=1}^n[g(x_i)F(x_i)-g(x_{i-1})F(x_{i-1})]+\sum_{i=1}^n[g(x_{i-1})-g(x_i)]F(x_{i-1})\} \\
&= g(b)F(b)-\lim_{\lambda\to0^+}\sum_{i=1}^n[g(x_i)-g(x_{i-1})]F(x_{i-1})
\end{aligned} \tag{51}$$

这里用到了

$$\lim_{\lambda\to0^+}|\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\left[g(x)-g(x_i)\right]dx| \leqslant \lim_{\lambda\to0^+}\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|\sum_{i=1}^n w_i(g)(x_i-x_{i-1})=0$$

这里 $w_i(g)$ 是 g 在 $[x_{i-1},x_i]$ 的振幅.

注意到

$$g(b)F(b)-\lim_{\lambda\to0^+}\sum_{i=1}^n[g(x_i)-g(x_{i-1})]F(x_{i-1})\leqslant Mg(b)-M\sum_{i=1}^n\left[g(x_i)-g(x_{i-1})\right]=Mg(a)$$

$$g(b)F(b)-\lim_{\lambda\to0^+}\sum_{i=1}^n[g(x_i)-g(x_{i-1})]F(x_{i-1})\geqslant mg(b)-m\sum_{i=1}^n\left[g(x_i)-g(x_{i-1})\right]=mg(a)$$

这里

$$m\triangleq\min_{x\in[a,b]}F(x)\,,\ M\triangleq\max_{x\in[a,b]}F(x)\,,$$

故由连续函数的介值定理, 存在 $\zeta\in[a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx=g(a)\int_a^\zeta f(x)\,dx$$

方法二: 因为 $F(x)=\int_a^x f(x)\,dx$ 是绝对连续的,$g(x)$ 是有界变差的, 所以 m<F<M

$$(R)\int_a^b g(x)f(x)\,dx=-(S)\int_a^b[-g(x)]dF(x)=g(b)F(b)+(S)\int_a^b F(x)\,d(-g(x))\in[mg(a)\,,Mg(a)]$$

这里用到了 $R-S$ 积分, 故由连续函数的介值定理, 存在 $\zeta\in[a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx=g(a)\int_a^\zeta f(x)\,dx$$

注意这里方法二本质和方法一一样, 仅仅只是方法二用已有的工具可以快速证明这个命题.

(3) : 不妨设 $g(x)$ 递增, 则存在 $\zeta\in[a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)\,[g(b)-g(x)]\,dx=[g(b)-g(a)]\int_a^\zeta f(x)\,dx$$

整理即得

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx=g(a)\int_a^\zeta f(x)\,dx+g(b)\int_\zeta^b f(x)\,dx$$

(4), (5) : 我们仅证 (5), (4) 是显然的, 当 $\int_0^1 f(x)\,dx=0$, 则 $f(x)=0,\ a.e$, 故 $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx=0$, 于是 ζ 可随便取点.

当 $\int_0^1 f(x)\,dx\neq 0$, 不妨设 $\int_0^1 f(x)\,dx=1$, 注意到

$$\int_a^b\left[g(x)-\int_a^b f(y)\,g(y)\,dy\right]f(x)\,dx=0$$

如果 $g(x)-\int_a^b f(y)\,g(y)\,dy$ 在开区间 (a,b) 不为 0, 则不妨设 $g(x)-\int_a^b f(y)\,g(y)\,dy>0,\ x\in(a,b)$, 则

$$g(x)-\int_a^b f(y)\,g(y)\,dy=0,\ a.e\text{于测度}f(x)\,dx$$

这和 $\int_{(a,b)} f(x)\,dx=1$ 矛盾.

(6) : 在 (1) 的情况下, 若 $g(a)=0$, 则 $g(x)=0$, ζ 可随便取点, 于是无妨设 $g(a)=1$, 从上面证明过程我们知道, 记

$$k=F(b)\,g(b)+(S)\int_a^b F(x)\,d(-g(x))$$

则有

$$0=[F(b)-k]\,g(b)+(S)\int_a^b[F(x)-k]d(-g(x))$$

又极限条件告诉我们 $\exists[c,d]\subset(a,b)$, 使得 $g(c)>g(d)$, 此时

$$\int_a^b[F(x)-k]\,d(-g(x))\geqslant\int_c^d[F(x)-k]\,d(-g(x))\geqslant\min_{x\in[c,d]}{}'(F(x)-k)\,(g(c)-g(d))>0$$

这是不可能的, (2), (3) 的情况类似可得, 于是我们完成了证明.

Problem 116

设 $g(x)$ 是 R 上右连续的递增函数, 则在闭区间 $[a,b]$ 上, 若 $g(x)$ 在 a 处连续.

则有界函数 $f(x)$ 是依 g $R-S$ 可积的充分必要条件是 $f(x)$ 依 g 诱导的 $L-S$ 测度几乎处处连续, 且此时

$$(R-S)\int_a^b f(x)\,dg=(L-S)\int_a^b f(x)\,dg$$

Proof. (By 清疏竞赛数学) 我们首先指出 $g(x)$ 在 a 处连续是不可省略的, 事实上

$$(R-S)\int_a^b 1dg=g(b)-g(a)$$
$$(L-S)\int_a^b 1dg=g(b)-g\left(a^-\right)$$

因此若 $(R-S)\int_a^b 1dg=(L-S)\int_a^b 1dg$, 必有 $g(a)=g\left(a^-\right)$.

对

$$a=x_0^{(n)}<x_1^{(n)}<x_2^{(n)}<\cdots<x_{m_n}^{(n)}=b,\ \lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant i\leqslant m_n}\left|x_i^{(n)}-x_{i-1}^{(n)}\right|=0$$

且设这些分点除 b 外都是 g 的连续点, 令

$$h_n(x)=\begin{cases}M_i^{(n)}-m_i^{(n)} & x\in(x_{i-1}^{(n)},x_i^{(n)}],\ i=1,2,\cdots,m_n\\ 0 & x=a\end{cases}$$

这里

$$M_i^{(n)}\triangleq\sup_{x\in\left[x_{i-1}^{(n)},x_i^{(n)}\right]}f(x),\ m_i^{(n)}\triangleq\inf_{x\in\left[x_{i-1}^{(n)},x_i^{(n)}\right]}f(x),\ i=1,2,\cdots,m_n$$

注意到这里为了让 $h_n(a)$ 的值不干扰信息, 所以我们只能让 0 处的测度为 0, 即需要 $g(0)=g\left(0^-\right)$, 且 $P\triangleq\left\{x_i^{(n)}:i=1,2,\cdots,m_{n-1},\ n\in\mathbb{N}_+\right\}$ 是至多可数集.

注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}h_n(b)=w_f(b)$, $\lim\limits_{n\to\infty}h_n(x)=w_f(x)$, $x\notin P$, 这里

$$w_f(x)\triangleq\lim_{\delta\to0^+}\sup\left\{|f(z)-f(y)|:z,y\in[x-\delta,x+\delta]\bigcap[a,b]\right\}$$

又 P 是依 g 的 0 测集, 所以

$$\lim_{n\to\infty}(L-S)\int_a^b h_n(x)\,dg=(L-S)\int_a^b w_f(x)\,dg$$

另外一方面

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(L-S)\int_a^b h_n(x)\,dg &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m_n}\left(M_i^{(n)}-m_i^{(n)}\right)\left[g\left(x_i^{(n)}\right)-g\left(x_{i-1}^{(n)}\right)\right] \\ &= (\text{上})\int_a^b f(x)\,dg-(\text{下})\int_a^b f(x)\,dg\end{aligned} \tag{52}$$

于是我们有有界函数 $f(x)$ 是依 g $R-S$ 可积的充分必要条件是 $w_f(x)=0$, $a.e$于测度g, 即 $f(x)$ 依 g 诱导的 $L-S$ 测度几乎处处连续.

又对依 g $R-S$ 可积的函数 $f(x)$, 我们令

$$k_n(x)=\begin{cases}M_i^{(n)} & x\in(x_{i-1}^{(n)},x_i^{(n)}],\ i=1,2,\cdots,m_n\\ 0 & x=a\end{cases}$$

注意到

$$\lim_{n\to\infty}k_n(x)=f(x)\,,\ \text{当}x\text{是}f(x)\text{连续点}$$

我们有

$$\lim_{n\to\infty}(L-S)\int_a^b k_n(x)\,dg=(L-S)\int_a^b f(x)\,dg$$

另外一方面

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(L-S)\int_a^b k_n(x)\,dg &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m_n}M_i^{(n)}\left[g\left(x_i^{(n)}\right)-g\left(x_{i-1}^{(n)}\right)\right] \\ &= (R-S)\int_a^b f(x)\,dg\end{aligned} \tag{53}$$

Problem 117

给定 $n \in \mathbb{N}$, 设 $f(x) \in C^n[a,b)$ 并且满足

$$f^{(n)}(x) \leqslant c_n + c_{n-1}\left|f^{(n-1)}(x)\right| + c_{n-2}\left|f^{(n-2)}(x)\right| + \cdots + c_0\left|f(x)\right|,\ x \in [a,b)$$

证明 : $f(x)$ 在 $[a,b)$ 有上界.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 显然 $n=0$ 成立, 设对一切比 n 小的自然数, 命题都成立.

不妨设 $c_n = c_{n-1} = c_{n-2} = \cdots = c_0 = c > 0$, 否则可以适当调大系数, 不妨设 $b-a$ 足够小, 因为奇性主要在靠近 b 处, 不妨设 $a=0$, 因为可以平移.

设 $x_0^n = c + cx_0 + cx_0^2 + \cdots + cx_0^{n-1},\ x_0 > 0$.

考虑 $f(x) = e^{x_0 x} g(x)$, 显然 $f(x), g(x)$ 是否有上下界是等价的, 且若 f 或者 g 的某阶导数有上界, 则容易运用泰勒中值定理说明 f 有上界.

注意到

$$f^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{k} C_k^j x_0^{k-j} e^{x_0 x} g^{(j)}(x),\ k = 0,1,2,\cdots,n$$

代入不等式有

$$\sum_{j=0}^{n} C_n^j x_0^{n-j} g^{(j)}(x) \leqslant c e^{-x_0 x} + c\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k} C_k^j x_0^{k-j} |g^{(j)}(x)|$$

整理就有

$$g^{(n)}(x) \leqslant c' e^{-x_0 x} + c'\sum_{k=1}^{n-1}\left|g^{(k)}(x)\right| + x_0^n\left[|g(x)| - g(x)\right]$$

如果 $f(x)$ 有下界, 那么上述不等式最后一项会有上界, 所以由归纳假设可以知道 $g'(x)$ 有上界, 从而 $f(x)$ 有上界.

假设 $f(x)$ 无上界且无下界, 记 $d_k = \sup\limits_{x\in[0,x_k]} f^{(n)}(x)$, 这里

$$0 < x_1 < x_2 < \cdots < b,\ \lim_{k\to\infty} x_k = 0,\ f^{(n-1)}(x_k) = 0,\ k = 1,2,\cdots$$

由拉格朗日中值定理, 当 $0 \leqslant x \leqslant x_k$ 时, 有

$$\begin{aligned} &f^{(n-1)}(x) \leqslant f^{(n-1)}(0) + d_k x \leqslant |f^{(n-1)}(0)| + d_k b \\ &f^{(n-1)}(x) \geqslant d_k(x - x_k) \geqslant -|f^{(n-1)}(0)| - d_k b \end{aligned} \tag{54}$$

因此 $\left|f^{(n-1)}(x)\right| \leqslant \left|f^{(n-1)}(0)\right| + d_k b,\ x \in [0, x_k]$, 于是此时对 $x \in [0, x_k]$, $j = 0, 1, 2, \cdots, n-2$ 我们有

$$\begin{aligned}\left|f^{(j)}(x)\right| &= \left|\sum_{i=j}^{n-2} \frac{f^{(i)}(0)\, x^{i-j}}{(i-j)!} + \frac{f^{(n-1)}(\theta)\, x^{n-1-j}}{(n-1-j)!}\right| \\ &\leqslant \sum_{i=j}^{n-1} \frac{\left|f^{(i)}(0)\right| b^{i-j}}{(i-j)!} + \frac{d_k b^{n-j}}{(n-1-j)!}\end{aligned} \tag{55}$$

因此对 $x \in [0, x_k]$, 我们有

$$\begin{aligned}f^{(n)}(x) &\leqslant c + \sum_{j=0}^{n-1} c\left|f^{(j)}(x)\right| \\ &\leqslant c + c\sum_{j=0}^{n-1}\left[\sum_{i=j}^{n-1} \frac{\left|f^{(i)}(0)\right| b^{i-j}}{(i-j)!} + \frac{d_k b^{n-j}}{(n-1-j)!}\right] \\ &\leqslant C + cb^n\left[\sum_{j=0}^{n-1} \frac{b^{-j}}{(n-1-j)!}\right] d_k\end{aligned} \tag{56}$$

于是取 b 充分小, 使得

$$cb^n\left[\sum_{j=0}^{n-1} \frac{b^{-j}}{(n-1-j)!}\right] < \frac{1}{2}$$

此时就有 $d_k \leqslant 2C$, 故 $f(x)$ 有上界, 因此我们完成了证明.

Problem 118

设 $f(x) \in C^1(\mathbb{R})$, 且满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f'(x)]^2 + f^3(x) = 0$.

证明 : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Proof. *(By 清疏竞赛数学)* 注意到 $[f'(x)]^2 + f^3(x)$ 是有界的, 因此 $f(x)$ 是有上界的.

当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在, 显然 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$, 因此 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

若 $\exists x_0 \in \mathbb{R}$, 使得 $f(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 单调递增, 显然必有 $A = 0$.

若 $\exists x_0 \in \mathbb{R}$, 使得 $f(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 单调递减, 则由 $[f'(x)]^2 + f^3(x) = o(1)$, 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, 我们知道

$$\int_{x_0}^{x} \frac{-f'(x)}{\sqrt{o(1) - f^3(x)}} dx = x - x_0,\ x > x_0$$

我们有

$$+\infty > \lim_{x\to+\infty} \int_{-f(x_0)}^{-f(x)} \frac{1}{\sqrt{o(1) - y^3}} dy = \lim_{x\to+\infty} x - x_0 = +\infty$$

这是一个矛盾. 因此 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

若上述情况都不发生, 则必有 $f(x)$ 的一列严格递增的极值点 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$, 此时 $f'(x_n)=0$, $n\in\mathbb{N}_+$, 因此我们有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=0$.

若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|f(x)|>0$, 不妨设 $|f(y_n)|>\epsilon_0>0$, $n=1,2,\cdots$, 无妨设假设 $f(y_n)>\epsilon_0>0$, $n=1,2,\cdots$, 这里严格递增的 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=+\infty$.

Problem 119

计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\ln n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt[n+k+1]{n+1}-\sqrt[n+k]{n}}{\sqrt[n+k]{n+1}-\sqrt[n+k]{n}}$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 网友问的原题是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt[n+k+1]{n+1}-\sqrt[n+k]{n}}{\sqrt[n+k]{n+1}-\sqrt[n+k]{n}}$$

容易知道, 当 n 充分大时, 求和的每一项都非正.

我们直接计算有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\ln n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt[n+k+1]{n+1}-\sqrt[n+k]{n}}{\sqrt[n+k]{n+1}-\sqrt[n+k]{n}}&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\ln n}\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-\frac{\ln n}{(n+k)(n+k+1)}}-1}{e^{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+k}}-1}\\&=\lim_{n\to\infty}-\frac{1}{n\ln n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n\ln n}{n+k+1}\\&=\lim_{n\to\infty}-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k+1}{n}}=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln 2\end{aligned}\tag{57}$$

这里第二排的等号可以如此得, 注意到当 $x,y\to 0^+$, 有

$$\begin{aligned}\frac{e^{-x}-1}{e^{y}-1}&=\frac{-x+O\left(x^2\right)}{y+O\left(y^2\right)}\\&=\left[\frac{-x}{y}+\frac{O\left(x^2\right)}{y}\right]\cdot\left[1+O\left(y\right)\right]\\&=\frac{-x}{y}+\frac{O\left(x^2\right)}{y}+O\left(x\right)\end{aligned}\tag{58}$$

于是注意到

$$\frac{1}{n\ln n}\sum_{k=1}^{n}\frac{O\left(\frac{\ln n}{(n+k)(n+k+1)}\right)^2}{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+k}}\leqslant\frac{C}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln n}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(n+k\right)\left(n+k+1\right)^2}=O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$$

以及

$$\frac{1}{n\ln n}\sum_{k=1}^{n}O\left(\frac{\ln n}{\left(n+k\right)\left(n+k+1\right)}\right)\leqslant\frac{C}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

因此我们实际上有

$$\frac{1}{n\ln n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt[n+k+1]{n+1}-\sqrt[n+k]{n}}{\sqrt[n+k]{n+1}-\sqrt[n+k]{n}}=-\ln 2+O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$$

Problem 120

设

$$a_1=\frac{1}{2},\ 3a_{n+1}^2=a_n+2a_n^2$$

估计 a_n 的渐进性.

Proof. (By 清疏竞赛数学) 注意到 $a_{n+1}=\sqrt{\frac{a_n+2a_n^2}{3}}$, $a_2=\sqrt{\frac{1}{3}}>a_1=\frac{1}{2}$, 显然有不动点 1, 因此显然 a_n 递增趋于 1.

令 $b_n=1-a_n$ 注意到

$$\frac{1}{b_{n+1}}=\frac{1}{1-\sqrt{\frac{1-b_n+2(1-b_n)^2}{3}}}=\frac{6}{5b_n}-\frac{1}{50}-\frac{49}{3000}b_n+O\left(b_n^2\right)$$

于是我们有

$$\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}\frac{1}{b_{n+1}}-\left(\frac{5}{6}\right)^n\frac{1}{b_n}=-\frac{1}{50}\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}+o\left(\left(\frac{5}{6}\right)^n\right)$$

求和有

$$\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}\frac{1}{b_{n+1}}=c-\frac{1}{60}\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^k+\sum_{k=n+1}^{\infty}o\left(\left(\frac{5}{6}\right)^k\right)$$

于是

$$\frac{1}{b_n}=c\left(\frac{6}{5}\right)^n-\frac{1}{10}\left(\frac{5}{6}\right)^n+o\left(\left(\frac{5}{6}\right)^n\right)$$

所以

$$b_n=\frac{1}{c}\left(\frac{5}{6}\right)^n-\frac{10}{c^2}\left(\frac{5}{6}\right)^{2n}+o\left(\left(\frac{5}{6}\right)^{2n}\right)$$

记 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{6}{5}\right)^n(1-a_n)=C>0$, 我们就有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6}{5}\right)^n\left[\left(\frac{6}{5}\right)^n(1-a_n)-C\right]=-10C^2$$

Problem 121

设 $g(x) \in H^1(\mathbb{R}^n)$, $g^\epsilon = g \star \eta_\epsilon$, 这里 η_ϵ 为磨光子, 证明存在 $C > 0$, 使得

$$\|\Delta g^\epsilon\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqslant \frac{C}{\epsilon^2} \|\nabla g\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)}$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学)

$$\begin{aligned}
\|\Delta g^\epsilon\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \left\|\int_{\mathbb{R}^n} g(y)\,\Delta_x \eta_\epsilon(x-y)\,dy\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&= \left\|\int_{\mathbb{R}^n} g(y)\,\Delta_y \eta_\epsilon(x-y)\,dy\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&= \left\|\frac{1}{\epsilon^{n+1}}\int_{\mathbb{R}^n} \nabla g(y)\cdot(\nabla\eta)\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)dy\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&= \frac{1}{\epsilon^2}\left\|\int_{\mathbb{R}^n} (\nabla g)(x-\epsilon y)\cdot\nabla\eta(y)\,dy\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&\leqslant \frac{1}{\epsilon^2}\left[\int_{\mathbb{R}^n} \|(\nabla g)(x-\epsilon y)\cdot\nabla\eta(y)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}dy\right]^2 \\
&= \frac{1}{\epsilon^2}\left[\int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\cdot|\nabla\eta(y)|\,dy\right]^2 \\
&= \frac{1}{\epsilon^2}\|\nabla g\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)}\|\nabla\eta\|^2_{L^1(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned} \tag{59}$$

我们完成了证明.

Problem 122

设 $m>0$, 对某个 $k\in\mathbb{Z}$, 有 $\lim\limits_{r\to1^-}(1-r)^k f(r)=c\neq0$, 若 $f(x)\in C[0,1)$, 则成立

$$\int_0^1 r^n f(r)\, e^{-\frac{m}{1-r}}dr\sim\frac{\sqrt{\pi}m^{\frac{1-2k}{4}}e^{-\frac{m}{2}}e^{-2\sqrt{mn}}}{n^{\frac{3-2k}{4}}}c$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 不失一般性, 我们给出一般形式的推导 (这里 $f(x)$ 需要对应假设足够高的光滑性).

若 $f(e^{-r})\, e^{-\frac{m}{1-e^{-r}}-r+\frac{m}{r}}=\sum\limits_{j=-k}^{v}c_jr^j+O(r^{v+1})$,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 r^n f(r)\, e^{-\frac{m}{1-r}}dr &= \int_0^1 e^{n\ln r}f(r)\, e^{-\frac{m}{1-r}}dr\\
&=\int_0^\infty e^{-nr}f\left(e^{-r}\right)e^{-\frac{m}{1-e^{-r}}-r}dr\\
&=\int_0^\delta e^{-nr}f\left(e^{-r}\right)e^{-\frac{m}{1-e^{-r}}-r}dr+O\left(e^{-\frac{\delta n}{2}}\right)\\
&=\int_0^\delta e^{-nr}e^{-\frac{m}{r}}f\left(e^{-r}\right)e^{-\frac{m}{1-e^{-r}}-r+\frac{m}{r}}dr+O\left(e^{-\frac{\delta n}{2}}\right)\\
&=\int_0^\delta e^{-nr}e^{-\frac{m}{r}}[\sum_{j=-k}^{v}c_jr^j+O\left(r^{v+1}\right)]dr+O\left(e^{-\frac{\delta n}{2}}\right)\\
&=\int_0^\infty e^{-nr}e^{-\frac{m}{r}}[\sum_{j=-k}^{v}c_jr^j+O\left(r^{v+1}\right)]dr+O\left(e^{-\frac{\delta n}{2}}\right)\\
&=\sum_{j=-k}^{v}c_j\int_0^\infty e^{-nr}e^{-\frac{m}{r}}r^jdr+O\left(\int_0^\infty e^{-nr-\frac{m}{r}}r^{v+1}dr\right)+O\left(e^{-\frac{\delta n}{2}}\right)\\
&=2\sum_{j=-k}^{v}\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{j+1}{2}}c_jK_{|j+1|}\left(2\sqrt{mn}\right)+O\left(\int_0^\infty e^{-nr-\frac{m}{r}}r^{v+1}dr\right)+O\left(e^{-\frac{\delta n}{2}}\right)\\
&=\sqrt{\pi}\sum_{j=-k}^{v}\frac{c_jm^{\frac{2j+1}{4}}}{n^{\frac{2j+3}{4}}}e^{-2\sqrt{mn}}+O\left(\frac{e^{-2\sqrt{mn}}}{n^{\frac{2v+5}{4}}}\right)
\end{aligned}\tag{60}$$

在我的实际科研中, 需要的是 f 除 1 外解析, 然后成立

$$\int_0^1 r^n f(r)\, e^{-\frac{m}{1-r}}dr\sim\frac{\sqrt{\pi}m^{\frac{1-2k}{4}}e^{-\frac{m}{2}}e^{-2\sqrt{mn}}}{n^{\frac{3-2k}{4}}}c$$

Problem 123

设 $f(x) \in D^2[0,1]$，$f(x) \geqslant 0 \geqslant f'(x)$，$f''(x) \leqslant f(x)$，$f(0)=1$, 证明 : $f'(0) \geqslant -\sqrt{2}$.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 显然 $f'(x)^2 - f^2(x)$ 是递增函数, 于是我们有

$$f'(x)^2 \geqslant f'(x)^2 - f^2(x) \geqslant f'(0)^2 - 1$$

因此

$$f'(x) \leqslant -\sqrt{f'(0)^2 - 1}$$

于是 $f(x) + \sqrt{f'(0)^2 - 1}x$ 递减, 因此

$$\sqrt{f'(0)^2 - 1}x \leqslant f(x) + \sqrt{f'(0)^2 - 1}x \leqslant f(0) = 1$$

于是令 $x=1$, 就有 $f'(0)^2 \leqslant 2$, 这便是 $f'(0) \geqslant -\sqrt{2}$, 我们完成了证明.

Problem 124

固定 $C>0, 0<\delta<\sqrt{C}$, 计算

$$\prod_{i=1}^{n}\int_{-1}^{1}e^{\frac{2C\delta|x|-\delta^2|x|^2}{2a_i^2}}dx$$

的等价无穷大量, 这里

$$a_i>0,\ i=1,2,\cdots,\ 并且\sum_{i=1}^{\infty}a_i<1$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 首先熟知

$$\int_0^x e^{-y^2}dy=\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\frac{1}{2xe^{x^2}}+O\left(\frac{1}{x^3e^{x^2}}\right),\ x\to+\infty$$

于是对 $b>a>0$, 我们有

$$\int_{ax}^{bx}e^{-y^2}dy=\frac{1}{2axe^{a^2x^2}}+O\left(\frac{1}{xe^{b^2x^2}}\right),\ x\to+\infty$$

注意到

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n}\int_{-1}^{1}e^{\frac{2C\delta|x|-\delta^2|x|^2}{2a_i^2}}dx&=\prod_{i=1}^{n}\frac{2\sqrt{2}a_i}{\delta}e^{\frac{C^2}{2a_i^2\delta^2}}\int_{\frac{C-\delta^2}{\sqrt{2}\delta}\frac{1}{a_i}}^{\frac{C}{\sqrt{2}\delta}\frac{1}{a_i}}e^{-y^2}dy\\&=\prod_{i=1}^{n}\frac{2\sqrt{2}a_i}{\delta}e^{\frac{C^2}{2a_i^2\delta^2}}\left[\frac{\delta a_i}{\sqrt{2}\left(C-\delta^2\right)}e^{-\frac{\left(C-\delta^2\right)^2}{2a_i^2\delta^2}}+O\left(a_ie^{-\frac{C^2}{2a_i^2\delta^2}}\right)\right]\\&=\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{2a_i^2}{C-\delta^2}e^{\frac{C^2}{2a_i^2\delta^2}-\frac{\left(C-\delta^2\right)^2}{2a_i^2\delta^2}}+O\left(a_i^2\right)\right]\\&=\prod_{i=1}^{n}a_i^2\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{2}{C-\delta^2}e^{\frac{2C-\delta^2}{2a_i^2}}+O\left(1\right)\right]\\&=\prod_{i=1}^{n}a_i^2\prod_{i=1}^{n}\frac{2}{C-\delta^2}e^{\frac{2C-\delta^2}{2a_i^2}}\prod_{i=1}^{n}\left(1+O\left(e^{-\frac{C-\frac{\delta^2}{2}}{a_i^2}}\right)\right)\end{aligned}\tag{61}$$

注意到

$$\sum_{i=1}^{\infty}|O\left(e^{-\frac{C-\frac{\delta^2}{2}}{a_i^2}}\right)|\leqslant M\sum_{i=1}^{\infty}e^{-\frac{C-\frac{\delta^2}{2}}{a_i^2}}\leqslant M'\sum_{i=1}^{\infty}a_i^2<M'\sum_{i=1}^{\infty}a_i=M'$$

于是我们有

$$\prod_{i=1}^{n}\int_{-1}^{1}e^{\frac{2C\delta|x|-\delta^2|x|^2}{2a_i^2}}dx\sim k\prod_{i=1}^{n}a_i^2\prod_{i=1}^{n}\frac{2}{C-\delta^2}e^{\frac{2C-\delta^2}{2a_i^2}}$$

这里 $k=\prod_{i=1}^{\infty}\left(1+O\left(e^{-\frac{C-\frac{\delta^2}{2}}{a_i^2}}\right)\right)$ 是某个正常数.

Problem 125

对 $(a,b]$ 上的有界函数 $f(x)$, 证明 $(R-S)\int_a^b f(x)\,d[x]$ 存在的充分必要条件是 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 的所有整数点连续, 且积分存在时成立

$$(R-S)\int_a^b f(x)\,d[x]=\sum_{a<x\leqslant b} f(x)$$

Proof. (By 清疏竞赛数学) 显然向下取整函数 $[x]$ 是 $\mathbb{R}$ 上单调递增的右连续函数, 于是我们定义 $[x]^a=\begin{cases}[x] & x\geqslant a\\ [a] & x<a\end{cases}$, 由之前推文 $R-S$ 积分和 $L-S$ 积分关系, 我们知道对依 $[x]$ 的 $R-S$ 可积函数 $f(x)$, 有

$$(R-S)\int_a^b f(x)\,d[x]=(R-S)\int_a^b f(x)\,d[x]^a=(L-S)\int_a^b f(x)\,d[x]^a$$

对于 $[a,b]$ 的非整数点 c, 则 c 的 $L-S$ 测度是 $[c]^a-\lim\limits_{x\to c^-}[x]^a=0$, 对于 $[a,b]$ 的除 a 外的整数点 c, 则 c 的 $L-S$ 测度是 $[c]^a-\lim\limits_{x\to c^-}[x]^a=1$, 因此

$$(R-S)\int_a^b f(x)\,d[x]=(L-S)\sum_{a<k\leqslant b}\int_{\{k\}} f(x)\,d[x]^a=\sum_{a<x\leqslant b} f(x)$$

并且结论叙述的充要条件成立.

推论：当 $f(x)\in C^1[a,b]$, 由 $R-S$ 积分的分部积分公式, 我们有

$$(R-S)\int_a^b f(x)\,d[x]=[b]\,f(b)-[a]\,f(a)-\int_a^b [x]\,f'(x)\,dx=\sum_{a<x\leqslant b} f(x)$$

稍微整理就有

$$\sum_{a<x\leqslant b} f(x)=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b b_1(x)\,f'(x)\,dx+b_1(a)\,f(a)-b_1(b)\,f(b)$$

这里 $b_1(x)=x-[x]-\frac{1}{2}$. 这个结果也是 $E-M$ 公式的动机.

Problem 126

给定实值 $f(x)\in C^1[a,b]$, 设 $f'(x)$ 是单调函数, 并且 $|f'(x)|\leqslant\epsilon<1$, 证明：

存在只依赖于 ϵ 的常数 $C(\epsilon)>0$, 使得

$$|\int_a^b e^{2\pi i f(x)}dx-\sum_{a<x\leqslant b}e^{2\pi i f(x)}|\leqslant C(\epsilon)$$

例如 $C(\epsilon)=\frac{2(1-\pi\epsilon\cot(\pi\epsilon))}{\pi\epsilon}+1$.

Proof. (By 清疏竞赛数学) 记 $b_1(x)=x-[x]-\frac{1}{2}$, $x\in\mathbb{R}$, $[x]$ 表示向下取整, 直接计算, 可以注意到恒等式

$$-\int_a^b e^{2\pi i f(x)}dx+\sum_{a<x\leqslant b}e^{2\pi i f(x)}=\int_a^b b_1(x)\left(e^{2\pi i f(x)}\right)'dx+b_1(a)\,e^{2\pi i f(a)}-b_2(b)\,e^{2\pi i f(b)}$$

运用傅里叶级数 $b_1(x)=-\frac{1}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n\pi x)}{n}=-\frac{1}{2\pi i}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi i n x}-e^{-2\pi i n x}}{n},\quad x\notin\mathbb{Z}$, 于是

$$\begin{aligned}
|\int_a^b e^{2\pi i f(x)}dx-\sum_{a<x\leqslant b}e^{2\pi i f(x)}| &\leqslant |\int_a^b b_1(x)\left(e^{2\pi i f(x)}\right)'dx|+|b_1(a)|+|b_2(b)|\\
&\leqslant |\int_a^b b_1(x)\left(e^{2\pi i f(x)}\right)'dx|+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\\
&=|2\pi\int_a^b f'(x)\,b_1(x)\,e^{2\pi i f(x)}dx|+1\\
&=|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_a^b(f'(x)\,e^{2\pi i(f(x)+nx)}-f'(x)\,e^{2\pi i(f(x)-nx)})dx|+1\\
&=|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_a^b(\frac{f'(x)\,(f'(x)+n)}{f'(x)+n}e^{2\pi i(f(x)+nx)}-\frac{f'(x)\,(f'(x)-n)}{f'(x)-n}e^{2\pi i(f(x)-nx)})dx|+1\\
&\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}[\frac{|f'(a)|}{f'(a)+n}+\frac{|f'(b)|}{f'(b)+n}-\frac{|f'(a)|}{f'(a)-n}-\frac{|f'(b)|}{f'(b)-n}]+1\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}[\frac{2n\,|f'(a)|}{n^2-[f'(a)]^2}+\frac{2n\,|f'(b)|}{n^2-[f'(b)]^2}]+1\\
&\leqslant\frac{4\epsilon}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\epsilon^2}+1=\frac{2\,(1-\pi\epsilon\cot(\pi\epsilon))}{\pi\epsilon}+1=C(\epsilon)
\end{aligned}\tag{62}$$

上述用到了第二积分中值定理, 并且上述积分级数换序可以用如下引理配合控制收敛定理得到.

引理：$|\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}|<2\sqrt{\pi},\ \forall x\in\mathbb{R},n\in\mathbb{N}_+$.

事实上, 不妨设 $x\in(0,2\pi]$, 记 $q=\left[\frac{\sqrt{\pi}}{x}\right]$, 于是

$$\begin{aligned}
|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}| &\leqslant \left|\sum_{k=1}^{q}x\right|+\left|\sum_{k=q+1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right| \\
&= qx+\left|\sum_{k=q+1}^{n-1}\frac{1}{k\,(k+1)}\sum_{j=q+1}^{k}\sin\left(jx\right)+\frac{\sum\limits_{j=q+1}^{n}\sin\left(jx\right)}{n}\right| \\
&= qx+\left|\sum_{k=q+1}^{n-1}\frac{1}{k\,(k+1)}\frac{\cos\left((k+\frac{1}{2})x\right)-\cos\left(\left(q+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\frac{x}{2}}+\frac{\cos\left((n+\frac{1}{2})x\right)-\cos\left(\left(q+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2n\sin\frac{x}{2}}\right| \\
&\leqslant qx+\sum_{k=q+1}^{n-1}\frac{1}{k\,(k+1)}\frac{2}{2\frac{x}{\pi}}+\frac{2}{2n\frac{x}{\pi}}<qx+\frac{\pi}{(q+1)\,x}\leqslant 2\sqrt{\pi}
\end{aligned} \tag{63}$$

完成了引理的证明.

Problem 127

对 $s>1$, 证明

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin(n\ln n)}{\sqrt{n}\ln^s n}\text{收敛}$$

Proof. (By 清疏竞赛数学) 引理 : $\forall c>0$, 成立

$$|\sum_{k=1}^{N}e^{ick\ln k}e^{ikt}|=O\left(\sqrt{N}\right),\ N\to+\infty,\ \text{关于}t\in\mathbb{R}\text{一致}$$

事实上, 只需如下引理的引理 :

设 $f(x)\in C^2[a,b]$, 并且满足 $f''(x)\geqslant\rho>0,\ x\in[a,b]$, 则成立

$$|\sum_{a<n\leqslant b}e^{2\pi if(n)}|\leqslant[|f'(b)-f'(a)|+2]\left[\frac{4}{\sqrt{\rho}}+\frac{4}{\pi}+1\right],\ |\int_a^b e^{2\pi if(x)}dx|\leqslant\frac{4}{\sqrt{\rho}}$$

第二部分证明是容易的, 若 f' 不变号, 不妨设 $f'\geqslant 0$, 注意到

$$\begin{aligned}
|\int_a^b e^{2\pi if(x)}dx|&\leqslant|\int_a^{a+\sqrt{\frac{1}{\rho}}}e^{2\pi if(x)}dx|+|\int_{a+\sqrt{\frac{1}{\rho}}}^{b}e^{2\pi if(x)}dx|\\
&\leqslant\sqrt{\frac{1}{\rho}}+|\int_{f\left(a+\sqrt{\frac{1}{\rho}}\right)}^{f(b)}\frac{e^{2\pi ix}}{f'(f^{-1}(x))}dx|\\
&\leqslant\sqrt{\frac{1}{\rho}}+|\int_{f\left(a+\sqrt{\frac{1}{\rho}}\right)}^{f(b)}\frac{\cos 2\pi x}{f'(f^{-1}(x))}dx|+|\int_{f\left(a+\sqrt{\frac{1}{\rho}}\right)}^{f(b)}\frac{\sin 2\pi x}{f'(f^{-1}(x))}dx|\\
&=\sqrt{\frac{1}{\rho}}+|\frac{1}{f'(b)}\int_{\theta_1}^{f(b)}\cos(2\pi x)\,dx|+|\frac{1}{f'(b)}\int_{\theta_2}^{f(b)}\sin(2\pi x)\,dx|\\
&\leqslant\sqrt{\frac{1}{\rho}}+\frac{2}{2\pi f'(b)}+\frac{2}{2\pi f'(b)}\leqslant\sqrt{\frac{1}{\rho}}+\frac{1}{f'(b)}\\
&\leqslant\sqrt{\frac{1}{\rho}}+\frac{1}{f'\left(a+\sqrt{\frac{1}{\rho}}\right)-f'(a)}\leqslant\sqrt{\frac{1}{\rho}}+\frac{1}{\rho\left(a+\sqrt{\frac{1}{\rho}}-a\right)}=2\sqrt{\frac{1}{\rho}}
\end{aligned}\tag{64}$$

若 f' 变号, 则分别在 f' 不变号区间 (最多 2 个不同的) 类似上面证明即可.

第一部分事实上选出所有 $p\in\mathbb{N}$, 使得存在 $a_p\in[a,b]$, 有 $f'(a_p)=p-\frac{1}{2}$, 因此由 $f'(x)$ 递增性, 记这些 (当然, 可能不存在)p 为 $r,r+1,r+2,\cdots,r+s$, 于是

$$|f'(x)|\leqslant\frac{1}{2},x\in[a,a_r],\ |f'(x)-r|\leqslant\frac{1}{2},x\in[a_r,a_{r+1}],\cdots,|f'(x)-r-s|\leqslant\frac{1}{2},x\in[a_{r+s},b]$$

运用上一习题, 我们有

$$\begin{aligned}
|\sum_{a<n\leqslant b} e^{2\pi i f(n)} &= |\sum_{a<n\leqslant a_r} e^{2\pi i f(n)}| + |\sum_{a_r<n\leqslant a_{r+1}} e^{2\pi i f(n)}| + \cdots + |\sum_{a_{r+s}<n\leqslant b} e^{2\pi i f(n)}| \\
&= |\sum_{a<n\leqslant a_r} e^{2\pi i f(n)}| + |\sum_{a_r<n\leqslant a_{r+1}} e^{2\pi i [f(n)-rn]}| + \cdots + |\sum_{a_{r+s}<n\leqslant b} e^{2\pi i [f(n)-(r+s)n]}| \\
&\leqslant |\sum_{a<n\leqslant a_r} e^{2\pi i f(n)} - \int_a^{a_r} e^{2\pi i f(x)} dx| + \cdots + |\sum_{a_{r+s}<n\leqslant b} e^{2\pi i [f(n)-(r+s)n]} - \int_{a_{r+s}}^{b} e^{2\pi i [f(x)-(r+s)x]} dx| \\
&+ |\int_a^{a_r} e^{2\pi i f(x)} dx| + |\int_{a_r}^{a_{r+1}} e^{2\pi i [f(x)-rx]} dx| \cdots + |\int_{a_{r+s}}^{b} e^{2\pi i [f(x)-(r+s)x]} dx| \\
&\leqslant (s+2)\left(\frac{4}{\pi}+1\right) + (s+2)\frac{4}{\sqrt{\rho}} = [|f'(b)-f'(a)|+2]\left[\frac{4}{\sqrt{\rho}}+\frac{4}{\pi}+1\right]
\end{aligned} \tag{65}$$

接下来不妨设 $t \in [0, 2\pi]$, 令 $f(x) = \frac{cx\ln x + tx}{2\pi}$, 对 $v \in \mathbb{N}$, 注意到 $f''(x) = \frac{c}{2\pi x} \geqslant \frac{c}{2\pi \cdot 2^{v+1}} > 0$, $x \in [2^v, 2^{v+1}]$, 以及

$$f'\left(2^{v+1}\right) - f'\left(2^v\right) = \frac{c\ln 2^{v+1} + c + t - c\ln 2^v - c - t}{2\pi} = \frac{c\ln 2}{2\pi}$$

我们有

$$|\sum_{k=2^v+1}^{2^{v+1}} e^{2\pi i f(k)}| \leqslant [\frac{c\ln 2}{2\pi} + 2]\left(8\sqrt{\frac{\pi}{c}2^v} + \frac{4}{\pi} + 1\right) \leqslant C2^{\frac{v}{2}}$$

这里 C 是与 v 无关的常数.

对 $2^v < N \leqslant 2^{v+1}$ 仍然有

$$|f'(N) - f'(2^v)| = \frac{c\ln\frac{N}{2^v}}{2\pi} \leqslant \frac{c\ln 2}{2\pi},\ f''(x) = \frac{c}{2\pi x} \geqslant \frac{c}{2\pi \cdot 2^{n+1}},\ x \in [2^n, N]$$

因此 $|\sum\limits_{k=2^n+1}^{N} e^{2\pi i f(k)}| \leqslant C2^{\frac{n}{2}}$, 于是：

$$\begin{aligned}
|\sum_{k=1}^{N} e^{ick\ln k} e^{ikt}| &= |\sum_{v=0}^{n-1}\sum_{k=2^v+1}^{2^{v+1}} e^{2\pi i f(k)} + \sum_{k=2^n+1}^{N} e^{2\pi i f(k)}| \\
&\leqslant \sum_{v=0}^{n-1}|\sum_{k=2^v+1}^{2^{v+1}} e^{2\pi i f(k)}| + |\sum_{k=2^n+1}^{N} e^{2\pi i f(k)}| \\
&\leqslant C\sum_{v=0}^{n} 2^{\frac{v}{2}} = C\frac{2^{\frac{n+1}{2}}-1}{\sqrt{2}-1} \leqslant \frac{\sqrt{2}C}{\sqrt{2}-1}\sqrt{N}
\end{aligned} \tag{66}$$

我们完成了引理的证明, 回到原命题 :

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} \frac{e^{ick\ln k}}{\sqrt{k}\ln^{s} k} e^{ikx} &= \sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{1}{\sqrt{k}\ln^{s} k} - \frac{1}{\sqrt{k+1}\ln^{s}(k+1)} \right) \sum_{j=2}^{k} e^{icj\ln j} e^{ijx} + \frac{1}{\sqrt{n}\ln^{s} n} \sum_{j=2}^{n} e^{icj\ln j} e^{ijx} \\
&= \sum_{k=2}^{n-1} O\left(\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}\ln^{s} k} \right) O\left(\sqrt{k} \right) + \frac{O(\sqrt{n})}{\sqrt{n}\ln^{s} n} \\
&= O\left(\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k\ln^{s} k} \right) + O\left(\frac{1}{\ln^{s} n} \right) \\
&= A(x) + O\left(\frac{1}{\ln^{s} n} \right)
\end{aligned}
\tag{67}
$$

这里所有 O 估计都关于 $x \in \mathbb{R}$ 一致, $A(x)$ 是一个关于 x 的连续函数, 原命题是 $c = 1, x = 0$ 的虚部收敛性, 当然成立.

Problem 128

设 $f(x) \in C^1(\mathbb{R})$, 满足如下条件之一 :

(1) : $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) - f^4(x) = 0$;

(2) : $\lim\limits_{x\to+\infty} [f'(x)]^2 + f^3(x) = 0$.

证明 : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Proof. *(By 清疏竞赛数学)* (1) 来自朱尧辰, (2) 来自周民强, 解决他们的方法是类似的.

若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \neq 0$, 则存在严格递增 $x_n \in (0, +\infty)$, 使得 $|f(x_n)| \geqslant \epsilon_0 > 0,\ n = 1, 2, \cdots$, 因为去绝对值之后不等式方向必有一种情况有无穷多项, 故不妨设 $f(x_n) \geqslant \epsilon_0 > 0,\ n = 1, 2, \cdots$, 设 $N \geqslant 1$, 使得

$$|f'(x) - f^4(x)| < \epsilon_0^4,\ |[f'(x)]^2 + f^3(x)| < \epsilon_0^3,\ \forall x > N.$$

假如对任意充分大的 x, $f(x)$ 都不单调, 则必可取 $N < t_1 < x_{n_1} < t_2$, 使得

$$f'(t_1) = f'(t_2) = 0$$

此时

$$|f(t_1)|,\ |f(t_2)| < \epsilon_0$$

于是在 $[t_1, t_2]$ 的内部能取到 $[t_1, t_2]$ 上 $f(x)$ 的最大值点 t, 使得 $f(t) \geqslant \epsilon_0,\ f'(t) = 0$. 但是 $|f(t)| < \epsilon_0$, 矛盾!

当 $f(x)$ 单调递增或者 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在, 分析导数和函数的极限性态显然有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

当 $f(x)$ 单调递减, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, 对于 (1),

设 $\epsilon_0 > 0$, 使得 $f'(x) - f^4(x) > -\epsilon_0, \forall x > x_0$, 于是

$$\int_{x_0}^{x} \frac{f'(x)}{f^4(x) - \epsilon_0} dx > \int_{x_0}^{x} 1 dx$$

左边收敛, 右边无界, 所以矛盾.

对于 (2),

完全类似的, 但是我们顺便写成阶的估计的形式, 更清晰简洁, 事实上有

$$\int_{x_0}^{x} \frac{-f'(x)}{\sqrt{o(1) - f^3(x)}} dx = \int_{x_0}^{x} 1 dx$$

左边收敛, 右边无界, 所以矛盾.

Problem 129

设 $\frac{1}{n}a_{n+1}=a_n^2+2n,\ a_1=5$, 估计 a_n 的渐进.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 首先

$$a_{n+1}=na_n^2+2n^2\geqslant a_n^2,\implies a_n\geqslant 5^{2^{n-1}}$$

然后

$$\ln a_{n+1}=\ln na_n^2+\ln\left(1+\frac{2n}{a_n^2}\right)=2\ln a_n+\ln n+O\left(\frac{n}{5^{2^n}}\right)$$

因此

$$\frac{\ln a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{\ln a_n}{2^n}=\frac{\ln n}{2^{n+1}}+O\left(\frac{n}{5^{2^n}}\right)$$

于是

$$\frac{\ln a_{n+1}}{2^{n+1}}=C-\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\ln k}{2^{k+1}}+\sum_{k=n+1}^{\infty}O\left(\frac{k}{5^{2^k}}\right)$$

又

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=n}^{\infty}\frac{\ln k}{2^{k+1}}}{\frac{\ln n}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{\ln n}{2^{n+1}}}{\frac{\ln(n+1)}{2^{n+1}}-\frac{\ln n}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{2\ln n-\ln(n+1)}=1$$

因此

$$\frac{\ln a_n}{2^n}=C-\frac{\ln n}{2^n}+o\left(\frac{\ln n}{2^n}\right)$$

Problem 130

设 $f(x) \in C^2[a,b]$, $|f''(x)| \geqslant \beta > 0$, $x \in [a,b]$, 证明 : $\forall \epsilon > 0, \{x \in [a,b] : |f(x)| \leqslant \epsilon\}$ 是若干区间的并集, 并证明这些区间长度之和小于等于 $4\sqrt{\frac{\epsilon}{\beta}}$.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 不妨设 $f''(x) > 0$.

事实上, 因为 $f''(x)$ 不变号, 所以 $f(x)$ 是若干区间 (最多两个) 之并集, 且 $f(x)$ 在每个区间上是单调的, 因此当 $f(x)$ 单调递增 (递减时用 $f(-x)$ 代替即可), 此时设

$$x_2 = \sup\{x \in [a,b] : |f(x)| \leqslant \epsilon\}$$

$$x_1 = \inf\{x \in [a,b] : |f(x)| \leqslant \epsilon\}$$

这里不妨假定集合不是空集.

于是

$$2\epsilon \geqslant f(x_2) - f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1) + \frac{f''(\theta)}{2}(x_2 - x_1)^2 \geqslant \frac{\beta(x_2 - x_1)^2}{2}$$

因此

$$diam\{x \in [a,b] : |f(x)| \leqslant \epsilon\} = |x_2 - x_1| \leqslant \sqrt{\frac{4\epsilon}{\beta}} = 2\sqrt{\frac{\epsilon}{\beta}}$$

而单调区间至多有两个, 因此对一般的 $f(x)$, 有

$$diam\{x \in [a,b] : |f(x)| \leqslant \epsilon\} \leqslant 4\sqrt{\frac{\epsilon}{\beta}}$$

Problem 131

设 $c \geqslant 0$, $f(x)=\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+cx^{2^n}\right)$, $x\in(0,1)$, 若 $\lim_{x\to1^-}\frac{f\left(x^3\right)}{f(x)}$ 存在, 求 c 的值.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 事实上 $f(x)\geqslant 1$ 是递增函数, 注意到 $\forall 1>r>0$, $\frac{\ln(1+z)}{z}$ 是 $0\leqslant|z|\leqslant r$ 上的解析函数, 于是 $\exists M_r>0$, 使得 $|\ln(1+z)|\leqslant M_r|z|,\ 0\leqslant|z|\leqslant r$, 因此对充分大的 N, 有

$$\sum_{n=N}^{\infty}\left|\ln\left(1+cz^{2^n}\right)\right|\leqslant cM(r)\sum_{n=N}^{\infty}r^{2^n}<\infty,\ 0\leqslant|z|\leqslant r$$

于是

$$\sum_{n=N}^{\infty}\ln\left(1+cz^{2^n}\right)\text{在}\,|z|<1\text{内闭一致收敛}$$

因此可以得到 $f(x)$ 可解析延拓至单位圆 (这将帮助我们可以用幂级数去刻画这个函数).

若 $\lim_{x\to1^-}\frac{f\left(x^3\right)}{f(x)}=\epsilon_0<1$, 则 $\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)}{f\left(x^{\frac{1}{3}}\right)}=\epsilon_0<1$, 因此对某个 $x_0\in(0,1)$, 有 $f(x)<\frac{1+\epsilon_0}{2}f\left(x^{\frac{1}{3}}\right)$, $x\in(x_0,1)$, 于是

设

$$S\triangleq\left\{s\in\mathbb{R}^+:\lim_{x\to1^-}\frac{f\left(x^s\right)}{f(x)}\text{存在}\right\}$$

并且考虑 $b(s)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x^s)}{f(x)}$, $x\in S$, 显然 $1,2\in S$, $b(1)=1$, $b(2)=\frac{1}{1+c}$, 并且 $b(s)$ 单调递减, 若 $3\in S$, 显然

$$\{3^m2^n:m,n\in\mathbb{Z}\}\subset S,\ b\left(3^m2^n\right)=b^m(3)\,b^n(2),\ m,n\in\mathbb{Z}$$

由初等数学知 $\{3^m2^n:m,n\in\mathbb{Z}\}$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密, 于是对 $r\in\mathbb{R}^+$, 取 $q_1<r<q_2$, $q_1,q_2\in\{3^m2^n:m,n\in\mathbb{Z}\}$, 此时有

$$\frac{f\left(x^{q_1}\right)}{f(x)}\geqslant\frac{f\left(x^{r}\right)}{f(x)}\geqslant\frac{f\left(x^{q_2}\right)}{f(x)}$$

因此

$$b\left(q_1\right)\geqslant\varlimsup_{x\to1^-}\frac{f\left(x^{r}\right)}{f(x)}\geqslant\varliminf_{x\to1^-}\frac{f\left(x^{r}\right)}{f(x)}\geqslant b\left(q_2\right)$$

让 $q_1,q_2\to r$, 我们有 $r\in S$, $b(r)=r^{\gamma}$.

Problem 132

设 $f(x) \in C^2[a,b]$, $f(a)=f(b)=0$, 证明

$$|f(x)| \leqslant \frac{(x-a)(b-x)}{b-a} \int_a^b |f''(y)|\, dy,\ x \in [a,b]$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 注意到

$$f(x) = \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b) + \int_a^b f''(y) K_1(x,y)\, dy$$

这里

$$K_1(x,y) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}(y-b) & b \geqslant y \geqslant x \\ \frac{b-x}{b-a}(a-y) & x \geqslant y \geqslant a \end{cases}$$

显然

$$\left|f(x) - \frac{b-x}{b-a} f(a) - \frac{x-a}{b-a} f(b)\right| \leqslant \int_a^b |f''(y) K_1(x,y)|\, dy \leqslant \frac{(x-a)(b-x)}{b-a} \int_a^b |f''(y)|\, dy$$

我们顺便得到一个经典习题：即当 $f(a)=f(b)=0$, 有

$$|f(x)| \leqslant \frac{b-a}{4} \int_a^b |f''(y)|\, dy$$

Problem 133

设 $f(x) \in C^4[a,b]$, 且 $f(a)=f(b)=f'(a)=f'(b)=0$, 证明：

$$|f(x)| \leqslant \max\left\{\frac{2}{3}\frac{(b-x)^2(x-a)^3}{(2x-3a+b)^2}, \frac{2}{3}\frac{(b-x)^3(x-a)^2}{(2x-3b+a)^2}\right\}\int_a^b \left|f^{(4)}(x)\right| dx$$

Proof. (By 清疏竞赛数学) 注意到

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1+2\frac{x-a}{b-a}\right)\left(\frac{x-b}{a-b}\right)^2 f(a) + \left(1+2\frac{x-b}{a-b}\right)\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2 f(b) \\ &\quad + (x-a)\left(\frac{x-b}{a-b}\right)^2 f'(a) + (x-b)\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2 f'(b) + \int_a^b f^{(4)}(y) K_2(x,y)\, dy \end{aligned} \tag{68}$$

这里

$$K_2(x,y) = \begin{cases} \frac{(b-y)^2(x-a)^2(bx-3ax+2xy+2ba-3by+ay)}{6(a-b)^3} & b \geqslant y \geqslant x \\ \frac{(a-y)^2(x-b)^2(ax-3bx+2xy+2ba-3ay+by)}{6(a-b)^3} & x \geqslant y \geqslant a \end{cases}$$

又

$$\frac{\partial}{\partial y}K_2(x,y) = \begin{cases} \frac{(y-b)(x-a)^2\left((2x+a-3b)y-2ax+ab+b^2\right)}{2(a-b)^3} & b \geqslant y \geqslant x \\ \frac{(y-a)(x-b)^2\left((2x-3a+b)y-2bx+ab+a^2\right)}{2(a-b)^3} & x \geqslant y \geqslant a \end{cases}$$

注意到

$$\begin{aligned} &K_2(x,b)=0,\ K_2(x,x)=\frac{(x-a)^3(b-x)^3}{3(b-a)^3},\ K_2(x,a)=0 \\ &K_2'(x,b)=0,\ K_2'(x,x)=\frac{(x-a)^2(b-x)^2(a+b-2x)}{2(b-a)^3},\ K_2'(x,a)=0 \end{aligned} \tag{69}$$

当 $x \geqslant \frac{a+b}{2}$, 有

$$0 = K_2(x,b) \leqslant K_2(x,y) \leqslant K_2(x,x) = \frac{(x-a)^3(b-x)^3}{3(b-a)^3},\ y \in [x,b]$$

当 $x \leqslant \frac{a+b}{2}$, 有

$$0 \leqslant \min\{K_2(x,b), K_2(x,x)\} \leqslant K_2(x,y) \leqslant K_2\left(x, \frac{-b^2-ab+2ax}{a-3b+2x}\right) = \frac{2}{3}\frac{(b-x)^3(x-a)^2}{(2x-3b+a)^2},\ y \in [x,b]$$

对称的, 当 $x \geqslant \frac{a+b}{2}$,

$$0 \leqslant K_2(x,y) \leqslant \frac{2}{3}\frac{(b-x)^2(x-a)^3}{(2x-3a+b)^2},\ y \in [a,x]$$

当 $x \leqslant \frac{a+b}{2}$,

$$0 \leqslant K_2\left(x,y\right) \leqslant \frac{\left(x-a\right)^3\left(b-x\right)^3}{3\left(b-a\right)^3},\ y \in [a,x]$$

因此当 $f(a)=f(b)=f'(a)=f'(b)=0$ 时

$$\left|f\left(x\right)\right| \leqslant \max\left\{\frac{2}{3}\frac{\left(b-x\right)^2\left(x-a\right)^3}{\left(2x-3a+b\right)^2}, \frac{2}{3}\frac{\left(b-x\right)^3\left(x-a\right)^2}{\left(2x-3b+a\right)^2}\right\}\int_a^b\left|f^{(4)}\left(x\right)\right|dx$$

特别的

$$\left|f\left(x\right)\right| \leqslant \frac{\left(b-a\right)^3}{192}\int_a^b\left|f^{(4)}\left(x\right)\right|dx$$

Problem 134

设 $f(x) \in C^4[a,b]$, 满足 $f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = 0$, 证明

$$\int_a^b \left| \frac{f^{(4)}(x)}{f(x)} \right| dx \geqslant \frac{192}{(b-a)^3}$$

PROOF. (*By* 清疏竞赛数学) 由上一习题, 这是显然的.

Problem 135

设 $f(x) \in C^4[0,1]$, 满足

$$f(x) \geqslant 0,\ f^{(4)}(x) \geqslant 0,\ f'(0) \geqslant 0,\ f'(1) \leqslant 0$$

证明

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx \leqslant \frac{423405}{246064}\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2$$

Proof. (By 清疏竞赛数学) 当 $f(0)=f(1)=f'(0)=f'(1)=0$:

事实上

$$f(x) = \int_0^1 f^{(4)}(y)\,K_2(x,y)\,dy$$

这里

$$K_2(x,y) = \begin{cases} \frac{(1-y)^2x^2(-x-2xy+3y)}{6} & 1 \geqslant y \geqslant x \\ \frac{y^2(1-x)^2(3x-2xy-y)}{6} & x \geqslant y \geqslant 0 \end{cases}$$

运用初等数学或者见上一命题知 $K_2(x,y) \geqslant 0,\ x,y \in [0,1]$. 因此

$$\begin{aligned} \|f\|_2 &\leqslant \int_0^1 f^{(4)}(y)\,\|K_2(x,y)\|_2\,dy \\ &= \frac{\sqrt{35}}{210}\int_0^1 f^{(4)}(y)\,y^2(1-y)^2\sqrt{3-y^2+y}dy \\ &= \frac{\sqrt{35}}{210}\int_0^1 f(y)\,(y^2(1-y)^2\sqrt{3-y^2+y})^{(4)}dy \\ &\leqslant \frac{291\sqrt{455}}{4732}\int_0^1 f(y)\,dy \end{aligned} \tag{70}$$

两边平方即完成证明.

对一般情况, 注意到

$$g(x) = (1+2x)(x-1)^2 f(0) + (3-2x)x^2 f(1) + x(x-1)^2 f'(0) + (x-1)x^2 f'(1) \geqslant 0$$

由 K 值法, 显然存在 $\theta(x) \in [0,1]$, 使得

$$f(x) = g(x) + \frac{f^{(4)}(\theta(x))}{4!}x^2(x-1)^2 \geqslant g(x)$$

注意到

$$||g||_2^2-\frac{423405}{246064}||g||_1^2=\frac{-a_1f^2(0)-a_2f(0)f(1)-a_3f(0)f'(0)+a_4f(0)f'(1)-a_5f^2(1)-a_6f(1)f'(0)}{59055360}+\frac{a_7f(1)f'(1)-a_8[f'(0)]^2+a_9f'(0)f'(1)-a_{10}[f'(1)]^2}{59055360}\leqslant 0 \tag{71}$$

这里 $a_i,1\leqslant i\leqslant 10$ 是某个正数, 于是

$$||f||_2\leqslant ||f-g||_2+||g||_2\leqslant \frac{291\sqrt{455}}{4732}||f-g||_1+\frac{291\sqrt{455}}{4732}||g||_1=\frac{291\sqrt{455}}{4732}||f||_1$$

两边平方即得.

Problem 136

设 $f(x) \in C^4[0,1]$, 满足

$$f(x) \geqslant 0,\ f^{(4)}(x) \geqslant 0,\ f'(0) \geqslant 0,\ f'(1) \leqslant 0$$

证明

$$\int_0^1 f^3(x)\,dx \leqslant \frac{2645165253200}{750184084629}\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^3$$

Proof. (By 清疏竞赛数学) 当 $f(0) = f(1) = f'(0) = f'(1) = 0$:

事实上

$$f(x) = \int_0^1 f^{(4)}(y) K_2(x,y)\,dy$$

这里

$$K_2(x,y) = \begin{cases} \frac{(1-y)^2 x^2(-x-2xy+3y)}{6} & 1 \geqslant y \geqslant x \\ \frac{y^2(1-x)^2(3x-2xy-y)}{6} & x \geqslant y \geqslant 0 \end{cases}$$

运用初等数学或者见上一命题知 $K_2(x,y) \geqslant 0,\ x,y \in [0,1]$. 因此

$$\begin{aligned} ||f||_3 &\leqslant \int_0^1 f^{(4)}(y)\,||K_2(x,y)||_3\,dy \\ &= \frac{1}{420}\int_0^1 f^{(4)}(y)\,y^2(1-y)^2\left(4900y^4 - 9800y^3 - 2450y^2 + 7350y + 11025\right)^{\frac{1}{3}}dy \\ &= \frac{1}{420}\int_0^1 f(y)\,[y^2(1-y)^2\left(4900y^4 - 9800y^3 - 2450y^2 + 7350y + 11025\right)^{\frac{1}{3}}]^{(4)}dy \\ &\leqslant \frac{3754\sqrt[3]{105350}}{116487}\int_0^1 f(y)\,dy \end{aligned} \tag{72}$$

两边立方即完成证明.

对一般情况, 注意到

$$g(x) = (1+2x)(x-1)^2 f(0) + (3-2x)x^2 f(1) + x(x-1)^2 f'(0) + (x-1)x^2 f'(1) \geqslant 0$$

由 K 值法, 显然存在 $\theta(x) \in [0,1]$, 使得

$$f(x) = g(x) + \frac{f^{(4)}(\theta(x))}{4!}x^2(x-1)^2 \geqslant g(x)$$

注意到

$$||g||_3^3 - \frac{2645165253200}{750184084629}\,||g||_1^3 \leqslant 0 \tag{73}$$

于是

$$||f||_3 \leqslant ||f-g||_3 + ||g||_3 \leqslant \frac{3754\sqrt[3]{105350}}{116487}\,||f-g||_1 + \frac{3754\sqrt[3]{105350}}{116487}\,||g||_1 = \frac{3754\sqrt[3]{105350}}{116487}\,||f||_1$$

两边立方即得.

Problem 137

设 $f(x) \in C^4[0,1]$, 满足

$$f(x) \geqslant 0,\ f^{(4)}(x) \geqslant 0,\ f'(0) \geqslant 0,\ f'(1) \leqslant 0$$

证明
$$\int_0^1 f^4(x)\,dx \leqslant \frac{8422874474444440032161}{1060863714547714906 40}\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^4$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 完全类似的, 即这里计算关键的多项式是

$$\frac{1}{4290}y^2(1-y)^2\left(-2924207000y^6+8772621000y^5-5482888125y^4-3655258750y^3+3289732875y+3289732875\right)^{\frac{1}{4}}$$

Problem 138

设 $f(x) \in C^4[0,1]$, 满足

$$f(x) \geqslant 0,\ f^{(4)}(x) \geqslant 0,\ f'(0) \geqslant 0,\ f'(1) \leqslant 0$$

证明

$$\int_0^1 f^5(x)\,dx \leqslant \frac{1579625143170349226699698458098987499 3}{8304886769216582658099980743750000 00}\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^5$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 类似

Problem 139

设 $p_n, q_n > 0,\ n = 0, 1, 2, \cdots$, 且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{P_n}=0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{q_n}{Q_n}=0$$

证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{\sum\limits_{i=0}^{n}r_i}=0$$

这里 $P_n=\sum\limits_{i=0}^{n}p_i,\ Q_n=\sum\limits_{i=0}^{n}q_i,\ r_n=\sum\limits_{j=0}^{n}p_jq_{n-j}$

Proof. (By 清疏竞赛数学) $\forall\varepsilon>0$, 存在 $N_1\in\mathbb{N}$, 有 $q_j\leqslant\varepsilon Q_j,\ p_j\leqslant\varepsilon P_j,\ \forall j\geqslant N_1$.

对 $N=N(n)=\left[\frac{n}{2}\right]$, 当 $n\geqslant 2N_1$, 有 $n-N\geqslant\frac{n}{2}\geqslant N_1,\ N\geqslant\frac{n}{2}-1\geqslant N_1-1$, 于是

$$\begin{aligned}
\frac{r_n}{\sum\limits_{i=0}^{n}r_i}&=\frac{\sum\limits_{j=0}^{n}p_jq_{n-j}}{\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=0}^{i}p_jq_{i-j}}=\frac{\sum\limits_{j=0}^{n}p_jq_{n-j}}{\sum\limits_{j=0}^{n}\sum\limits_{i=j}^{n}p_jq_{i-j}}=\frac{\sum\limits_{j=0}^{n}p_jq_{n-j}}{\sum\limits_{j=0}^{n}\sum\limits_{i=0}^{n-j}p_jq_i}=\frac{\sum\limits_{j=0}^{n}p_jq_{n-j}}{\sum\limits_{j=0}^{n}p_jQ_{n-j}}=\frac{\sum\limits_{j=0}^{n}p_jq_{n-j}+\sum\limits_{j=N+1}^{n}p_jq_{n-j}}{\sum\limits_{j=0}^{N}p_jQ_{n-j}+\sum\limits_{j=N+1}^{n}p_jQ_{n-j}}\\
&=\frac{\sum\limits_{j=0}^{n}p_jq_{n-j}+\sum\limits_{j=N+1}^{n}p_jq_{n-j}}{\sum\limits_{j=0}^{N}p_jQ_{n-j}+\sum\limits_{j=N+1}^{n}\sum\limits_{i=0}^{n-j}p_jq_i}=\frac{\sum\limits_{j=0}^{n}p_jq_{n-j}+\sum\limits_{j=N+1}^{n}p_jq_{n-j}}{\sum\limits_{j=0}^{N}p_jQ_{n-j}+\sum\limits_{i=0}^{n-N-1}\sum\limits_{j=N+1}^{n-i}p_jq_i}=\frac{\sum\limits_{j=0}^{n}p_jq_{n-j}+\sum\limits_{j=N+1}^{n}p_jq_{n-j}}{\sum\limits_{j=0}^{N}p_jQ_{n-j}+\sum\limits_{i=0}^{n-N-1}q_i\left[P_{n-i}-P_N\right]}\\
&=\frac{\sum\limits_{j=0}^{n}p_jq_{n-j}+\sum\limits_{j=N+1}^{n}p_jq_{n-j}}{\sum\limits_{j=0}^{N}p_jQ_{n-j}+\sum\limits_{j=N+1}^{n}q_{n-j}\left[P_j-P_N\right]}\leqslant\frac{\varepsilon\sum\limits_{j=0}^{n}p_jQ_{n-j}+\varepsilon\sum\limits_{j=N+1}^{n}P_jq_{n-j}}{\sum\limits_{j=0}^{N}p_jQ_{n-j}+\sum\limits_{j=N+1}^{n}q_{n-j}\left[P_j-P_N\right]}\\
&=\frac{\varepsilon\sum\limits_{j=0}^{n}p_jQ_{n-j}+\varepsilon\sum\limits_{j=N+1}^{n}q_{n-j}\left[P_j-P_N\right]+\varepsilon P_N\sum\limits_{j=N+1}^{n}q_{n-j}}{\sum\limits_{j=0}^{N}p_jQ_{n-j}+\sum\limits_{j=N+1}^{n}q_{n-j}\left[P_j-P_N\right]}=\varepsilon+\frac{\varepsilon P_N\sum\limits_{j=N+1}^{n}q_{n-j}}{\sum\limits_{j=0}^{n}p_jQ_{n-j}}\\
&\leqslant\varepsilon+\frac{\varepsilon P_N\sum\limits_{j=N+1}^{n}q_{n-j}}{\sum\limits_{j=0}^{N+1}p_jQ_{n-N-1}}=\varepsilon+\frac{\varepsilon P_NQ_{n-N-1}}{P_{N+1}Q_{n-N-1}}\leqslant\varepsilon+\varepsilon+\frac{p_{N+1}}{P_{N+1}}\leqslant 3\varepsilon
\end{aligned}\tag{74}$$

我们完成了证明.

Problem 140

设

$$a_{n+1}\left(a_n-1\right)=a_n\ln a_n,\ a_1=\frac{1}{2}$$

证明, 存在 $c>0$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}2^n\left[2^n\left(1-a_n\right)-c\right]=-\frac{2}{3}c^2$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 令 $b_n=1-a_n$, 于是

$$b_{n+1}=1+\frac{\left(1-b_n\right)\ln\left(1-b_n\right)}{b_n},\ b_1=\frac{1}{2}$$

显然 b_n 递减到 0. 注意到

$$\frac{1}{b_{n+1}}=\frac{2}{b_n}-\frac{2}{3}+O\left(b_n\right)$$

于是

$$\frac{1}{2^{n+1}b_{n+1}}-\frac{1}{2^nb_n}=-\frac{1}{3\cdot 2^n}+O\left(\frac{b_n}{2^n}\right)=-\frac{1}{3\cdot 2^n}+o\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

因此

$$\frac{1}{2^{n+1}b_{n+1}}=C+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{3\cdot 2^k}+\sum_{k=n+1}^{\infty}o\left(\frac{1}{2^k}\right)=C+\frac{1}{3\cdot 2^n}+o\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

因此

$$b_n=\frac{1}{C2^n+\frac{2}{3}+o\left(1\right)}=\frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2^n}+C}\frac{1}{1+o\left(\frac{1}{2^n}\right)}=\frac{1}{C}\frac{1}{2^n}-\frac{2}{3C^2}\frac{1}{4^n}+o\left(\frac{1}{4^n}\right)$$

因此

$$a_n=1-\frac{c}{2^n}+\frac{2c^2}{3}\frac{1}{4^n}+o\left(\frac{1}{4^n}\right),\ c>0$$

Problem 141

设 $f(x) \in C[0,1]$, 证明

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\cos^2 x\right) \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x) \cos x dx$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 给定 $n \in \mathbb{N}$, 注意到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x \cdot \cos x dx = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n 2x \cdot \cos x dx$$

于是对任意多项式 $p(x)$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} p\left(\cos^2 x\right) \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} p(\sin 2x) \cos x dx$$

因此由第一逼近定理, 存在多项式 p_n, 使得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\cos^2 x\right) \cos x dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} p_n\left(\cos^2 x\right) \cos x dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} p_n(\sin 2x) \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x) \cos x dx$$

我们完成了证明.

Problem 142

定义在 (a,b) 上的函数 $f(t)$ 满足

$$\tilde{f}(t)=\lim_{h\to 0^+} f(t+h)\text{存在},\ \forall t\in(a,b)$$

则 $\tilde{f}(t)$ 是 (a,b) 上右连续函数

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 给定 $t_0\in(a,b)$, 有

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \tilde{f}(t_0)-\varepsilon\leqslant f(t)\leqslant\tilde{f}(t_0)+\varepsilon,\ \forall t\in(t_0,t_0+\delta)\bigcap(a,b)$$

对任意 $t\in(t_0,t_0+\delta)\bigcap(a,b)$, 显然有

$$\tilde{f}(t_0)-\varepsilon\leqslant\tilde{f}(t)\leqslant\tilde{f}(t_0)+\varepsilon$$

因此 $\tilde{f}(t)$ 在 (a,b) 上右连续.

Problem 143

证明：$[a,b]$ 上复值有界变差函数 v 的实部和虚部都是实值有界变差函数, 且当 u 实部和虚部都是 $[a,b]$ 上实值有界变差函数时, u 是复值有界变差函数.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 设 f,g 是 $[a,b]$ 上实值有界变差函数, 则对划分

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$$

有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\left|f\left(x_i\right)+\sqrt{-1}g\left(x_i\right)-f\left(x_{i-1}\right)-\sqrt{-1}g\left(x_{i-1}\right)\right| &= \sum_{i=1}^{n}\sqrt{\left|f\left(x_i\right)-f\left(x_{i-1}\right)\right|^2+\left|g\left(x_i\right)-g\left(x_{i-1}\right)\right|^2} \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n}\left|f\left(x_i\right)-f\left(x_{i-1}\right)\right|+\sum_{i=1}^{n}\left|g\left(x_i\right)-g\left(x_{i-1}\right)\right| \\ &\leqslant \bigvee_a^b f+\bigvee_a^b g\end{aligned} \tag{75}$$

设 $v=f+ig$ 是复值有界变差函数, 则显然 $\bar{v}$ 是有界变差函数, 且 $\bigvee\limits_a^b \bar{v}=\bigvee\limits_a^b v$, 于是 $f=\frac{v+\bar{v}}{2}$, $g=\frac{v-\bar{v}}{2i}$ 也是有界变差函数, 我们完成了证明.

Problem 144

对定义在 $[a,b]$ 上的有界函数 $f(x)$, 设

$$(R-S)\int_a^b f(x)\,dg(x),\ (R-S)\int_a^b f(x)\,dh(x)\text{存在}$$

且满足这里 $g(x), h(x)$ 是 $[a,b]$ 上的函数, 满足：

$(1): g(a)=h(a)$,

$(2): g(b)=h(b)$,

$(3): g(x)=h(x)$ 的点在(a,b)中稠密. 则有

$$(R-S)\int_a^b f(x)\,dg(x)=(R-S)\int_a^b f(x)\,dh(x)$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 当被积函数和有界变差函数都是实值时：

因为

$$(R-S)\int_a^b f(x)\,dg(x),\ (R-S)\int_a^b f(x)\,dh(x)\text{存在}$$

$\forall\varepsilon>0$, 则存在 $\delta>0$, 使得对划分

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,\ \max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i-x_{i-1}|<\delta$$

和 $\forall\zeta_i\in[x_{i-1},x_i]$, $i=1,2,\cdots,n$, 有

$$|\sum_{i=1}^n f(\zeta_i)\left[(g-h)(x_i)-(g-h)(x_{i-1})\right]-\int_a^b f(x)\,d(g-h)(x)|<\varepsilon$$

我们取

$$y_i=a+\frac{(b-a)\,i}{n},\ i=0,1,\cdots,n,\quad n>\frac{2(b-a)}{\delta}$$

在区间上 $[y_{i-1},y_i]$ 的内部, 必然可以取到 $g(x_i)=h(x_i)$, $x_i\in(y_{i-1},y_i)$, $i=1,2,\cdots,n-1$, 因此对于划分

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,\ \max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i-x_{i-1}|<\delta$$

此时有 $\left|\int_a^b f(x)\,d(g-h)(x)\right|<\varepsilon$, 因此

$$(R-S)\int_a^b f(x)\,d(g-h)(x)=0$$

当被积函数和有界变差函数都是复值时：

$$f=f_1+if_2,\ g=g_1+ig_2,\ h=h_1+ih_2,\ f_1,f_2,g_1,g_2,h_1,h_2\text{都是实值}$$

给定条件都等价于实部虚部对应成立, 因此运用实值的结果使得命题显然成立.

Problem 145

设 $g(x), h(x) \in BV[a,b]$, 证明：

$$(R-S)\int_a^b f(x)\,dg(x) = (R-S)\int_a^b f(x)\,dh(x),\ \forall f \in C[a,b]$$

的充分必要条件是存在 $s \in \mathbb{R}$(如果是复值, 则 $s \in \mathbb{C}$), 使得

$$h(a) = g(a)+s,\ h(b) = g(b)+s,\ \lim_{x\to c^+} h(x) = \lim_{x\to c^+} g(x)+s,\ \lim_{x\to c^-} h(x) = \lim_{x\to c^-} g(x)+s, \forall c \in (a,b)$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 当被积函数和有界变差函数都是实值时：

充分性：

记 $v = h-g$, $v \in BV[a,b]$, 于是

$$v(a) = v(b) = s,\ \lim_{x\to c^+} v(x) = \lim_{x\to c^-} v(x) = s,\ \forall c \in (a,b),\ v = s\ a.e$$

因此

$$(R-S)\int_a^b f(x)\,dv(x) = 0\ , \forall f \in C[a,b]$$

于是充分性得证.

必要性：

记 $v = h-g$, $v \in BV[a,b]$, 取 $f(x) = 1$, 有

$$\int_a^b f(x)\,dv(x) = v(b) - v(a) = 0$$

对 $c \in (a,b)$, 令

$$b-c > h > 0,\ f_h(x) = \begin{cases} 1 & a \leqslant x \leqslant c \\ 1 - \frac{x-c}{h} & c \leqslant x \leqslant c+h \\ 0 & c+h \leqslant x \leqslant b \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dv(x) &= \int_a^c dv(x) + \int_c^{c+h} 1 - \frac{x-c}{h} dv(x) \\ &= v(c) - v(a) - v(c) + \frac{1}{h}\int_c^{c+h} v(x)\,dx \\ &= \frac{1}{h}\int_c^{c+h} v(x)\,dx - v(a) = 0\end{aligned} \tag{76}$$

因此, 令 $h \to 0^+$, 于是 $\lim\limits_{x\to c^+} v(x) = v(a)$, 类似的, $\lim\limits_{x\to c^-} v(x) = v(b)$, 因此必要性得证.
当被积函数和有界变差函数都是复值时：

$$(R-S)\int_a^b [f_1(x) + if_2(x)]d[g_1(x) + ig_2(x)] = \int_a^b f_1 dg_1 - \int_a^b f_2 dg_2 + i[\int_a^b f_2 dg_1 + \int_a^b f_1 dg_2]$$

于是

$$(R-S)\int_a^b [f_1(x) + if_2(x)]d[g_1(x) + ig_2(x)] = (R-S)\int_a^b [f_1(x) + if_2(x)]d[h_1(x) + ih_2(x)]$$

充分必要条件是

$$\int_a^b f dg_1 = \int_a^b f dh_1,\ \int_a^b f dg_2 = \int_a^b f dh_2,\ \forall f \in C_{\mathbb{R}}[a,b]$$

运用实情况的结果, 我们完成了证明.

Problem 146

若 $F \in (C_{\mathbb{R}}[a,b])^{\star}$, 则存在 $[a,b]$ 上实值有界变差函数 $g(x)$, 使得

$$F(f) = (R-S)\int_a^b f(x)\,dg(x)\,, \forall f \in C_{\mathbb{R}}[a,b]\,,\ ||F|| = \bigvee_a^b g$$

若 $F \in (C_{\mathbb{C}}[a,b])^{\star}$, 则存在 $[a,b]$ 上复值有界变差函数 $g(x)$, 使得

$$F(f) = (R-S)\int_a^b f(x)\,dg(x)\,, \forall f \in C_{\mathbb{C}}[a,b]\,,\ ||F|| = \bigvee_a^b g$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 实数域上：

设 $g(t)$ 是实值有界变差函数, 则对

$$F(f) \triangleq (R-S)\int_a^b f(t)\,dg(t)\,,\ f \in C[a,b]$$

有 $F \in (C[a,b])^{\star}$, $||F|| \leqslant \bigvee\limits_a^b g$.

设 $G \in (C[a,b])^{\star}$, 保范延拓至 $(B[a,b])^{\star}$, 令

$$g(t) = \begin{cases} G\left(\chi_{[a,t]}\right) & b \geqslant t > a \\ 0 & t = a \end{cases}$$

对 $t > 0$, 有则对于划分 $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$, 我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |g(t_i) - g(t_{i-1})| &= |g(t_1)| + \sum_{i=2}^{n} |g(t_i) - g(t_{i-1})| \\
&= \left|G\left(\chi_{[a,t_1]}\right)\right| + \sum_{i=2}^{n} \left|G\left(\chi_{[0,t_i]}\right) - G\left(\chi_{[a,t_{i-1}]}\right)\right| \\
&= G\left(\epsilon_1\chi_{[a,t_1]}\right) + \sum_{i=2}^{n} G\left(\epsilon_i\chi_{[a,t_i]} - \epsilon_i\chi_{[a,t_{i-1}]}\right) \\
&= G\left(\epsilon_1\chi_{[a,t_1]} + \sum_{i=2}^{n} (\epsilon_i\chi_{[a,t_i]} - \epsilon_i\chi_{[a,t_{i-1}]})\right) \\
&\leqslant ||G|| \cdot ||\epsilon_1\chi_{[a,t_1]} + \sum_{i=2}^{n} (\epsilon_i\chi_{[a,t_i]} - \epsilon_i\chi_{[a,t_{i-1}]})|| = ||G||
\end{aligned} \tag{77}$$

这里 $\epsilon_i,\ i=1,2,\cdots,n$ 是对应的符号, 因此 $\bigvee\limits_a^b g \leqslant ||G||$.

对 $f(t)\in C[a,b]$ 和划分 $a=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=b$, 考虑

$$f_n(t)=f(t_0)\chi_{[a,t_1]}(t)+\sum_{j=2}^{n}f(t_{j-1})\left[\chi_{[a,t_j]}(t)-\chi_{[a,t_{j-1}]}(t)\right]$$

有

$$G(f_n(t))=\sum_{j=1}^{n}f(t_{j-1})\left[g(t_j)-g(t_{j-1})\right]$$

由 $R-S$ 积分定义, 当划分越来越细, 上式右边趋于 $(R-S)\int_a^b f(t)\,dg(t)$, 左边趋于 $G(f(t))$, 因此我们证明了

$$G(f)=(R-S)\int_a^b f(t)\,dg(t)\,,\ f\in C[a,b]\,,\ ||G||=\bigvee_a^b g$$

复数域上：

我们用 $C_{\mathbb{R}}[a,b]$ 表示 $[a,b]$ 上实值连续函数空间,$C_{\mathbb{C}}[a,b]$ 表示 $[a,b]$ 上复值连续函数空间,

和实版本完全一样的操作, 只需要注意到

$$\sum_{j=1}^{n}f(t_{j-1})\left[g(t_j)-g(t_{j-1})\right]$$

仍然是收敛于 $R-S$ 积分的, 于是我们完成了证明.

Problem 147

设 $g(x)$ 是 $[a,b]$ 上递增函数, 则在闭区间 $[a,b]$ 上有界函数 $f(x)$ 是依 g $R-S$ 可积的充分必要条件是 $f(x)$ 依 $\tilde{g}$ 诱导的 $L-S$ 测度几乎处处连续, 且此时

$$(R-S)\int_a^b f(x)\,dg=(L-S)\int_a^b f(x)\,d\tilde{g}$$

这里

$$\tilde{g}(x)\triangleq\begin{cases}g(b)-g(a) & x\geqslant b\\ \lim\limits_{y\to x^+}g(y)-g(a) & x\in[a,b)\\ 0 & x<a\end{cases}$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 对于 $[a,b]$ 上增函数 $g(x)$, 我们考虑

$$\tilde{g}(x)\triangleq\begin{cases}g(b)-g(a) & x\geqslant b\\ \lim\limits_{y\to x^+}g(y)-g(a) & x\in[a,b)\\ 0 & x<a\end{cases}$$

则 $\tilde{g}(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的右连续递增函数, 于是考虑 $\tilde{g}$ 诱导的 $\mathbb{R}$ 上的 $L-S$ 测度,

对

$$a=x_0^{(n)}<x_1^{(n)}<x_2^{(n)}<\cdots<x_{m_n}^{(n)}=b,\ \lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant i\leqslant m_n}\left|x_i^{(n)}-x_{i-1}^{(n)}\right|=0$$

且这些分点除 a,b 外都是 $\tilde{g}$ 的连续点, 令

$$h_n(x)=\begin{cases}M_i^{(n)}-m_i^{(n)} & x\in(x_{i-1}^{(n)},x_i^{(n)}],\ i=1,2,\cdots,m_n\\ M_1^{(n)}-m_1^{(n)} & x=a\end{cases}$$

这里

$$M_i^{(n)}\triangleq\sup_{x\in\left[x_{i-1}^{(n)},x_i^{(n)}\right]}f(x),\ m_i^{(n)}\triangleq\inf_{x\in\left[x_{i-1}^{(n)},x_i^{(n)}\right]}f(x),\ i=1,2,\cdots,m_n$$

于是

$$
\begin{aligned}
&(L-S)\int_a^b h_n(x)\,d\tilde{g}(x)\\
&=h_n(a)\left(\tilde{g}(a)-\tilde{g}\left(a^-\right)\right)+\sum_{i=1}^{m_n}\left(M_i^{(n)}-m_i^{(n)}\right)\left[\tilde{g}\left(x_i^{(n)}\right)-\tilde{g}\left(x_{i-1}^{(n)}\right)\right]\\
&=h_n(a)\left(\tilde{g}(a)-\tilde{g}\left(a^-\right)\right)+\left(M_1^{(n)}-m_1^{(n)}\right)\left[\tilde{g}\left(x_1^{(n)}\right)-\tilde{g}(a)\right]+\sum_{i=2}^{m_n}\left(M_i^{(n)}-m_i^{(n)}\right)\left[g\left(x_i^{(n)}\right)-g\left(x_{i-1}^{(n)}\right)\right]\\
&=h_n(a)\left(g\left(a^+\right)-g(a)\right)+\left(M_1^{(n)}-m_1^{(n)}\right)\left[g\left(x_1^{(n)}\right)-g\left(a^+\right)\right]+\sum_{i=2}^{m_n}\left(M_i^{(n)}-m_i^{(n)}\right)\left[g\left(x_i^{(n)}\right)-g\left(x_{i-1}^{(n)}\right)\right]\\
&=\sum_{i=1}^{m_n}\left(M_i^{(n)}-m_i^{(n)}\right)\left[g\left(x_i^{(n)}\right)-g\left(x_{i-1}^{(n)}\right)\right]\to(\text{上})\int_a^b f(x)\,dg-(\text{下})\int_a^b f(x)\,dg
\end{aligned}
\tag{78}
$$

考虑 $P\triangleq\left\{x_j^{(n)}:j=1,2,\cdots,m_{n-1},\ n\in\mathbb{N}\right\}$, 注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}h_n(x)=w_f(x)$, $x\notin P$ 且 P 是依 $\tilde{g}$ 0 测集. 因此由控制收敛定理

$$(L-S)\int_a^b h_n(x)\,d\tilde{g}(x)\to(L-S)\int_a^b w_f(x)\,d\tilde{g}(x)$$

于是

$$(L-S)\int_a^b w_f(x)\,d\tilde{g}(x)=(\text{上})\int_a^b f(x)\,dg-(\text{下})\int_a^b f(x)\,dg$$

于是我们有

$$w_f(x)=0,\ a.e\text{于}\tilde{g}\Leftrightarrow(R-S)\int_a^b f(x)\,dg\text{存在}$$

又对依 g $R-S$ 可积的函数 $f(x)$, 我们令

$$k_n(x)=\begin{cases}M_i^{(n)} & x\in(x_{i-1}^{(n)},x_i^{(n)}],\ i=1,2,\cdots,m_n\\ M_1^{(n)} & x=a\end{cases}$$

注意到

$$\lim_{n\to\infty}k_n(x)=f(x),\ \text{当}x\text{是}f(x)\text{连续点}$$

我们有

$$\lim_{n\to\infty}(L-S)\int_a^b k_n(x)\,d\tilde{g}=(L-S)\int_a^b f(x)\,d\tilde{g}$$

另外一方面

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(L-S)\int_a^b k_n(x)\,d\tilde{g} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m_n} M_i^{(n)}\left[g\left(x_i^{(n)}\right)-g\left(x_{i-1}^{(n)}\right)\right] \\ &= (R-S)\int_a^b f(x)\,dg\end{aligned} \tag{79}$$

Problem 148

给定 $[a,b]$ 上的有界函数 $f(x)$, 和划分

$$a=x_0^{(n)}<x_1^{(n)}<\cdots<x_{m_n}^{(n)}=b,\quad \lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant i\leqslant m_n}\left|x_i^{(n)}-x_{i-1}^{(n)}\right|=0$$

证明

$$\text{在} f\left(x\right) \text{的连续点} x_0\in\left[a,b\right], \text{ 有 } \lim_{n\to\infty} f_n\left(x_0\right)=f\left(x_0\right)$$

这里

$$f_n\left(x\right)=\begin{cases}\sup\limits_{x_{i-1}^{(n)}\leqslant x\leqslant x_i^{(n)}} f\left(x\right) & x\in(x_{i-1}^{(n)},x_i^{(n)}]\ \ i=2,3,\cdots,m_n\\ \sup\limits_{x_0^{(n)}\leqslant x\leqslant x_1^{(n)}} f\left(x\right) & x\in\left[x_0^{(n)},x_1^{(n)}\right]\end{cases}$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 不妨设 $x_0\in(a,b]$, 则必有 $x_0\in(x_{i_n-1}^{(n)},x_{i_n}^{(n)}]$, $1\leqslant i_n\leqslant m_n$, 记

$$M_i^{(n)}=\sup_{x_{i-1}^{(n)}\leqslant x\leqslant x_i^{(n)}} f\left(x\right),\ i=1,2,\cdots,m_n$$

又 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得当 $n\geqslant N$ 时, 有 $\left|f\left(x\right)-f\left(x_0\right)\right|<\varepsilon$, $\forall x\in[x_{i_n-1}^{(n)},x_{i_n}^{(n)}]$.
再取 $x\in[x_{i_n-1}^{(n)},x_{i_n}^{(n)}]$, 使得 $\left|M_{i_n}^{(n)}-f\left(x\right)\right|\leqslant\epsilon$, 于是

$$\left|f_n\left(x_0\right)-f\left(x_0\right)\right|=\left|M_{i_n}^{(n)}-f\left(x_0\right)\right|\leqslant\left|f\left(x\right)-f\left(x_0\right)\right|+\left|M_{i_n}^{(n)}-f\left(x\right)\right|\leqslant 2\epsilon$$

因此我们完成了证明.

Problem 149

设 $f(x)$ 在 a 的邻域 $n+p$ 阶可导, 于是有

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^{n}$$

若对于 $j=1,2,\cdots p-1$, 有 $f^{(n+j)}(a)=0,\ f^{(n+p)}(a)\neq 0$, 证明

$$\lim_{x\to a}\frac{c-a}{x-a}=\left(\frac{n!p!}{(n+p)!}\right)^{\frac{1}{p}}$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 不妨设 $c>a$, 由 *taylor* 公式, 我们有

$$f^{(n)}(c)=f^{(n)}(a)+\frac{f^{(n+p)}(\theta)}{p!}(c-a)^{p},\ \theta\in(a,c)$$

于是

$$p!n!\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)-\cdots-\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^{n}}{f^{(n+p)}(\theta)(x-a)^{n+p}}=\left(\frac{c-a}{x-a}\right)^{p}$$

首先

$$\lim_{x\to a}f^{(n+p)}(\theta)=p!\lim_{x\to a}\frac{f^{(n)}(c)-f^{(n)}(a)}{(c-a)^{p}}=f^{(n+p)}(a)$$

然后

$$\frac{p!n!}{(p+n)!}=p!n!\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)-\cdots-\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^{n}}{f^{(n+p)}(\theta)(x-a)^{n+p}}=\lim_{x\to a}\left(\frac{c-a}{x-a}\right)^{p}$$

因此我们有

$$\lim_{x\to a}\frac{c-a}{x-a}=\left(\frac{n!p!}{(n+p)!}\right)^{\frac{1}{p}}$$

Problem 150

记

$$S=\left\{\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{pmatrix}:a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$$

证明

$$Z(S)=\{A\in S\mid\forall B\in S,AB=BA\}=T=\left\{A^{-1}B^{-1}AB\mid A,B\in S\right\}$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 注意到 $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\in S$, 因此 $Z(S)$ 中的元素具有形状 $\begin{pmatrix}1&y&z\\0&1&y\\0&0&1\end{pmatrix}$, 直接矩阵乘法计算可知

$$Z\left(S\right)=\left\{\begin{pmatrix}1&0&z\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}:z\in\mathbb{R}\right\}$$

注意到

$$A=\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&d&f\\0&1&g\\0&0&1\end{pmatrix},\ A^{-1}B^{-1}AB=\begin{pmatrix}1&0&ag-cd\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\in Z\left(S\right)$$

故 $T\subset Z\left(S\right)$, 反之对 $\begin{pmatrix}1&0&z\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, 取 $A=\begin{pmatrix}1&z&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, $A^{-1}B^{-1}AB=\begin{pmatrix}1&0&z\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, 因此 $Z\left(S\right)\subset T$. 于是我们完成了证明.

Problem 151

设 g 是 $[a,b]$ 上的右连续实有界变差函数, g 诱导的 $[a,b]$ 上 $L-S$ 的测度 μ, 则 $\bigvee\limits_a^x g$ 诱导的 $[a,b]$ 上的 $L-S$ 测度为 $|\mu|$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 设 g 是 $[a,b]$ 上的右连续实有界变差函数, 考虑

$$g_1=\frac{1}{2}g+\frac{1}{2}\bigvee_a^x g,\ g_2=-\frac{1}{2}g+\frac{1}{2}\bigvee_a^x g,\ g=g_1-g_2,\ \bigvee_a^x g=g_1+g_2$$

考虑 g,g_1,g_2 在 $[a,b]$ 上诱导的 $L-S$ 测度 μ,μ_1,μ_2, 我们有 $\mu=\mu_1-\mu_2$.

对集合 $(c,d]\subset[a,b]$, $c>a$, 注意到对划分

$$c=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_p=d,\ \bigcup_n E_n=(c,d],\ E_n\bigcap E_m=\emptyset,\ n\neq m$$

, 有

$$|\mu|\left((c,d]\right)=\sup_{E_n}\sum_n|\mu\left(E_n\right)|\geqslant\sum_{j=1}^p|\mu(x_{j-1},x_j]|=\sum_{j=1}^p|g\left(x_j\right)-g\left(x_{j-1}\right)|$$

于是我们有

$$|\mu|\left((c,d]\right)\geqslant\bigvee_c^d g=\mu_2\left((c,d]\right)+\mu_1\left((c,d]\right)\geqslant|\mu|\left((c,d]\right)$$

因此

$$\left(\mu_1+\mu_2\right)\left((c,d]\right)=|\mu|\left((c,d]\right)\ \ c>a,d\leqslant b$$

类似的知道

$$\left(\mu_1+\mu_2\right)\left([a,d]\right)=|\mu|\left([a,d]\right),\ \ a<d\leqslant b$$

考虑

$$S=\{E\subset B\left([a,b]\right):\left(\mu_1+\mu_2\right)(E)=|\mu|\,(E)\}$$

首先 S 是 λ 类, 显然上述讨论的区间都在 S 里, 且构成 π 类, 由单调类定理, S 包含这个 π 类生成的 *borel* 代数 $B\left([a,b]\right)$, 因此 $S=B\left([a,b]\right)$, 从而利用哈恩分解的极值性质, 我们证明了 $\mu_1=\mu^+$, $\mu_2=\mu^-$.

Problem 152

若 $f(x) \in C^1[0,1]$，$f'(x) < 1$, 证明

$$\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) > -\frac{1}{2} + n\int_0^1 f(x)\,dx$$

Proof. (By 清疏竞赛数学) 注意到

$$\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{f(0)+f(1)}{2} + \int_0^n f\left(\frac{x}{n}\right)dx + \frac{1}{n}\int_0^n b_1(x)\,f'\left(\frac{x}{n}\right)dx$$

注意到

$$\frac{1}{n}\int_0^n b_1(x)\,f'\left(\frac{x}{n}\right)dx = \int_0^1 b_1(nx)\,[f'(x)-1]dx \geqslant \frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)-1dx = \frac{1}{2}[f(1)-f(0)-1]$$

于是

$$\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) > -\frac{1}{2} + n\int_0^1 f(x)\,dx$$

Problem 153

记 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 并令 $\{x\}=x-[x]$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(1-\max_{1<N\leqslant n}\left\{\sqrt{N}\right\})=\frac{1}{2}$$

Proof. (By 清疏竞赛数学) 事实上, 若 $n=m^2,\ m>1$, 我们有

$$\begin{aligned}\max_{1<N\leqslant n}\left\{\sqrt{N}\right\}&=\max_{1\leqslant N\leqslant n}\left\{\sqrt{N}\right\}\\&=\max_{1\leqslant k\leqslant m-1}\max_{k^2\leqslant N\leqslant k^2+2k}\left\{\sqrt{N}\right\}\\&=\max_{1\leqslant k\leqslant m-1}\max_{k^2\leqslant N\leqslant k^2+2k}\left(\sqrt{N}-k\right)\\&=\max_{1\leqslant k\leqslant m-1}\left(\sqrt{k^2+2k}-k\right)\\&=\sqrt{(m-1)^2+2m-2}-m+1=\sqrt{m^2-1}-m+1\end{aligned}\tag{80}$$

若 $n=m^2+r,\ m>1,0<r\leqslant 2m$, 注意到

$$(\sqrt{m^2-1}-m+1)-(\sqrt{m^2+r}-m)\begin{cases}<0 & r\geqslant[2\sqrt{m^2-1}]+1\\ \geqslant 0 & r\leqslant[2\sqrt{m^2-1}]\end{cases}$$

我们有

$$\begin{aligned}\max_{1<N\leqslant n}\left\{\sqrt{N}\right\}&=\max_{1\leqslant N\leqslant n}\left\{\sqrt{N}\right\}\\&=\max\left\{\sqrt{m^2-1}-m+1,\max_{m^2\leqslant N\leqslant m^2+r}\left(\sqrt{N}-m\right)\right\}\\&=\max\left\{\sqrt{m^2-1}-m+1,\sqrt{m^2+r}-m\right\}\\&=\begin{cases}\sqrt{m^2+r}-m & 2m\geqslant r\geqslant[2\sqrt{m^2-1}]+1\\ \sqrt{m^2-1}-m+1 & 0<r\leqslant[2\sqrt{m^2-1}]\end{cases}\end{aligned}\tag{81}$$

因此若 $n=m^2+r,\ m>1,0\leqslant r\leqslant 2m$,

$$\max_{1<N\leqslant n}\left\{\sqrt{N}\right\}=\begin{cases}\sqrt{m^2+r}-m & 2m\geqslant r\geqslant[2\sqrt{m^2-1}]+1\\ \sqrt{m^2-1}-m+1 & 0\leqslant r\leqslant[2\sqrt{m^2-1}]\end{cases}$$

注意到

$$m \leqslant \sqrt{n} < m+1,\ \sqrt{m^2-1}-m+1 \leqslant \max_{1<N\leqslant n}\left\{\sqrt{N}\right\} \leqslant \sqrt{m^2+2m}-m$$

由夹逼准则, 显然有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{m}=1,\ \lim_{m\to\infty}m(1-\max_{1<N\leqslant n}\left\{\sqrt{N}\right\})=\frac{1}{2}$$

于是我们完成了证明.

Problem 154

设 $f(x) \in C^1[0,1]$, 且满足

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 1,\ \int_0^1 xf(x)\,dx = 2,\ \int_0^1 x^2 f(x)\,dx = 7$$

证明 : $\forall c \in [-168, 204]$, 存在一个实数 $\zeta \in (0,1)$, 使得 $f'(\zeta) = c$.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) $\forall c \in [-168, 18) \bigcup (18, 204]$, 注意到 $\zeta \in (0,1)$, 使得

$$\int_0^1 \frac{(6c-108)x^2 + (480-6c)x + c - 204}{2(c-18)} f(x)\,dx = -\int_0^1 x(x-1)\left(x - \frac{c-204}{2c-36}\right) f'(x)\,dx = \frac{31}{2c-36} f'(\zeta)$$

于是

$$\frac{31c}{2c-36} = \frac{(6c-108)7 + (480-6c)2 + c - 204}{2(c-18)} = \frac{31}{2c-36} f'(\zeta),\ \zeta \in (0,1)$$

这便是 $f'(\zeta) = c$.

当 $c = 18$, 由介值性, 它是显然的, 当然也可以如此得到

$$\frac{1}{6} f'(\zeta) = -\int_0^1 x(x-1) f'(x)\,dx = \int_0^1 (2x-1) f(x)\,dx = 3$$

我们完成了证明.

Problem 155

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二可微, 且成立 $|f''(x)|\leqslant M,\ x\in[a,b]$, 证明 :

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx-\frac{f(a)+f(b)}{2}+\frac{1+Q^2}{8}(b-a)\left(f'(b)-f'(a)\right)\right|\leqslant\frac{M(b-a)^2\left(1-3Q^2\right)}{24}$$

这里

$$Q^2=\frac{\left[f'(a)-f(b)+f(a)+f'(b)\right]^2}{M^2(b-a)^2-\left(f'(b)-f'(a)\right)^2}$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 取

$$t=\frac{-a^2M+b^2M+2af'(a)-2bf'(b)-2f(a)+2f(b)}{-2aM+2bM+2f'(a)-2f'(b)}$$

首先注意到 $t\in[a,b]$, 事实上

$$\frac{-a^2M+b^2M+2af'(a)-2bf'(b)-2f(a)+2f(b)}{-2aM+2bM+2f'(a)-2f'(b)}-a=\frac{(b-a)^2\left[f''(\theta_2)-M\right]}{2(a-b)\left[M-f''(\theta_1)\right]}\geqslant 0$$
$$\frac{-a^2M+b^2M+2af'(a)-2bf'(b)-2f(a)+2f(b)}{-2aM+2bM+2f'(a)-2f'(b)}-b=\frac{(b-a)^2\left[M-f''(\theta_4)\right]}{2(b-a)\left[f''(\theta_3)-M\right]}\leqslant 0$$

注意到

$$\begin{cases} f(x)\leqslant f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{M}{2}(x-a)^2 & a\leqslant x\leqslant t\\ f(x)\leqslant f(b)+f'(b)(x-b)+\frac{M}{2}(x-b)^2 & t<x\leqslant b\end{cases}$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx&\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^t f(x)\,dx+\frac{1}{b-a}\int_t^b f(x)\,dx\\&\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^t f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{M}{2}(x-a)^2\,dx\\&+\frac{1}{b-a}\int_t^b f(b)+f'(b)(x-b)+\frac{M}{2}(x-b)^2\,dx\end{aligned}\tag{82}$$

因此注意到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx-\frac{f(a)+f(b)}{2}+\frac{1+Q^2}{8}(b-a)\left(f'(b)-f'(a)\right)-\frac{M(b-a)^2\left(1-3Q^2\right)}{24}\\&\leqslant\frac{(f(a)-f(b))(a-b+2)\left(2(b-a)\left[f'(a)+f'(b)\right]+(b-a+2)\left[f(a)-f(b)\right]\right)}{8(a-b)\left(f'(a)+bM-aM-f'(b)\right)}\end{aligned}\tag{83}$$

Problem 156

设 $f(x) \in C(\mathbb{R})$, 且

$$\lim_{h\to+\infty}[f(x+h)-2f(x)+f(x-h)]=0, \forall x\in\mathbb{R}$$

证明 $f(x)$ 是线性函数

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 注意到 $f(-x)$ 也满足题目条件, 于是利用分解

$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

知只需对偶函数或者奇函数讨论即可.

事实上当 $f(x)$ 是偶函数, 令 $x=0$, 显然有

$$\lim_{h\to\infty}f(h)=f(0)$$

回顾原条件中的极限, 我们有

$$f(x)=f(0),\ \forall x\in\mathbb{R}$$

当 $f(x)$ 是奇函数, 我们对固定的 $nx, x>0$, 令 $h=nx$, 则有

$$\lim_{n\to\infty}f((n+1)x)-f((n-1)x)=2f(x)$$

对奇偶子列运用 *stolz* 定理, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(nx)}{n}=f(x)$$

于是由奇函数性质, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(nx)}{n}=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(nmx)}{nm}=f(x)=\frac{f(mx)}{m},\ \forall m\in\mathbb{N}_+$$

由奇函数的性质, 有 $f(mx)=mf(x),\ \forall m\in\mathbb{Z}, x\in\mathbb{R}$.

由标准的 *cauchy* 方程逼近技巧, 我们有 $f(rx)=rf(x),\ \forall r, x\in\mathbb{R}$, 令 $x=1$, 我们完成了证明.

Problem 157

设 n 阶复矩阵 A 满足, $\forall k \in \mathbb{N}_+$, 都有 $\left|A^k + I_n\right| = 1$, 证明 : A 是幂零矩阵.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 事实上, 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ 是 A 的全部特征值, 那么有

$$\left(\lambda_1^k + 1\right)\left(\lambda_2^k + 1\right) \cdots \left(\lambda_n^k + 1\right) = 1, \ \forall k \in \mathbb{N}_+$$

于是

$$\sigma_n^{(k)} + \sigma_{n-1}^{(k)} + \cdots + \sigma_1^{(k)} = 0$$

Problem 158

$$(n+1)\,a_{n+1}^2 - na_n^2 = a_n,\ \ a_1 = 2, a_n > 0$$

估计 a_n 的阶.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 显然 $a_n > 1$ 且单调递减, 由 *stolz* 定理,

$$\lim_{n\to\infty} a_n^2 = \lim_{n\to\infty} (n+1)\,a_{n+1}^2 - na_n^2 = \lim_{n\to\infty} a_n$$

因此我们有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, 令 $b_n = a_n - 1 > 0$, 我们有

$$\begin{aligned}
b_{n+1} &= \sqrt{\frac{n\,(1+b_n)^2 + (1+b_n)}{n+1}} - 1 = \sqrt{1 + \frac{(n\,(2+b_n)+1)}{n+1}b_n} - 1 \\
&= \frac{n\,(2+b_n)+1}{2\,(n+1)}b_n - \frac{1}{8}\frac{(2n+1+nb_n)^2}{(n+1)^2}b_n^2 + \frac{1}{16}\frac{(2n+nb_n+1)^3}{(n+1)^3}b_n^3 + O\left(b_n^4\right) \\
&= \frac{2n+1}{2\,(n+1)}b_n + \frac{n}{2\,(n+1)}b_n^2 - \frac{(2n+1+nb_n)^2}{8(n+1)^2}b_n^2 + \frac{(2n+1)^3}{16(n+1)^3}b_n^3 + O\left(b_n^4\right) \\
&= \frac{2n+1}{2\,(n+1)}b_n + \frac{n}{2\,(n+1)}b_n^2 - \frac{(2n+1)^2 + 2n(2n+1)b_n}{8(n+1)^2}b_n^2 + \frac{(2n+1)^3}{16(n+1)^3}b_n^3 + O\left(b_n^4\right) \\
&= \frac{2n+1}{2\,(n+1)}b_n + [\frac{n}{2\,(n+1)} - \frac{(2n+1)^2}{8\,(n+1)^2}]b_n^2 - [\frac{n(2n+1)}{4(n+1)^2} - \frac{(2n+1)^3}{16(n+1)^3}]b_n^3 + O\left(b_n^4\right) \\
&= \frac{2n+1}{2\,(n+1)}b_n + O\left(\frac{b_n^2}{n^2}\right) + O\left(b_n^4\right) = \frac{2n+1}{2n+2}b_n + O\left(\frac{b_n^2}{n^2}\right) + O\left(b_n^4\right)
\end{aligned} \tag{84}$$

为了提升 b_n 的阶, 我们需要回到整体的不等式上, 事实上假定 $b_n \leqslant \frac{1}{\sqrt[\frac{16}{7}]{n}}$, 数值计算注意到

$$b_{n+1} \leqslant \sqrt{\frac{n\left(1+\frac{1}{\sqrt[\frac{16}{7}]{n}}\right)^2 + \left(1+\frac{1}{\sqrt[\frac{16}{7}]{n}}\right)}{n+1}} - 1 \leqslant \frac{1}{\sqrt[\frac{16}{7}]{n+1}},\ \ \forall n \geqslant 1$$

因此 $b_n = O\left(\frac{1}{n^{\frac{7}{16}}}\right)$, 从而得到

$$b_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2}b_n + O\left(\frac{1}{n^{\frac{7}{4}}}\right)$$

因此

$$\frac{(2n+2)!!}{(2n+1)!!}b_{n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}b_n + O\left(\frac{1}{n^{\frac{7}{4}-\frac{1}{2}}}\right)$$

累和有 $\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}b_n = C + O\left(\frac{1}{n^{\frac{7}{4}-\frac{1}{2}-1}}\right)$, 因此有 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}b_n$ 存在.

Problem 159

对 $m,n\in\mathbb{N},a,t\in\mathbb{R}_+$, 给定点

$$x_1<x_2<\cdots<x_n<y_n<y_{n-1}<\cdots<y_1,\ x_i-x_{i-1}=y_{i-1}-y_i=a,\ i=2,3,\cdots,n,\ y_n-x_n=2t$$

设 $f(x)\in C^{nm+n}[x_1,y_1]$, 若有

$$f^{(k)}(x_j)=f^{(k)}(y_j)=0,k=0,1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n$$

证明 $\exists\theta\in(x_1,y_1)$, 使得

$$\left|f^{(nm+n)}(\theta)\right|\geqslant\frac{(nm+n)!}{\prod\limits_{i=1}^{n}[t+(i-1)a]^{m+1}}\sup_{x\in[x_1,y_1]}|f(x)|$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 当 $\sup\limits_{x\in[x_1,y_1]}f(x)=0$, $f(x)=0,\forall x\in[x_1,y_1]$, 显然成立, 对于其余情况, 不妨设 $x_1<x\leqslant\frac{x_n+y_n}{2}$ 且 $|f(x)|=\sup\limits_{y\in[x_1,y_1]}|f(y)|$, 则

$$f(x)=\frac{f^{(nm+n)}(\theta_1)}{(nm+n)!}\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)^{m+1},\ \theta_1\in(x_1,y_1)$$

因此

$$\left|f^{(nm+n)}(\theta)\right|\geqslant\frac{(nm+n)!}{\prod\limits_{i=1}^{n}\left|\left(\frac{x_1+y_1}{2}-x_i\right)^{m+1}\right|}\sup_{x\in[x_1,y_1]}|f(x)|=\frac{(nm+n)!}{\prod\limits_{i=1}^{n}[t+(i-1)a]^{m+1}}\sup_{x\in[x_1,y_1]}|f(x)|$$

特别的取 $n=1,m=0,t=\frac{1}{2},a=0,x_1=1,y_1=2$, 有 $|f'(\theta)|\geqslant2\sup\limits_{x\in[1,2]}|f(x)|$.

Problem 160

设

$$S=\left\{f\in C^{1}\left[0,1\right]:f\left(0\right)=0,f\left(1\right)=1\right\}$$

计算

$$\inf_{f\in S}\int_{0}^{1}\left|f'\left(x\right)-f\left(x\right)\right|dx$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 事实上

$$\int_{0}^{1}\left|f'-f\right|dx\geqslant\int_{0}^{1}\left[f\left(x\right)e^{-x}\right]'dx=\frac{1}{e}$$

对 $a\in(0,1)$, 蒲和平上构造的

$$f_{a}\left(x\right)=\begin{cases}\frac{e^{a-1}}{a}x, & 0\leqslant x<a\\ e^{x-1}, & a\leqslant x\leqslant 1\end{cases}\notin C^{1}\left[0,1\right]$$

我们修正其构造为

$$f_{a}\left(x\right)=\begin{cases}\frac{(a-1)x^{2}-\left(a^{2}-2a\right)x}{a^{2}}e^{a-1}, & 0\leqslant x<a\\ e^{x-1}, & a\leqslant x\leqslant 1\end{cases}\in C^{1}\left[0,1\right]$$

注意到

$$f_{a}'\left(x\right)-f_{a}\left(x\right)=\begin{cases}\frac{-(a+1)x^{2}+\left(a^{2}+4a-2\right)x-\left(a^{2}-2a\right)}{a^{2}}e^{a-1}, & 0\leqslant x\leqslant a\\ 0, & a<x\leqslant 1\end{cases}$$

因为二次函数部分开口向上, 且在两个端点处是正数, 因此有 $f_{a}'-f_{a}\geqslant 0,\ x\in[0,1]$, 所以由

$$\int_{0}^{1}|f_{a}'-f_{a}|dx=\int_{0}^{a}(f_{a}'-f_{a})dx=\frac{a^{2}+4a+6}{6}e^{a-1}\to\frac{1}{e},\ a\to 0^{+}$$

我们得到

$$\inf_{f\in S}\int_{0}^{1}\left|f'\left(x\right)-f\left(x\right)\right|dx=\frac{1}{e}$$

Problem 161

对 $x_0 \in \mathbb{R},\ R \in \mathbb{R}^+$, 设 $f(x) \in C^\infty(x_0 - R, x_0 + R)$.

证明：$f(x)$ 可在 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 展开为 x_0 处的 *taylor* 级数的充分必要条件是存在一个 $[0, R)$ 上的非负值函数 $M(r)$, 使得

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant \frac{M(r)\,n!}{(r - |x - x_0|)^{n+1}},\ \forall n \geqslant 0,\ x \in (x_0 - r, x_0 + r)$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 不妨设 $x_0 = 0$, 否则平移即可.

必要性：

当 $f(x)$ 在 $(-R, R)$ 实解析, 解析延拓到 $|z| < R$, 因此对给定的 $|x| < r$, 由 *cauchy* 积分公式, 我们有

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - x)^{n+1}} d\zeta$$

从而

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant \frac{n!}{2\pi}\int_{|\zeta|=r} \frac{|f(\zeta)|}{(r - |x|)^{n+1}} ds \leqslant r \sup_{|z|=r} |f(z)| \frac{n!}{(r - |x|)^{n+1}}$$

我们完成了必要性证明.

充分性：

我们证明 $f(x)$ 在 $(-R, R)$ 处处实解析即可, 事实上对给定 $|x| < r$, 取 $r > \delta > 0$, 使得 $|x| < \delta$, 当

$$y \in (-\delta, \delta) \bigcap (x - r + \delta, x + r - \delta)$$

余项有

$$\frac{f^{(n)}(\theta(y))}{n!}|y - x|^n \leqslant \frac{M(r)|y - x|^n}{(r - |\theta(y)|)^{n+1}} \leqslant \frac{M(r)|y - x|^n}{(r - \delta)^{n+1}} \to 0$$

因此我们完成了证明.

Problem 162

设 $f \in L^p(\mathbb{R}), 1 \leqslant p < \infty$, 定义

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_0^\varepsilon \cdots \int_0^\varepsilon \int_0^\varepsilon f(\zeta_1 + \zeta_2 + \cdots + \zeta_n + x + \varepsilon)\, d\zeta_1 d\zeta_2 \cdots d\zeta_n, \epsilon > 0$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 注意到

$$||f_\varepsilon(x)||_{L^p(\mathbb{R})} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{[0,\varepsilon]^n} ||f(\zeta_1 + \zeta_2 + \cdots + \zeta_n + x + \varepsilon)||_{L^p(\mathbb{R})} d\zeta \leqslant ||f||_{L^p(\mathbb{R})}$$

Problem 163

设非负函数 $g(x) \in C[0,+\infty)$, 令

$$S=\left\{f(x) \in C^{1}[0,1]: f(0)=0, f(1)=1\right\}$$

证明

$$\inf_{f \in S} \int_{0}^{1} g\left(x^{2}+|f(x)|^{2}\right) \sqrt{1+|f'(x)|^{2}} dx=\sqrt{2} \int_{0}^{1} g\left(2 x^{2}\right) dx$$

PROOF. (*By* 清疏竞赛数学) 注意到 $f(x)=x$ 时, 我们有

$$\int_{0}^{1} g\left(x^{2}+|f(x)|^{2}\right) \sqrt{1+|f'(x)|^{2}} dx=\sqrt{2} \int_{0}^{1} g\left(2 x^{2}\right) dx$$

另外一方面, 由 *cauchy* 不等式, 我们有

$$\int_{0}^{1} g\left(x^{2}+|f(x)|^{2}\right) \sqrt{1+|f'(x)|^{2}} dx \geqslant \int_{0}^{1} \frac{g\left(x^{2}+|f(x)|^{2}\right)}{\sqrt{x^{2}+|f(x)|^{2}}}(x+f(x) f'(x)) dx=\frac{1}{2} \int_{0}^{2} \frac{g(y)}{\sqrt{y}} dy=\sqrt{2} \int_{0}^{1} g\left(2 x^{2}\right) dx$$

我们完成了证明.

Problem 164

设 $f(x) \in C^1(\mathbb{R})$, $f'(x) > f(f(x)), \forall x \in \mathbb{R}$. 证明 : $f(f(f(x))) \leqslant 0,\ \forall x \geqslant 0$.

Proof. (By 清疏竞赛数学) 如果 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, 则当 x 充分大, 有

$$f(x) > 1 + \varepsilon > 1,\ f'(x) > f(f(x)) > 1 + \varepsilon$$

因此对更充分大的 x, 我们有

$$f(x) > x,\ f'(x) > f(f(x)) > f(x),\ e^{-x} f(x) > c > 0,\ f'(x) > ce^{f(x)}$$

这导出如下矛盾

$$+\infty > \int_{x_0}^{+\infty} \frac{f'(x)}{e^{cf(x)}} = +\infty$$

因此必然有 $t \in \mathbb{R}$, 使得 $f(t) < t$.

Problem 165

对单位圆 $B(0,1) \triangleq \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ 上的单叶解析函数

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

证明：

(1) : $|a_2| \leqslant 2$,

(2) : $\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leqslant |f'(z)| \leqslant \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}$, $\forall z \in B(0,1)$,

(3) : $\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{|z|}{(1-|z|)^2}$, $\forall z \in B(0,1)$.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 注意到 $\frac{f(z)}{z} \in H(B(0,1))$ 且无零点, 因此取 $g(z) = z\sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}} \in H(B(0,1))$. 我们注意到 $g^2(z) = f(z^2)$, 设 $g(z_1) = g(z_2)$, 若有 $z_1 \neq z_2$, 则由 $f(z_1^2) = f(z_2^2)$ 知 $z_1 = -z_2$, 此时 $g(z_1) = -g(z_2)$, 这只能导致 $z_1 = z_2 = 0$ 是一个矛盾, 因此 $g(z)$ 是单叶解析函数, 对比幂级数系数知具有形式

$$\frac{1}{g(z)} = \frac{1}{z} - \frac{a_2}{2}z + \cdots$$

由面积原理, 我们有 $|a_2| \leqslant 2$. 这就证明了 (1).

(2), (3) : 对 $z_0 \in B(0,1)$, 构造 $B(0,1)$ 上的单叶解析函数

$$F(z) = \frac{f\left(\frac{z+z_0}{1+\overline{z_0}z}\right) - f(z_0)}{\left(1-|z_0|^2\right) f'(z_0)}$$

显然 $F(0) = 0, F'(0) = 1, F''(0) = \left(1-|z_0|^2\right)\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} - 2\overline{z_0}$, 把 (1) 用于 $F(z)$, 我们可以得到

$$\left|\left(1-|z_0|^2\right)\frac{z_0 f''(z_0)}{f'(z_0)} - 2|z_0|^2\right| \leqslant 4|z_0|$$

因此

$$\frac{2|z_0|^2 - 4|z_0|}{1-|z_0|^2} \leqslant \Re\frac{z_0 f''(z_0)}{f'(z_0)} \leqslant \frac{4|z_0| + 2|z_0|^2}{1-|z_0|^2}$$

对固定的 $\theta \in [0, 2\pi)$, 这给出了不等式

$$\frac{2r-4}{1-r^2} \leqslant \Re[e^{i\theta}\frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}] \leqslant \frac{4+2r}{1-r^2},\ r \in [0,1)$$

考虑函数

$$g_\theta\left(r\right)=\ln\left|f'\left(re^{i\theta}\right)\right|:[0,1)\to\mathbb{R}$$

注意到 $g'_\theta\left(r\right)=[\ln\left|f'\left(re^{i\theta}\right)\right|]'=\Re[e^{i\theta}\frac{f''\left(re^{i\theta}\right)}{f'\left(re^{i\theta}\right)}]$, 于是

$$\ln\frac{1-|z|}{\left(1+|z|\right)^3}=\int_0^{|z|}\frac{2t-4}{1-t^2}dt\leqslant\ln\left|f'\left(|z|\,e^{i\theta}\right)\right|\leqslant\int_0^{|z|}\frac{4+2t}{1-t^2}dt=\ln\frac{|z|+1}{\left(1-|z|\right)^3}$$

这给出了

$$\frac{1-|z|}{\left(1+|z|\right)^3}\leqslant\left|f'\left(z\right)\right|\leqslant\frac{1+|z|}{\left(1-|z|\right)^3}$$

于是

$$\left|f\left(z\right)\right|=\left|\int_0^z f'\left(\zeta\right)d\zeta\right|\leqslant\int_0^z\frac{1+|\zeta|}{\left(1-|\zeta|\right)^3}\left|d\zeta\right|=|z|\int_0^1\frac{1+t\,|z|}{\left(1-t\,|z|\right)^3}dt=\frac{|z|}{\left(1-|z|\right)^2}$$

对于连接 $f(0),f(z)$ 的线段 C, 我们有

$$\left|f\left(z\right)\right|=\int_C 1ds=\int_{f^{-1}(C)}\left|f'\left(\zeta\right)\right|\left|d\zeta\right|\geqslant\int_{f^{-1}(C)}\frac{1-|\zeta|}{\left(1+|\zeta|\right)^3}\left|d\zeta\right|\geqslant|z|\int_0^1\frac{1-|z|\,r}{\left(1+|z|\,r\right)^3}dr=\frac{|z|}{\left(1+|z|\right)^2}$$

这里第二个不等式号是连接两点的第一类曲线积分取线段最短 (被积函数需要一定条件, 见上一命题), 第二个等号是因为第一类曲线积分换元法.

我们完成了证明.

Problem 166

设 $f(x) \in C[-1,1]$, 并且满足

$$f(-1) \geqslant f(1), \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0, \ x + f(x) \text{ 单调递增}$$

证明 : $\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 dx \leqslant \frac{2}{3}$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 记 $k(x) = x + f(x)$, 首先

$$f(-1) \geqslant f(1), \ x+f(x) \text{ 递增} \Longrightarrow k(-1)+1 \geqslant k(1)-1 \Longrightarrow k(y)-k(x) \leqslant k(1)-k(-1) \leqslant 2, \ \forall y, x \in [-1,1]$$

运用第二积分中值定理和 $\int_{-1}^{1} k(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx + \int_{-1}^{1} xdx = 0$, 我们有

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} |f(x)|^2 dx - \frac{2}{3} &= \int_{-1}^{1} (k(x) - 2x)\, k(x)\,dx \\ &= k(-1)[\int_{-1}^{\theta} k(x)\,dx - \theta^2 + 1] + k(1)\left[\int_{\theta}^{1} k(x)\,dx - 1 + \theta^2\right] \\ &= k(-1)[\int_{-1}^{\theta} k(x)\,dx - \theta^2 + 1] - k(1)\left[\int_{-1}^{\theta} k(x)\,dx - \theta^2 + 1\right] \end{aligned} \tag{85}$$

令一方面, 如果

$$-\int_{\theta}^{1} k(x)\,dx - \theta^2 + 1 = \int_{-1}^{\theta} k(x)\,dx - \theta^2 + 1 < 0$$

由第一积分中值定理, 我们有

$$[k(\zeta) - \theta - 1](\theta - 1) = [k(\eta) - \theta + 1](\theta + 1) < 0, \ 1 \geqslant \zeta > \theta > \eta \geqslant -1$$

因此

$$k(\zeta) - k(\eta) > (\theta + 1) - (\theta - 1) = 2$$

这是一个矛盾!

Problem 167

证明

$$\lim_{n\to\infty} n!\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}dx=0$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 注意到

$$\int_0^{\infty}\frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}dx\leqslant\int_0^{\infty}\frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdot 3\cdot 4\cdots n}dx\leqslant 2\int_0^{\infty}\frac{1}{(x+1)(x+2)}dx<\infty$$

由控制收敛定理, 我们有

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}dx=\int_0^{\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}dx\\&=\int_0^{\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma(x+1)\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{\sqrt{2\pi(x+n)}\left(\frac{x+n}{e}\right)^{x+n}}dx=\int_0^{\infty}0dx=0\end{aligned}\tag{86}$$

我们完成了证明.

Problem 168

设 $m,n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{F}$ 是一数域, 且有映射 $f:M_n(\mathbb{F})\to M_m(\mathbb{F})$ 满足 :

$(1): f(E_n)=E_m$,

$(2): f(AB)=f(A)f(B)\,,\ \forall A,B\in M_n(\mathbb{F})$,

$(3): f(A+B)=f(A)+f(B)\,,\ \forall A,B\in M_n(\mathbb{F})$.

证明 : $n|m$.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 注意到 $E_m=f(AA^{-1})=f(A)f(A^{-1})$, 因此 $f(A^{-1})=[f(A)]^{-1}$, 且有 $f\left(A^k\right)=[f(A)]^k$, $\forall k\in\mathbb{N}$, 于是 $A\sim B\Rightarrow f(A)\sim f(B)$.

因此由 $E_{ii}^2=E_{ii}$, $E_{ii}\sim E_{jj}$, $\forall 1\leqslant i\neq j\leqslant n$ 知 $f(E_{ii})\,,\ i=1,2,\cdots,n$ 是两两相似的幂等矩阵.

注意到

$$E_m=f(E_n)=f\left(\sum_{i=1}^n E_{ii}\right)=\sum_{i=1}^n f(E_{ii})$$

这样便有

$$m=tr(E_m)=tr[\sum_{i=1}^n f(E_{ii})]=\sum_{i=1}^n tr[f(E_{ii})]=nr,\ r\triangleq tr[f(E_{ii})]=rank[f(E_{ii})]$$

这给出了 : $n|m$.

Problem 169

设 $f''(x)$ 是 $[0,1]$ 上的下凸函数, 证明

$$\int_0^1 f(x)\,dx \leqslant \frac{1}{6}\left[f(0)+4f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)\right]$$

Proof. (By 清疏竞赛数学) 当 $f(x)\in C^3[0,1]$, 运用 K 值有

$$f(x)=\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)}{\left(0-\frac{1}{2}\right)(0-1)}f(0)+\frac{(x-0)(x-1)}{\left(\frac{1}{2}-0\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)}f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{(x-0)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{(1-0)\left(1-\frac{1}{2}\right)}f(1)+\frac{f^{(3)}(\theta(x))}{3!}x\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)$$

注意到

$$\int_0^1[\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)}{\left(0-\frac{1}{2}\right)(0-1)}f(0)+\frac{(x-0)(x-1)}{\left(\frac{1}{2}-0\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)}f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{(x-0)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{(1-0)\left(1-\frac{1}{2}\right)}f(1)]dx=\frac{1}{6}\left[f(0)+4f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)\right]$$

以及

$$\begin{aligned}&\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{f^{(3)}(\theta(x))}{3!}x\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{f^{(3)}(\theta(x))}{3!}x\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)\,dx\\&=f^{(3)}(\zeta_1)\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{6}x\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)\,dx+f^{(3)}(\zeta_2)\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{1}{6}x\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)\,dx\leqslant 0\end{aligned}\tag{87}$$

这里用到了

$$\zeta_1\leqslant\zeta_2, f^{(3)}(\zeta_1)\leqslant f^{(3)}(\zeta_2)\ ,\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{6}x\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)\,dx=-\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{1}{6}x\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)\,dx$$

因此我们有

$$\int_0^1 f(x)\,dx \leqslant \frac{1}{6}\left[f(0)+4f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)\right]$$

当 $f(x)\notin C^3[0,1]$, 我们只需要把 f'' 保持下凸的延拓到全空间, 并令

$$f_\delta(x)=\frac{1}{\delta}\int_{\mathbb{R}}f(y)\,\chi\left(\frac{x-y}{\delta}\right)dy\in C^\infty(\mathbb{R}),\ \ \delta>0$$

这里 $\chi(y)=\begin{cases}\frac{1}{\int_{-1}^1 e^{-\frac{1}{1-x^2}}dx}e^{-\frac{1}{1-y^2}}, & |y|<1\\ 0, & |y|\geqslant 0\end{cases}$, 此时

$$f''_\delta(x)=\frac{1}{\delta}\int_{\mathbb{R}}f''(y)\,\chi\left(\frac{x-y}{\delta}\right)dy\text{是下凸的}$$

这样根据

$$\lim_{\delta\to 0^+} f_\delta\left(x\right) = f\left(x\right),\ \text{关于}x\in[0,1]\text{一致收敛},\ \int_0^1 f_\delta\left(x\right)dx \leqslant \frac{1}{6}\left[f_\delta\left(0\right) + 4f_\delta\left(\frac{1}{2}\right) + f_\delta\left(1\right)\right]$$

即完成了我们的证明.

Problem 170

证明

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\cos^n\left(\frac{1}{t}\right)dt}{x}=\begin{cases}0, & n\text{为奇数}\\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n\text{为偶数}\end{cases}$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 由黎曼引理, 显然有

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\cos^n\left(\frac{1}{t}\right)dt}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_{\frac{1}{x}}^{\infty}\frac{\cos^n t}{t^2}dt}{x}=\lim_{x\to0^+}\int_1^{\infty}\frac{\cos^n\frac{t}{x}}{t^2}dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^n tdt\int_1^{\infty}\frac{1}{t^2}dt=\begin{cases}0, & n\text{为奇数}\\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n\text{为偶数}\end{cases}$$

Problem 171

正数列 a_n 满足

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}+a_{n+2}}=0$$

证明 a_n 无界.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 事实上, 取 $\varepsilon>0$, 有 $\frac{2}{\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2+4\varepsilon}}>1$, $\exists N\in\mathbb{N}$, 当 $n\geqslant N$, 有

$$a_n<\varepsilon a_{n+1}+\varepsilon a_{n+2}$$

故

$$a_n+\frac{\sqrt{\varepsilon^2+4\varepsilon}-\varepsilon}{2}a_{n+1}<\frac{\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2+4\varepsilon}}{2}\left(a_{n+1}+\frac{\sqrt{\varepsilon^2+4\varepsilon}-\varepsilon}{2}a_{n+2}\right)$$

于是

$$\left(\frac{2}{\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2+4\varepsilon}}\right)^{n-N+1}\left(a_N+\frac{\sqrt{\varepsilon^2+4\varepsilon}-\varepsilon}{2}a_{N+1}\right)<\left(a_{n+1}+\frac{\sqrt{\varepsilon^2+4\varepsilon}-\varepsilon}{2}a_{n+2}\right)$$

显然 a_n 无界.

Problem 172

定义在开集 $U\subset \ell^2$ 上的函数 $f(x)\in C^1(U)$ 的充分必要条件是 $f(x)\in C(U)$, 并且成立

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left|\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right|^2<\infty,\ \forall x\in U$$

和

$$\lim_{x\to y}\sum_{i=1}^{\infty}\left|\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}-\frac{\partial f(y)}{\partial x_i}\right|^2=0,\ \forall x,y\in U$$

这里 $C^1(U)$ 表示在 U 上有连续的 $frechet$ 微分.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 我们仅考虑实 ℓ^2, 复 ℓ^2 是类似的.

充分性：

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}=\lim_{t\to 0}\frac{f(x+te_i)-f(x)}{t}=(Df)(x)e_i$$

于是

$$\begin{aligned}&||Df(x)-Df(y)||_{(\ell^2)^\star}^2=||Df(x)-Df(y)||_{\ell^2}^2=\sum_{i=1}^{\infty}|(Df(x)-Df(y))e_i|^2\\&=\sum_{i=1}^{\infty}\left|\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}-\frac{\partial f(y)}{\partial x_i}\right|^2\geqslant\left[\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}\left|\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right|^2}-\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}\left|\frac{\partial f(y)}{\partial x_i}\right|^2}\right]^2\end{aligned}\tag{88}$$

特别的我们知道 f 所有偏导数和 $\left|\left|\left\{\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right\}_{i=1}^{\infty}\right|\right|_{\ell^2}$ 等度连续.

必要性：我们断言 $(Df)(x)=\left\{\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right\}_{i=1}^{\infty}$.

由条件, 我们有 $T_x=\left\{\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right\}_{i=1}^{\infty}\in(\ell^2)^\star$, $\forall x\in U$. 且 T_x 连续, 对 $h=\sum\limits_{i=1}^{\infty}h_ie_i\in\ell^2$, 记

$$x^{(n-1)}=(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}),x_{(n+1)}=(x_{n+1},x_{n+2},\cdots)$$

注意到

$$\lim_{m\to\infty}||th_{(m)}||_{\ell^2}^2=|t|^2\lim_{m\to\infty}\sum_{j=m}^{\infty}|h_j|^2=0,\ \lim_{m\to\infty}f\left(x^{(m-1)},x_{(m)}+th_{(m)}\right)=f(x)$$

因此存在 $0<\theta_n<1$, 使得

$$\begin{aligned}\lim_{t\to0}\frac{f\left(x+th\right)-f\left(x\right)}{t}&=\lim_{t\to0}\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[f\left(x^{(n-1)},x_n+th_n,x_{(n+1)}+th_{(n+1)}\right)-f\left(x^{(n-1)},x_n,x_{(n+1)}+th_{(n+1)}\right)\right]}{t}\\&=\lim_{t\to0}\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[f_{x_n}\left(x^{(n-1)},x_n+\theta_nth_n,x_{(n+1)}+th_{(n+1)}\right)th_n\right]}{t}\\&=\lim_{t\to0}\sum_{n=1}^{\infty}\left[f_{x_n}\left(x^{(n-1)},x_n+\theta_nth_n,x_{(n+1)}+th_{(n+1)}\right)h_n\right]\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left[f_{x_n}\left(x\right)h_n\right]=T_xh\end{aligned}\tag{89}$$

这里用到了

$$\begin{aligned}&|\sum_{n=1}^{\infty}[f_{x_n}\left(x^{(n-1)},x_n+\theta_nth_n,x_{(n+1)}+th_{(n+1)}\right)-f_{x_n}\left(x\right)]h_n|^2\\&\leqslant||h||_{\ell^2}^2\sum_{n=1}^{\infty}\left|f_{x_n}\left(x^{(n-1)},x_n+\theta_nth_n,x_{(n+1)}+th_{(n+1)}\right)-f_{x_n}\left(x\right)\right|^2\end{aligned}\tag{90}$$

因此 f 在 U 上有连续的 $frechet$ 微分 T_x. 我们完成了证明.

Problem 173

设开集 $U \subset \ell^2$ 有开覆盖 $U = \bigcup_{\alpha} U_\alpha$, 证明 $\exists f_i \in C^1(\ell^2), i = 1, 2, \cdots$, 使得：

(1) : $supp\ f_i \subset U_{\alpha(i)},\ i = 1, 2, \cdots$, 并且并且 $supp\ f_i$ 有界, 且 $d\left(suppf_i, \partial U_{\alpha(i)}\right) > 0,\ i = 1, 2, \cdots$,

(2) : $0 \leqslant f_i \leqslant 1,\ i = 1, 2, \cdots$,

(3) : $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i(x) = 1,\ \forall x \in U$,

(4) : $\{supp\ f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是 U 的局部有限族.

(5) : $\exists C_i(x) \in C^1(\ell^2), i = 1, 2, \cdots$, 使得

$$supp\ C_i\text{有界}, d\left(supp\ C_i, \partial U_{a(i)}\right) > 0, |d_k f_i(x)| \leqslant C_i(x), \forall k \in \mathbb{N}_+,\ i = 1, 2, \cdots$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 对 $B_r(y) \triangleq \{x \in \ell^2 : ||x-y||_{\ell^2} < r\}$, $r > 0$, 对 $r' > r > 0$, 取

$$\chi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}),\ 0 \leqslant \chi(t) \leqslant 1, \forall t \in \mathbb{R},\ \ \chi(t) = 1, \forall |t| < r^2,\ \chi(t) = 0,\ \forall |t| > {r'}^2$$

构造

$$g(x) = \chi\left(||x-y||_{\ell^2}^2\right) \in C^1\left(\ell^2\right)$$

则

$$0 \leqslant g(x) \leqslant 1, \forall x \in \ell^2, g(x) = 1, \forall x \in B_r(y), g(x) = 0, \forall x \notin B_{r'}(y)$$

并且有估计

$$|d_j g| = 2|(x_j - y_j)\chi'\left(||x-y||_{\ell^2}^2\right)| \leqslant 2r'\,||\chi'||_{\infty}, j = 1, 2, \cdots, x \in \ell^2$$

接下来对 $x \in U_{\alpha(x)}$, 由上一球截断的结果, 有

$$\exists \Phi_x \in C^1\left(\ell^2\right), \Phi_x(x) = 1, supp\ \Phi_x \subset U_{\alpha(x)},\ 0 \leqslant \Phi_x(y) \leqslant 1, \forall y \in \ell^2$$

并且 $||d_j \Phi_x||_{\infty} < \infty$, 上界与 j 无关.

注意到

$$A_x \triangleq \left\{y \in U : \Phi_x(y) > \frac{1}{2}\right\},\ \bigcup_{x \in U} A_x = U$$

由 *lindelof* 性, 设 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = U$.

对每个 $j \geqslant 2$, 构造 $h_j \in C^{\infty}(\mathbb{R}^j)$, 使得：

(a) $h_j(t_1, \ldots, t_j) = 1$, 如果 $t_j \geqslant \frac{1}{2}$ 和 $t_i \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{j}$ 对所有 $1 \leqslant i < j$ 成立;

(b) $h_j(t_1,\dots,t_j)=0$, 如果 $t_j\leqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{j}$ 或 $t_i\geqslant\frac{1}{2}+\frac{2}{j}$ 对某个 $1\leqslant i<j$ 成立;

(c) $0\leqslant h_j\leqslant 1$,

(d) $||Dh_j||_\infty<\infty$.

再令

$$\begin{cases}\Psi_1(x)=\Phi_1(x), & x\in\ell^2\\ \Psi_j(x)=h_j(\Phi_1(x),\Phi_2(x),\cdots,\Phi_j(x)), & x\in\ell^2, j=2,3,\cdots\end{cases}$$

则有

$$||d_i\Psi_j||_\infty=||\sum_{k=1}^{j}d_i\Phi_k\cdot d_kh_j||_\infty\leqslant\sum_{k=1}^{j}||d_i\Phi_k||_\infty||d_kh_j||_\infty<\infty$$

并且上界与 i 无关, 考虑

$$V_i^p=\left\{y\in U:\Psi_i(y)>1-\frac{p}{4}\right\},\ p\in\mathbb{N}, i=1,2,\cdots$$

则有

$$V_i^p\subset\overline{V_i^p}\subset V_i^{p'}\subset\overline{V_i^{p'}},\ \forall i=1,2,\cdots,p'>p>0$$

由

$$x\notin supp\ \Phi_i\Longrightarrow\Phi_i(x)=0\Longrightarrow\Psi_i(x)=0\Longrightarrow x\notin V_i^4$$

于是

$$V_i^4\subset supp\ \Phi_i\subset U_{\alpha(i)}$$

又

$$x\in U, n(x)\triangleq\min\left\{n\in\mathbb{N}:\phi_n(x)>\frac{1}{2}\right\},\Psi_{n(x)}(x)=1,x\in V_{n(x)}^1$$

于是 $U=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}V_i^1$.

断言 $\{V_i^4\}_{i=1}^{\infty}$ 是局部有限的. 事实上, 对 $x\in U$, 取 $\Phi_{n(x)}(x)>\frac{1}{2}$, 由连续性, 存在 $a_x>\frac{1}{2}, N_x\subset U$是连通开集, 使得 $\inf\limits_{y\in N_x}\phi_{n(x)}(y)>a_x$, 于是对所有充分大的 $k\in\mathbb{N}$, 有 $\Psi_k(y)=0,\forall y\in N_x$.

这给出了对所有充分大的 $k\in\mathbb{N}$, 有 $V_k^4\bigcap N_x=0$, 因此 $\{V_i^4\}_{i=1}^{\infty}$ 是局部有限的.

再取

$$u(t)\in C^\infty(\mathbb{R}),0\leqslant u(t)\leqslant 1,t\in\mathbb{R},\ u(t)=1,t\geqslant\frac{3}{4},\ u(t)=0,t\leqslant\frac{1}{2},||u'||_\infty<\infty,\ f_i(x)=\frac{u(\Psi_i(x))}{\sum\limits_{j=1}^{\infty}u(\Psi_j(x))},i=1,2,\cdots$$

则为所求.

从证明中可以看到 $suppf_i \subset supp\Phi_i$ 是有界的, 并有估计

$$|d_k f_i(x)| \leqslant ||d_k \Psi_i||_\infty ||u'||_\infty \left|\sum_{j=1}^{\infty} u(\Psi_j)\right| + \sum_{j=1}^{\infty} ||d_k \Psi_j||_\infty u(\Psi_j), \forall x \in U$$

注意对不同的 x, 上述无穷和非 0 的项数可能不同, 所以只能有 $|d_k f_i(x)| \leqslant C_i(x), \forall x \in U$ 并可让 $C_i(x) \in C^1(U)$, $i = 1, 2, \cdots$.

由于 $d\left(supp\ f_i, \partial U_{a(i)}\right) > 0$, 通过截断可让 $C_i(x) \in C^1(\ell^2)$, $i = 1, 2, \cdots$, 并成立

$$d\left(suppC_i(x),\ \partial U_{a(i)}\right) > 0$$

并且 $supp\ C_i$有界.

Problem 174

设集合 $U \subset \ell^2$ 有开覆盖 $U \subset \bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha$, 证明 $\exists f_i \in C^1\left(\ell^2\right), i = 1, 2, \cdots$, 使得 :

$(1): supp\ f_i \subset U_{\alpha(i)},\ i = 1, 2, \cdots$, 并且 $supp\ f_i$ 有界, 且 $d\left(supp f_i, \partial U_{\alpha(i)}\right) > 0,\ i = 1, 2, \cdots$

$(2): 0 \leqslant f_i \leqslant 1,\ i = 1, 2, \cdots,$

$(3): \sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i\left(x\right) = 1,\ \forall x \in U,$

$(4): \left\{supp\ f_i\right\}_{i=1}^{\infty}$ 是 U 的局部有限族.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 对开集 $\bigcup\limits_{a} U_a$ 使用单位分解定理即得.

Problem 175

设 $f(x)$ 在 (a,b) 二阶可导, 且 $x_0 \in (a,b)\,, f''(x_0) \neq 0$, 证明 : $\exists x_1, x_2 \in (a,b)$, 使得

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(x_0)$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 如若不然, 函数 $g(x) = f(x) - f'(x_0)\,x$ 在 (a,b) 不是单射, 从而严格单调, 并且成立 $g'(x_0) = 0, g''(x_0) \neq 0$, 这导致了 $g(x)$ 在 x_0 附近必然不单调, 这是矛盾的! 我们完成了证明.

Problem 176

设 $f(x)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的下凸函数, 且 $f(0)=0, f(1)=1$, 证明：

$$2\left(\int_0^1 f\left(x\right)dx\right)^2 \geqslant f\left(\int_0^1 f\left(x\right)dx\right)$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 由哈达马不等式, 我们有 $a=\int_0^1 f\left(x\right)dx \leqslant \frac{f(1)+f(0)}{2}=\frac{1}{2}$.

注意到

$$\begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant \lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(a)-f(0)}{a-0}, & 1 \geqslant x > a \\ \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant \lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}, & 0 \leqslant x < a \end{cases}$$

因此

$$\begin{aligned} a &\geqslant \int_0^1 f\left(a\right)+\lim_{x\to a^+}\frac{f\left(x\right)-f\left(a\right)}{x-a}\left(x-a\right)dx = f\left(a\right)+\lim_{x\to a^+}\frac{f\left(x\right)-f\left(a\right)}{x-a}\left(\frac{1}{2}-a\right) \\ &\geqslant f\left(a\right)+\frac{f\left(a\right)-0}{a-0}\left(\frac{1}{2}-a\right)=\frac{f\left(a\right)}{2a} \end{aligned} \tag{91}$$

这便是

$$2\left(\int_0^1 f\left(x\right)dx\right)^2 \geqslant f\left(\int_0^1 f\left(x\right)dx\right)$$

Problem 177

设 $f(x) \in C^2[0,1]$, 且满足 $f(0)=f(1)$, 证明

$$\sup_{x\in[0,1]} |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2} \sup_{x\in[0,1]} |f''(x)|$$

Proof. (By 清疏竞赛数学) 不妨设 $M = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f''(x)| < \infty$, 那么有

$$\begin{aligned} f(0) &= f(x_0) + f'(x_0)(0-x_0) + \frac{f''(\theta_1(0))}{2}(0-x_0)^2 \\ f(x_0) &= (1-x_0) f(0) + x_0 f(1) + \frac{f''(\theta_2(x_0))}{2} x_0(x_0-1) \end{aligned}$$

于是

$$|f'(x_0)| \leqslant \left|\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0} - \frac{f''(\theta_1(0))}{2} x_0\right| \leqslant \left|\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0}\right| + \left|\frac{f''(\theta_1(0))}{2} x_0\right| \leqslant \frac{M}{2}(1-x_0) + \frac{M}{2} x_0 = \frac{M}{2}$$

由 x_0 任意性, 我们完成了证明.

Problem 178

设 $A \subset \mathbb{N}$, 且有

$$\sum_{a \in A} \frac{x^a}{a!} = o\left(\frac{e^x}{\sqrt{x}}\right), x \to +\infty$$

证明 : A 是有限集.

PROOF. (*By* 清疏竞赛数学) 若 A 是无限集, 取 $k_n \in A$, $\lim\limits_{n\to\infty} k_n = +\infty$, 则有

$$\varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x} \sum_{a\in A} \frac{x^a}{a!} \geqslant \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{k_n}}{e^{k_n}} \frac{k_n^{k_n}}{k_n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{k_n+\frac{1}{2}}}{e^{k_n}\sqrt{2\pi k_n}\left(\frac{k_n}{e}\right)^{k_n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} > 0$$

矛盾, 我们完成了证明.

Problem 179

设正值函数 $f(x) \in C[1,+\infty)$, 对 $a \in (0,1)$, 若 $\int_1^x f(t)\,dt \leqslant x^{1+a}, \forall x \geqslant 1$, 证明

$$\varliminf_{x\to+\infty} \frac{\int_1^x \frac{1}{f(t)}dt}{x^{1-a}} \geqslant \frac{1}{1-a^2}$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 取 $g(t) = \frac{1}{(t-1)^{2a}}$

$$\begin{aligned}\frac{\int_2^x \frac{1}{F'(t)}dt \int_2^x g(t)F'(t)\,dt}{x^{1-a}\int_2^x g(t)F'(t)\,dt} &= \frac{\int_2^x \frac{1}{F'(t)}dt \int_2^x g(t)F'(t)\,dt}{x^{1-a}\left[F(x)g(x) - F(2)g(2) - \int_2^x g'(t)F(t)\,dt\right]} \\ &\geqslant \frac{[\int_2^x \sqrt{g(t)}dt]^2}{x^{1-a}\left[x^{1+a}g(x) - F(2)\cdot g(2) - \int_2^x g'(t)\,t^{1+a}dt\right]} \\ &= \frac{[\int_2^x \sqrt{g(t)}dt]^2}{(1+a)\,x^{1-a}\left[C + \int_2^x g(t)\,t^a dt\right]}\end{aligned} \tag{92}$$

因此

$$\varliminf_{x\to+\infty} \frac{\int_1^x \frac{1}{f(t)}dt}{x^{1-a}} \geqslant \frac{1}{1+a}\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\int_2^x \frac{1}{(t-1)^a}dt\right)^2}{x^{1-a}[C + \int_2^x \frac{t^a}{(t-1)^{2a}}dt]} = \frac{1}{1-a^2}$$

我们完成了证明.

Problem 180

估计渐进

$$\int_0^{10n}\left(1-\left|\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right|\right)^n dx,\ n\to\infty$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 对充分小的 $\delta>0$, 显然

$$\int_0^{10n}\left(1-\left|\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right|\right)^n dx \sim 7n\int_0^{\delta}(1-|\sin x|)^n dx$$

且上述左右两边有相同的渐进. 因此换元有

$$7n\int_0^{\delta}(1-|\sin x|)^n dx = 7n\int_0^{\infty} e^{-ny}\left(1-y+y^2-\frac{7y^3}{6}+\frac{35y^4}{24}-\frac{113y^5}{60}+O\left(y^6\right)\right)dy$$

于是我们有

$$\int_0^{10n}\left(1-\left|\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right|\right)^n dx = 7-\frac{7}{n}+\frac{14}{n^2}-\frac{49}{n^3}+\frac{245}{n^4}-\frac{1582}{n^5}+O\left(\frac{1}{n^6}\right)$$

Problem 181

设 $a_1=1$,$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{2^n a_n}$, $n=1,2,\cdots$, 证明 : 存在 $c_1,c_2,c_3>0$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} 2^n\left[2^n\left[2^n\left(a_n-c_1\right)+c_2\right]+c_3\right] \text{存在且不为}0$$

并证明此时 $c_1c_2+c_1^3c_3=\frac{14}{3}$.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 显然

Problem 182

$a_{n+1} = a_n + \ln a_n,\ a_1 = 2$

PROOF. (*By* 清疏竞赛数学) 显然 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty,\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$,
简单归纳, 显然 $cn \leqslant a_n \leqslant Cn^2, c>0, C>0,\ n=1,2,\cdots$, 因此 $\frac{\ln a_n}{a_n} = O\left(\frac{\ln n}{n}\right)$. 这告诉我们

$$\ln C + 2\ln n \geqslant a_{n+1} - a_n \geqslant \ln a_n \geqslant \ln c + \ln n \Rightarrow C_1 n \ln n \leqslant a_n \leqslant C_2 n \ln n, C_1, C_2 > 0, n \geqslant 2$$

因此由 *stolz* 定理和夹逼准则我们知道

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln a_n}{\ln n} = 1$$

因此

$$a_{n+1} - a_n = \ln n + \ln\ln n + o(1) \Rightarrow a_n = n\ln n + n\ln\ln n + o(n)$$

Problem 183

设 $f(x) \in C^1[0,1]$, 若满足

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{5}{2},\ \int_0^1 xf(x)\,dx = \frac{3}{2}$$

则 $\exists \eta \in (0,1)$, 使得 $f'(\eta) = 3$.

PROOF. (*By* 清疏竞赛数学) 我们记 $F(x) = \int_0^x f(y)\,dy$，代入条件有

$$F(0) = 0, F(1) = \frac{5}{2}, \int_0^1 F(x)\,dx = 1$$

于是

$$F(x) = \frac{5}{2}x + \frac{1}{2}f'(\theta(x))\,x(x-1)$$

因此

$$1 = \int_0^1 F(x)\,dx = \frac{5}{4} + \frac{1}{2}f'(\eta)\int_0^1 x(x-1)\,dx = \frac{5}{4} - \frac{f'(\eta)}{12}$$

所以 $\exists \eta \in (0,1)$, 使得 $f'(\eta) = 3$.

Problem 184

给定 $n \in \mathbb{N}$.

设 $f(x) = (1+\sqrt{x})^{2n+2}$, 计算 $f^{(n)}(1)$.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 注意到

$$\left(1+\sqrt{x}\right)^{2n+2} + \left(1-\sqrt{x}\right)^{2n+2} = 2\sum_{k=0}^{n+1} C_{2n+2}^{2k} x^k$$

这给出了

$$f^{(n)}(1) = 2[n!C_{2n+2}^{2n} + (n+1)!] = 4(n+1)(n+1)!$$

Problem 185

计算

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{2^{n-k}\left(-1\right)^k}{(k+1)}}$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 注意到

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{2^{n-k}\left(-1\right)^k}{(k+1)}}=2\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum_{k=0}^{n}C_n^k\int_0^1\left(-\frac{x}{2}\right)^k dx}=2\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_0^1\left(1-\frac{x}{2}\right)^n dx}=2$$

Problem 186

设 $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)^{\cdots\left(\frac{1}{n}\right)}}$, $n \geqslant 2$, 证明：

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} \neq \lim_{n\to\infty} a_{2n-1}$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 显然 $\frac{1}{2} \leqslant a_n < 1, \forall n \geqslant 2$, a_{2n} 单调递增,a_{2n-1} 单调递减, 数值不等式估计显然得到了证明.

Problem 187

设 $f(x) \in C^3[-a,a]$, $a>0$, 且满足

$$f(a)-f(-a)=a^3, f'(0)=0$$

证明 : 在开区间 $(-a,a)$ 内至少存在一点 η, 使得 $f'''(\eta)=3$.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 显然, 存在二次函数 $p(x)$, 和常数 $k\in\mathbb{R}$, 使得 $g(x)=p(x)+k(x^3-a^2x)$ 满足

$$g(a)=f(a), g(-a)=f(-a), g(0)=f(0), g'(0)=f'(0)$$

因此

$$p(a)-p(-a)=a^3 \Rightarrow p'(0)=\frac{a^2}{2}$$

这给出了 $k=\frac{p'(0)}{a^2}=\frac{1}{2}$, 于是对 $f(x)-g(x)$ 反复使用罗尔中值定理得在开区间 $(-a,a)$ 内至少存在一点 η, 使得 $f'''(\eta)=3!\times\frac{1}{2}=3$,

Problem 188

设数域上的 $\mathbb{P}$ 上的 n 维线性空间 V, f 是 V 上的双线性函数, V' 是 V 的真子空间, 对 $\xi \notin V'$, 证明：

存在 $\alpha \in V' \oplus < \xi >, \alpha \neq 0$, 使得 $f(x, \alpha) = 0, \forall x \in V'$.

Proof. (By 清疏竞赛数学) 不妨设 $V = \mathbb{P}^n$, $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 是 V' 的一组基, f 度量矩阵是 F, $n \times m$ 矩阵 $A = (a_1, a_2, \cdots, a_m)$, $\alpha = (A, \xi) c$, $c \in \mathbb{P}^{m+1}$, 则

$$f(x, \alpha) = 0, \forall x \in V' \Leftrightarrow a_j^T F \alpha = 0, \forall j = 1, 2 \cdots, m \Leftrightarrow A^T F (A, \xi) c = 0$$

又 $A^T F (A, \xi)$ 是 $m \times m+1$ 矩阵，因此线性方程组 $A^T F (A, \xi) c = 0$ 必有非 0 解, 我们完成了证明.

Problem 189

设 $x_n > 0, \lim_{n\to\infty} x_n = 0$, 且满足

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln x_n}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} = a < 0$$

证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln x_n}{\ln n} = -1$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 显然 $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k = +\infty$, 故不妨设 $c = -1$, 否则用 $-cx_n$ 代替 x_n.
注意到当 $c \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$, 有 $x + c^x$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递增.
考虑

$$a_1 > 1,\ a_{n+1} = a_n + c^{a_n}$$

则有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} n\left(a_{n+1} - a_n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{c^{-a_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{c^{-a_{n+1}} - c^{-a_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{c^{a_n}}{c^{-c^{a_n}} - 1} = \frac{1}{\ln \frac{1}{c}}$$

回到原题, 令 $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$, 有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln x_{n+1}}{\ln x_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x_{n+1}}{S_n}\right) = 1 \Longrightarrow \ln x_{n+1} = \left(-1 + o\left(1\right)\right) S_n \Longrightarrow S_{n+1} = S_n + \left(e^{-1} + o\left(1\right)\right)^{S_n}$$

$\forall\ 0 < \varepsilon < \min\left\{\frac{1}{2} - e^{-1}, e^{-1} - \frac{1}{3}\right\}$, $\exists N \geqslant 1$ 使得

$$\frac{1}{3} < e^{-1} - \varepsilon < e^{-1} + o\left(1\right) < e^{-1} + \varepsilon < \frac{1}{2},\ S_n > 1, \forall n \geqslant N$$

定义

$$H_N^{\varepsilon} = S_N,\ H_{n+1}^{\varepsilon} = H_n^{\varepsilon} + \left(e^{-1} + \varepsilon\right)^{H_n^{\varepsilon}}, \forall n \geqslant N$$

$$h_N^{\varepsilon} = S_N,\ h_{n+1}^{\varepsilon} = h_n^{\varepsilon} + \left(e^{-1} - \varepsilon\right)^{h_n^{\varepsilon}}, \forall n \geqslant N$$

利用单调性, 归纳可证

$$h_n^{\varepsilon} \leqslant S_n \leqslant H_n^{\varepsilon},\ \forall n \geqslant N$$

这给出了

$$\frac{1}{\ln\frac{1}{e^{-1}-\varepsilon}} \leqslant \lim_{n\to\infty}\frac{h_n^{\varepsilon}}{\ln n} \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\frac{S_n}{\ln n} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{\ln n} \leqslant \lim_{n\to\infty}\frac{H_n^{\varepsilon}}{\ln n} \leqslant \frac{1}{\ln\frac{1}{e^{-1}+\varepsilon}}$$

至此, 我们证明了

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln a_n}{\ln n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln a_n}{S_n}\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{\ln n} = -1$$

Problem 190

设 $f(z) \in H(B(0,1)) \bigcup \{1\}$, 且有 $f(0)=0, f(1)=1, f(B(0,1)) \subset B(0,1)$.

证明 : $f'(1) \geqslant 1$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 首先由 *schwartzt* 引理, 我们有 $|f(z)| \leqslant |z|, \forall z \in \overline{B(0,1)}$.

现在对 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y), (x,y) \in B(0,1)$, 我们有 $u(1,0)=1, v(1,0)=0$, 因此

$$u_x(1,0) = \lim_{x \to 1^-} \frac{\sqrt{u^2(x,0)+v^2(x,0)}-1}{x-1} \geqslant \lim_{x \to 1^-} \frac{\sqrt{x^2+0^2}-1}{x-1} = 1$$

对 $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, 还有

$$\cos\theta \cdot u_x(1,0) + \sin\theta \cdot u_y(1,0) = \lim_{r \to 0} \frac{\sqrt{u^2(1+r\cos\theta, r\sin\theta)+v^2(1+r\cos\theta, r\sin\theta)}-1}{r} \leqslant 0$$

令 $\theta \to \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$, 我们有 $u_y(1,0)=0$.

于是我们证明了

$$f'(1) = u_x(1,0) + iv_x(1,0) = u_x(1,0) - iu_y(1,0) = u_x(1,0) \geqslant 1$$

Problem 191

设 $\alpha \in \mathbb{C}/\mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}/\{0\}$, 有估计

$$(-1)^n n!\,\mathrm{Res}_{z=\alpha}\left(\frac{1}{(s-\alpha)^r}\frac{1}{s(s-1)(s-2)\cdots(s-n)}\right)=-\Gamma(-\alpha)\,n^\alpha\frac{\ln^{r-1}n}{(r-1)!}\left(1+O\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right)$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 当 $r=1$ 较为容易, 我们考虑 $r>1$.

我们设

$$1+\sum_{j=1}^{\infty}L_j(x_1,x_2,\cdots,x_j)\,t^j=e^{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{k}t^k}$$

运用复合函数的高阶导数公式, 我们知道

$$L_j(x_1,x_2,\cdots,x_j)=\sum_{j_1+2\cdot j_2+3\cdot j_3+\cdots+j\cdot j_j=j}\frac{1}{j_1!j_2!\cdots j_j!}\left(\frac{x_1}{1}\right)^{j_1}\left(\frac{x_2}{2}\right)^{j_2}\cdots\left(\frac{x_j}{j}\right)^{j_j}$$

事实上

$$\begin{aligned}
&(-1)^n n!\,\mathrm{Res}_{z=\alpha}\left(\frac{1}{(s-\alpha)^r}\frac{1}{s(s-1)(s-2)\cdots(s-n)}\right)\\
&=-n!\left[s^{r-1}\right]\prod_{k=0}^{n}\frac{1}{k-\alpha-s}\\
&=-n!\left[s^{r-1}\right]e^{-\sum\limits_{k=0}^{n}\ln(k-\alpha-s)}\\
&=-n!\left[s^{r-1}\right]e^{-\sum\limits_{k=0}^{n}\ln(k-\alpha)}e^{-\sum\limits_{k=0}^{n}\ln\left(1-\frac{s}{k-\alpha}\right)}\\
&=-n!\prod_{k=0}^{n}\frac{1}{k-\alpha}\left[s^{r-1}\right]e^{\sum\limits_{k=0}^{n}\sum\limits_{j=1}^{\infty}\frac{s^j}{j(k-\alpha)^j}}\\
&=-n!\prod_{k=0}^{n}\frac{1}{k-\alpha}\left[s^{r-1}\right]e^{\sum\limits_{j=1}^{\infty}\left[\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{(k-\alpha)^j}\right]\frac{s^j}{j}}\\
&=-n!\prod_{k=0}^{n}\frac{1}{k-\alpha}L_{r-1}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k-\alpha)^1},\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k-\alpha)^2},\cdots,\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k-\alpha)^{r-1}}\right)\\
&=-n!\prod_{k=0}^{n}\frac{1}{k-\alpha}\left(\frac{\ln^{r-1}n}{(r-1)!}+O\left(\ln^{r-2}n\right)\right)\\
&=-\Gamma(-\alpha)\,n^\alpha\frac{\ln^{r-1}n}{(r-1)!}\left(1+O\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right)
\end{aligned}\tag{93}$$

Problem 192

判断下述广义积分收敛性

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^p\left|\sin x\right|^q}dx$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 我们有

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^p\left|\sin x\right|^q}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\pi} \frac{1}{1+(x+n\pi)^p\left|\sin x\right|^q}dx=2\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+(x+n\pi)^p\left|\sin x\right|^q}dx$$

注意到

$$2\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+(x+n\pi)^p\left|\sin x\right|^q}dx \text{ 介于 } 2\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+(n\pi)^p\left|\sin x\right|^q}dx, 2\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+(\pi+n\pi)^p\left|\sin x\right|^q}dx\text{之间}$$

我们估计 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+y^p\left|\sin x\right|^q}dx, y\to+\infty$ 的阶.

显然

$$\lim_{y\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+y^p\left|\sin x\right|^q}dx=\begin{cases}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\left|\sin x\right|^q}dx, & p=0\\ 0, & p>0\\ \infty, & p<0\end{cases}$$

当 $p>0, q\leqslant 0$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+y^p\left|\sin x\right|^q}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{-q}x}{y^p+\sin^{-q}x}dx\sim\frac{C}{y^p}$$

此时

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+(n\pi)^p\left|\sin x\right|^q}dx\sim C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n\pi)^p}$$

当 $p>0, q>1$, 有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+y^p\left|\sin x\right|^q}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+y^p\left|\sin x\right|^q}dx+O\left(\frac{1}{y^p}\right)=\frac{1}{y^{\frac{p}{q}}}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}y^{\frac{p}{q}}}\frac{1}{(1+u^q)\sqrt{1-\frac{u^2}{y^{\frac{2p}{q}}}}}du+O\left(\frac{1}{y^p}\right)$$

于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+y^p\left|\sin x\right|^q}dx=\frac{1}{y^{\frac{p}{q}}}\int_0^{\infty}\frac{1}{1+u^q}du+O\left(\frac{1}{y^p}\right)\sim\frac{C}{y^{\frac{p}{q}}}$$

这里用到了控制收敛定理

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}y^{\frac{p}{q}}} \frac{1}{(1+u^q)\sqrt{1-\frac{u^2}{y^{\frac{2p}{q}}}}}du \leqslant \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{1+u^q}du < \infty,\ \lim_{y\to\infty}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}y^{\frac{p}{q}}} \frac{1}{(1+u^q)\sqrt{1-\frac{u^2}{y^{\frac{2p}{q}}}}}du = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+u^q}du$$

此时

$$2\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+(n\pi)^p\left|\sin x\right|^q}dx \sim C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n\pi)^{\frac{p}{q}}}$$

当 $p>0, 0<q<1$, 注意到

$$\lim_{y\to\infty} y^p\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+y^p\left|\sin x\right|^q}dx = \lim_{y\to\infty}\int_0^1 \frac{y^p}{(1+y^pu^q)\sqrt{1-u^2}}du = \int_0^1 \frac{1}{u^q\sqrt{1-u^2}}du$$

这里用到了控制收敛定理

$$\int_0^1 \frac{y^p}{(1+y^pu^q)\sqrt{1-u^2}}du \leqslant \int_0^1 \frac{1}{u^q\sqrt{1-u^2}}du < \infty$$

此时

$$2\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+(n\pi)^p\left|\sin x\right|^q}dx \sim C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n\pi)^{p}}$$

当 $p>0, q=1$, 注意到

$$\lim_{y\to\infty} \frac{y^p}{\ln y}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+y^p\left|\sin x\right|}dx = \lim_{y\to\infty}\frac{py^p}{\ln y^p}\frac{\ln\left(\sqrt{y^{2p}-1}+y^p\right)}{\sqrt{y^{2p}-1}} = p$$

此时

$$2\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+(n\pi)^p\left|\sin x\right|^q}dx \sim C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n\pi)}{(n\pi)^{p}}$$

于是我们有

$$\begin{cases} \text{发散}, & p \leqslant 1 \\ \text{收敛}, & p>q>1, \text{或者} p>1, q\leqslant 1 \end{cases}$$

Problem 193

设 $f \in H\left(B\left(0,1\right)\right), z_0 \neq 0, f\left(z_0\right) \neq 0, f'\left(z_0\right) \neq 0$,

若

$$\left|f\left(z_0\right)\right| = \max_{|z| \leqslant |z_0|} \left|f\left(z\right)\right|$$

证明：

$$\frac{z_0 f'\left(z_0\right)}{f\left(z_0\right)} > 0$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 不妨设 $z_0 \in (0,1)$, 否则考虑 $\tilde{f}\left(z\right) = f\left(ze^{i\arg z_0}\right)$ 即可.

注意到

$$g\left(z\right) = \ln f\left(z\right) = u + iv, u = \ln\left|f\left(z\right)\right|$$

u 在 $|z| \leqslant z_0$ 交上解析邻域内达到最大值, 因此 $u_x(z_0) \geqslant 0, u_y(z_0) = -v_x(z_0) = 0$, 这一步的理由在之前推文已经类似论述过, 所以

$$g'\left(z_0\right) = \frac{f'\left(z_0\right)}{f\left(z_0\right)} = u_x\left(z_0\right) + iv_x\left(z_0\right) = u_x\left(z_0\right) > 0$$

我们完成了证明.

Problem 194

设 $1 \leqslant p < \infty$, ℓ^p 作为 $\mathbb{R}^\infty$ 子空间的拓扑诱导的 *borel* 代数和 ℓ^p 的范数拓扑诱导的 *borel* 代数一致.

这里 $\mathbb{R}^\infty$ 的拓扑是 $\mathbb{R}$ 的可数积拓扑.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 给定拓扑空间 X, 我们用 $B(X)$ 表示其拓扑生成的 *borel* 代数, 题目让我们证明

$$B\left(\ell^p\right) = B\left(\mathbb{R}^\infty\right) \bigcap \ell^p$$

由实变函数经典习题, 等号右边恰好是子空间拓扑生成的 *borel* 代数.

对 $\{a_i\}_{i=1}^\infty \in \ell^p$, 注意到

$$\{x \in \ell^p : ||x-a||_{\ell^p}^p \leqslant \delta\} = \bigcap_{n=1}^\infty \left(\left\{x = \{x_i\}_{i=1}^\infty \in \mathbb{R}^\infty : \sum_{i=1}^n |x_i - a_i|^p \leqslant \delta\right\} \bigcap \ell^p\right)$$

注意到上述等式右边是 ℓ^p 作为 $\mathbb{R}^\infty$ 的子空间拓扑闭集的可数交, 左边是 ℓ^p 空间的闭球.

对 ℓ^p 中的开集 (范数拓扑)U, 设 $x \in U$, 有 $r_x > 0$, 使得 $\overline{B\left(x, r_x\right)} \subset U$, 于是

$$U = \bigcup_{x \in U} B\left(x, r_x\right) = \bigcup_{x \in U} \overline{B\left(x, r_x\right)}$$

由于 *lindelof* 性, 上述并可以看成可数并, 这告诉我们

$$U \in B\left(\mathbb{R}^\infty\right) \bigcap \ell^p \Longrightarrow B\left(\ell^p\right) \subset B\left(\mathbb{R}^\infty\right) \bigcap \ell^p$$

另外一方面, 容易验证当 $X_1, X_2, \cdots, X_s$ 为 $\mathbb{R}$ 闭集时, $(X_1 \times X_2 \times \cdots X_s \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots) \bigcap \ell^p$ 为 ℓ^p 依范数闭集.

设 $X_1, X_2, \cdots, X_s$ 为 $\mathbb{R}$ 开集, 考虑子空间拓扑基元素 $A = (X_1 \times X_2 \times \cdots X_s \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots) \bigcap \ell^p$, 有

$$\begin{aligned} A\text{在}\ell^p\text{中的补集} &= (X_1 \times X_2 \times \cdots X_s \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots)^c \bigcap \ell^p \\ &= \left[(X_1^c \times \mathbb{R} \times \cdots) \bigcup (\mathbb{R} \times X_2^c \times \mathbb{R} \times \cdots) \bigcup \cdots \bigcup (\mathbb{R} \times \cdots \times X_s^c \times \mathbb{R} \times \cdots)\right] \bigcap \ell^p \end{aligned} \tag{94}$$

这告诉我们

$$A \in B\left(\ell^p\right) \Longrightarrow B\left(\mathbb{R}^\infty\right) \bigcap \ell^p \subset B\left(\ell^p\right)$$

因此我们有

$$B\left(\ell^{p}\right)=B\left(\mathbb{R}^{\infty}\right) \bigcap \ell^{p}$$

这就完成了证明.

Problem 195

给定 $1 \leqslant p < \infty$, 考虑全有限 *borel* 测度空间 $\left(\ell^p, B\left(\ell^p\right), \mu\right)$.

设 M 是 $L^2\left(\ell^p, \mu\right)$ 子空间, 若存在集族 $S_0 \subset B\left(\ell^p\right)$, 使得 :

$(1): \ell^p \in S_0$,

$(2): \chi_A \in \overline{M},\ \forall A \in g(S_0)$,

$(3): \sigma\left(S_0\right) = \ell^p$.

则 $\overline{M} = L^2\left(\ell^p, \mu\right)$.

这里 $g\left(S_0\right)$ 是 S_0 生成的半代数.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学)

事实上对 $f \in L^2\left(\ell^p, P\right)$, 存在简单函数 g_n, 使得

$$\left|g_n\left(x\right)\right| \leqslant \left|f\left(x\right)\right|, \lim_{n\to\infty} g_n\left(x\right) = f\left(x\right), \forall x \in \ell^p$$

这样就有

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\ell^p} \left|g_n\left(x\right) - f\left(x\right)\right|^2 d\mu = \int_{\ell^p} \lim_{n\to\infty} \left|g_n\left(x\right) - f\left(x\right)\right|^2 d\mu = 0$$

因此只需证明全体简单函数在 $\overline{M}$ 中, 因为 $\overline{M}$ 是线性空间, 只需证明 $\chi_A \in \overline{M},\ \forall A \in B\left(\ell^p\right)$.

设 $S \subset B\left(\ell^p\right), \sigma\left(S\right) = B\left(\ell^p\right)$ 是一代数, 则 $\forall A \in B\left(\ell^p\right)$, 存在 $\left\{B_n\right\}_{n=1}^{\infty} \subset S$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} \mu\left(A\Delta B_n\right) = 0$, 这给出了

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\ell^2} \left|\chi_A - \chi_{B_n}\right|^2 d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{A\Delta B_n} 1 d\mu = 0$$

因此只需证明 $\chi_A \in \overline{M},\ \forall A \in S$.

给定某个包含 ℓ^p 的集族 S_0, 给定

$$g(S_0) = \left\{\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \bigcap \left(\bigcap_{j=1}^{m} B_j^c\right) : n, m \in \mathbb{N}_+, A_i, B_j \in S_0, 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m\right\}$$

我们知道

$$R\left(S_0\right) = \left\{\bigcup_{i=1}^{n} A_i : n \in \mathbb{N}_+, A_i \in g(S_0), 1 \leqslant i \leqslant n, A_1, A_2, \cdots, A_n \text{两两不交}\right\}$$

这里 $R\left(S_0\right)$ 是 S_0 生成的代数, $g\left(S_0\right)$ 是 S_0 生成的半代数.

如果 $\chi_A \in \overline{M}, \forall A \in g(S_0)$, 我们对 $A \in R(S_0)$, 存在两两不交的 $A_i \in g(S_0), 1 \leqslant i \leqslant n$, 使得 $A = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$.

那么可以找到

$$g_k^{(i)} \in M, \lim_{k\to\infty} \left\|g_k^{(i)} - \chi_{A_i}\right\|_{L^2(\ell^p,\mu)} = 0, i = 1, 2, \cdots, n$$

因此

$$\lim_{k\to\infty} \left\|\sum_{i=1}^n g_k^{(i)} - \chi_A\right\|_{L^2(\ell^p,\mu)} = \lim_{k\to\infty} \left\|\sum_{i=1}^n g_k^{(i)} - \sum_{i=1}^n \chi_{A_i}\right\|_{L^2(\ell^p,\mu)} \leqslant \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^n \left\|g_k^{(i)} - \chi_{A_i}\right\|_{L^2(\ell^p,\mu)} = 0$$

从而 $A \in \overline{M}$.

因此只需对某个集族 $S_0 \subset S$, 使得 $\sigma(S_0) = B(\ell^p)$, 并验证 $\chi_A \in \overline{M}, A \in g(S_0)$ 即可, 这里可取 $S = R(S_0)$. 本结果中 ℓ^p 可改为任何全有限测度空间 (X, M, μ).

Problem 196

给定 $1 \leqslant p < \infty$, 考虑全有限 *borel* 测度空间 $(\ell^p, B(\ell^p), \mu)$, 记

$$M = \left\{ f \in L^2(\ell^p, \mu) : f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), n \in \mathbb{N}_+ \right\}$$

则 $\overline{M} = L^2(\ell^p, \mu)$.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 考虑

$$S_0 = \left\{ ([a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] \times \mathbb{R} \times \cdots) \bigcap \ell^p : -\infty < a_i < b_i < +\infty, i = 1, 2, \cdots, n, n \in \mathbb{N}_+ \right\} \bigcup \{\ell^p\}$$

则对上一命题的 (1), S_0 显然满足.

取

$$f_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}), |f_n(x)| \leqslant 1, \lim_{n \to \infty} f_n(x) = 1$$

有

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\ell^p} |f_n(x) - 1|^2 \, d\mu = \int_{\ell^p} \lim_{n \to \infty} |f_n(x) - 1|^2 \, d\mu = 0$$

则 $1 \in \overline{M}$.

对 $A = ([a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] \times \mathbb{R} \times \cdots) \bigcap \ell^p$, 取

$$f_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \lim_{k \to \infty} f_k = \chi_{\prod\limits_{i=1}^{n} [a_i, b_i]}, \ |f_k| \leqslant 1, \forall k = 1, 2, \cdots$$

因此由控制收敛定理, 我们有

$$\lim_{k \to \infty} \int_{\ell^p} |f_k(x_1, x_2, \cdots, x_n) - \chi_A|^2 \, d\mu = 0$$

因此 $\chi_A \in \overline{M}$.

对 $A \in S_0$, $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A \in \overline{M}$, 且可取

$$\{g_k\}_{k=1}^\infty \subset M, \ |g_k| \leqslant 2, \ k = 1, 2, \cdots, \ \lim_{k \to \infty} ||g_k - \chi_{A^c}||_{L^2(\ell^p, \mu)} = 0$$

取

$$A = \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i \right) \bigcap \left(\bigcap_{j=1}^{m} B_j^c \right), A_i, B_j \in S_0, 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m$$

我们可取

$$f_k^{(i)}, g_k^{(j)} \in M,\ \left|f_k^{(i)}\right| \leqslant 1, \left|g_k^{(j)}\right| \leqslant 2,\ \lim_{k\to\infty}\left|\left|f_k^{(i)} - \chi_{A_i}\right|\right|_{L^2(\ell^p,\mu)} = 0,\ \lim_{k\to\infty}\left|\left|g_k^{(j)} - \chi_{B_j^c}\right|\right|_{L^2(\ell^p,\mu)} = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m$$

显然运用依测度收敛和里斯引理, 我们可以找到子列, 不妨仍然记为 $f_k^{(i)}, g_k^{(j)}$, 使得

$$\lim_{k\to\infty} f_k^{(i)} = \chi_{A_i}, \lim_{k\to\infty} g_k^{(j)} = \chi_{B_j^c},\ a.e\ \mu,\ 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m$$

取

$$h_k = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m} f_k^{(i)} g_k^{(j)} \in M, |h_k| \leqslant 2^m, k = 1, 2, \cdots$$

则由控制收敛定理, 我们有

$$\lim_{k\to\infty} ||h_k - \chi_A||_{L^2(\ell^p,\mu)} = \lim_{k\to\infty}\left|\left|h_k - \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}\chi_{A_i}\chi_{B_j^c}\right|\right|_{L^2(\ell^p,\mu)} = 0$$

这告诉我们 $\chi_A \in \overline{M}, \forall A \in g(S_0)$. 故上一命题的 (2), S_0 满足.

因为 S_0 中的集合都是 ℓ^p 按子空间拓扑的闭集, 因此 $\sigma(S_0) \subset \sigma(\mathbb{R}^\infty) \bigcap \ell^p = \sigma(\ell^p)$.

反之, 设 $F = H^c \bigcap \ell^p, H = \bigcup\limits_a H_a$, H_a 为 $\mathbb{R}^\infty$ 开柱集 (即除有限个分量外的其余分量都是 $\mathbb{R}$, 这有限个分量都是 $\mathbb{R}$ 中的开集).

由 $lindelof$ 性, 可设上面的并为可数并, 我们断言 $H_a \bigcap \ell^p \in \sigma(S_0)$.

事实上设 $H_{a_i} = X_1 \times \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty \times \cdots$, 其余情况是类似的 (多个分量非 $\mathbb{R}$ 的情形可表示成一个分量非 $\mathbb{R}$ 的情形的有限交). 因为全体开区间是 $\mathbb{R}$ 的拓扑基, 故可不妨设 $X_1 = (a, b)$, 否则把 X_1 表示成开区间的可数并即可.

此时注意到

$$H_{a_i} \bigcap \ell^p = \bigcup_{j=\left[\frac{1}{2(b-a)}\right]+1}^{\infty} [(\left[a + \frac{1}{j}, b - \frac{1}{j}\right] \times \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty \times \cdots) \bigcap \ell^p] \in \sigma(S_0)$$

因此 $F \in \sigma(A_0)$.

由于 F 全体是 ℓ^p 子空间拓扑闭集全体, 并且有 $F \in \sigma(S_0)$, 于是 $\sigma(\ell^p) = \sigma(\mathbb{R}^\infty) \bigcap \ell^p \subset \sigma(A_0)$.

这告诉我们上一命题的 (3), S_0 满足.

我们证明了结论.

Problem 197

给定 $1 \leqslant p < \infty$, 考虑全有限 *borel* 测度空间 $(\ell^p, B(\ell^p), \mu)$, 记

$$M = span\left\{\cos\left(\sum_{k=1}^{n} c_k x_k\right), \sin\left(\sum_{k=1}^{n} d_k x_k\right) : c_k, d_k \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_+\right\}$$

则 $\overline{M} = L^2(\ell^p, \mu)$.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 从上一命题, 只需对 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, 证明 $f \in \overline{M}$.

考虑 $f_M(x) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^n} f(x + 2\pi M k), x \in \mathbb{R}^n$,

则对给定 $x \in \mathbb{R}^n$, 当 M 充分大, 我们有 $x + 2k\pi M \notin supp\ f(x)$, $\forall k \neq 0$, 于是

$$\lim_{M\to\infty} f_M(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}^n$$

设 $supp\ f \subset \prod\limits_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$, 由

$$a_i \leqslant x_i + 2k_i\pi M \leqslant b_i,\ i = 1, 2, \cdots, n \Leftrightarrow \frac{a_i - x_i}{2\pi M} \leqslant k_i \leqslant \frac{b_i - x_i}{2\pi M},\ i = 1, 2, \cdots, n$$

知, 对 $i = 1, 2, \cdots$, k_i 最多可取 $\left[\frac{b_i - x_i - a_i + x_i}{2\pi M}\right] + 1 = \left[\frac{b_i - a_i}{2\pi M}\right] + 1$ 项, 所以上述和式最多只有 $\prod\limits_{i=1}^{n}\left(\left[\frac{b_i - a_i}{2\pi M}\right] + 1\right)$ 项非 0, 这给出了

$$|f_M(x)| \leqslant \prod_{i=1}^{n}\left(\left[\frac{b_i - a_i}{2\pi M}\right] + 1\right)\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|f(x)|,\ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

由控制收敛定理, 显然有

$$\lim_{M\to\infty} ||f_M - f||_{L^2(\ell^p,\mu)} = 0$$

注意到 $f_M \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 且关于每个分量周期为 $2\pi M$. 考虑

$$F_M : \mathbb{T}^n \triangleq \underbrace{S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1}_{n\text{个}} \to \mathbb{R},\ \left(e^{\frac{\theta_1\sqrt{-1}}{M}}, e^{\frac{\theta_2\sqrt{-1}}{M}}, \cdots, e^{\frac{\theta_n\sqrt{-1}}{M}}\right) \to f_M(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n)$$

熟知 $\mathbb{T}^n$ 是紧 $Hausdorff$ 空间, 显然 F_M 是 $\mathbb{T}^n$ 上连续函数.

注意到全体实系数多项式 $\mathbb{R}[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 的实部和虚部张成的线性空间 W 是 $C(\mathbb{T}^n)$ 的含幺子代数, 显然可分点. 这里如此定义

$$p(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}^n} c_k x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n},\ p\left(e^{\frac{\theta_1\sqrt{-1}}{M}}, e^{\frac{\theta_2\sqrt{-1}}{M}}, \cdots, e^{\frac{\theta_n\sqrt{-1}}{M}}\right) = \Re\sum_{k\in\mathbb{N}^n} c_k e^{\frac{(k,\theta)}{M}\sqrt{-1}} \text{或} \Im\sum_{k\in\mathbb{N}^n} c_k e^{\frac{(k,\theta)}{M}\sqrt{-1}}$$

由 $stone-weierstrass$ 定理, 我们知道 $\exists p_k\in W$, 使得

$$p_k\left(e^{\frac{\theta_1\sqrt{-1}}{M}},e^{\frac{\theta_2\sqrt{-1}}{M}},\cdots,e^{\frac{\theta_n\sqrt{-1}}{M}}\right)\rightrightarrows F_M\left(e^{\frac{\theta_1\sqrt{-1}}{M}},e^{\frac{\theta_2\sqrt{-1}}{M}},\cdots,e^{\frac{\theta_n\sqrt{-1}}{M}}\right),\ k\to\infty$$

那么显然有 $\lim\limits_{k\to\infty}||p_k-f_M||_{L^2(\ell^p,\mu)}=0$, 我们完成了证明.

Problem 198

设 $1 \leqslant p < \infty$, 考虑全有限 *borel* 测度空间 $(\ell^p, B(\ell^p), \mu), (\mathbb{R}^n, B(\mathbb{R}^n), \mu)$, 令

$$P_m = span\left\{x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_m^{m_m} : m_1, m_2, \cdots, m_m \in \mathbb{N}\right\}, P = \bigcup_{m=1}^{\infty} P_m$$

则 P_m 在 $L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$ 中稠密, P 在 $L^2(\ell^p, \mu)$ 中稠密.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 考虑连续投影 $\tau_n : \ell^p \to \mathbb{R}^n : \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \to \{x_i\}_{i=1}^{n}$, 诱导 $\mathbb{R}^n$ 上的像测度, 则 $\mu_n(A) = \mu(\tau_n^{-1}(A)), \forall A \in B(\mathbb{R}^n)$.

如果对有限维命题成立, 我们对 $f \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, 可以找到 $p_k(x) \in P_n$, 使得

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |p_k(x) - f(x)|^2 d\mu_n = \lim_{k\to\infty} \int_{\ell^p} |p_k(\tau_n(x)) - f(\tau_n(x))|^2 d\mu = 0$$

于是我们完成了无穷维的证明.

对有限维时, 设 $f \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n), \forall \varphi \in (\mathbb{R}^n)^{\star}, \varphi \neq 0$, 考虑 $\int_{\mathbb{R}^n} f\varphi^n d\mu = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

令

$$h(z) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{z\varphi} f d\mu, z \in \mathbb{C}$$

注意到对 $z_0 \in \mathbb{C}$, 考虑 $B(z_0, \eta), \eta > 0, \varepsilon > 0$, 于是有

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=0}^{\infty} |\frac{(z - z_0)^k \varphi^k}{k!} e^{z_0\varphi} f| d\mu \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(\eta|\varphi|)^k}{k!} e^{\Re(z_0\varphi)} |f| d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} e^{(\eta+|z_0|)|\varphi|} |f| d\mu < \infty$$

由控制收敛定理, 在 $z \in B(z_0, \eta)$ 我们有

$$h(z) = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k \varphi^k}{k!} e^{z_0\varphi} f d\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \varphi^k f d\mu \cdot e^{z_0\varphi}}{k!} (z - z_0)^k = 0$$

这给出了

$$h\left(\sqrt{-1}\right) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\sqrt{-1}\varphi} f d\mu = 0,\ \forall \varphi \in (\mathbb{R}^n)^{\star} \Longrightarrow f = 0$$

这给出了 $span\left\{\varphi^n : \varphi \in (\mathbb{R}^n)^{\star}, n \in \mathbb{N}\right\}$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$ 中稠密, 这给出了 P_n 在 $L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$ 中稠密.

Problem 199

证明下列 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是正定矩阵.

(1) : $a_{ij}=\frac{(i+j)!}{i!j!}$.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 注意到

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{(i+j)!}{i!j!}x_ix_j=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int_0^{\infty}e^{-t}\frac{t^{i+j}}{i!j!}x_ix_jdt=\int_0^{\infty}e^{-t}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{t^ix_i}{i!}\right)^2dt\geqslant 0$$

显然正定.

Problem 200

证明

$$\lim_{x\to1^+}(x-1)^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}=1$$

学习这种方法, 并计算

$$\lim_{s\to0^+}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\ln k}{k^s}$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 运用复分析上述命题是熟知且经典的, 下面假定读者只具备高等数学知识给出计算.

注意到 $(n+1)^{1-x}-n^{1-x}=n^{1-x}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1-x}-1\right]=\frac{1-x}{n^x}+\frac{(x-1)x}{2n^{1+x}}+O\left(\frac{1}{n^{2+x}}\right)$, 因此我们可以如下改善级数的收敛速度, 从而获得估计.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}&=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-1}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{x-1}{n^x}+(n+1)^{1-x}-n^{1-x}\right]\\&=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-1}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{x-1}{n}e^{(1-x)\ln n}+e^{(1-x)\ln(n+1)}-e^{(1-x)\ln n}\right]\\&=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-1}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{(x-1)(1-x)^m\ln^m n}{nm!}+\frac{(1-x)^{m+1}\ln^{m+1}(n+1)}{(m+1)!}-\frac{(1-x)^{m+1}\ln^{m+1}n}{(m+1)!}\right]\\&=\frac{1}{x-1}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(x-1)^m}{m!}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\ln^m n}{n}-\frac{\ln^{m+1}(n+1)}{m+1}+\frac{\ln^{m+1}n}{m+1}\right]\end{aligned}\tag{95}$$

在这里运用 *taylor* 容易知道

$$\gamma_m\triangleq\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\ln^m n}{n}-\frac{\ln^{m+1}(n+1)}{m+1}+\frac{\ln^{m+1}n}{m+1}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}O\left(\frac{\ln^m n}{n^2}\right)<\infty,\ \forall m\in\mathbb{N}$$

我们还需要检查上述二重级数换序的合法性, 当 $1<x<2$, 有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left|\frac{(1-x)^m\ln^m n}{nm!}-\frac{(1-x)^m\ln^{m+1}(n+1)}{(m+1)!}+\frac{(1-x)^m\ln^{m+1}n}{(m+1)!}\right|\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{|x-1|^m}{m!}\left|\frac{\ln^m n}{n}-\frac{\ln^{m+1}(n+1)}{m+1}+\frac{\ln^{m+1}n}{m+1}\right|\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{|x-1|^m}{m!}\left|\frac{\ln^m n}{n}-\frac{[\ln n+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)]^{m+1}}{m+1}+\frac{\ln^{m+1}n}{m+1}\right|\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{|x-1|^m}{m!}\left|\frac{\ln^m n}{n}-\frac{[\ln n+\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)]^{m+1}}{m+1}+\frac{\ln^{m+1}n}{m+1}\right|\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{|x-1|^m}{m!}O\left(\frac{\ln^m n}{n^2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}O\left(\frac{1}{n^{2-|x-1|}}\right)<\infty
\end{aligned}
\tag{96}
$$

因此我们对 $1<x<2$, 得到了恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}=\frac{1}{x-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\gamma_n(-1)^n(x-1)^n}{n!}$$

注意左边级数及其逐项求导级数内闭一致收敛, 右边是幂级数, 当然可以逐项微分得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}=\frac{1}{(x-1)^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\gamma_n(-1)^n(x-1)^{n-1}}{(n-1)!},x\in(1,2)$$

这样我们就知道左边级数在 $x\in(1,2)$ 等于一个幂级数定义的函数, 因为极限定义是去心邻域的性态, 所以左边幂级数定义的函数的渐进展开就是 *taylor* 公式的 *peano* 余项导出, 它也是我们需要的级数的渐进展开.

Problem 201

考虑 $T:\ell^2\to\mathbb{R}^n,\{x_i\}_{i=1}^{\infty}\to\{x_i\}_{i=1}^{n}$, 则 T 诱导的 $\mathbb{R}^n$ 像测度就是我们在 $\mathbb{R}^n$ 定义的高斯测度.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 我们暂时用 P^n 表示投影后的像测度,

$$T^n\triangleq\left\{\{x_i\}_{i=n+1}^{\infty}:\sum_{i=n+1}^{\infty}x_i^2<\infty\right\}$$

于是我们有

$$P^n(A)=P\left(T^{-1}(A)\right)=P\left(A\times T^n\right)=N^n(A),\forall A\in B\left(\mathbb{R}^n\right)$$

这给出了证明.

Problem 202

设 $\mathbb{F}$ 是一代数闭域, 给定 $n \in \mathbb{N}_+$, $A \in M_n(\mathbb{F})$, 则存在 $C, B \in M_n(\mathbb{F})$ 使得 :

$(1): A = C + B$,

$(2): C$ 是幂零矩阵, B 是可对角化矩阵,

$(3): BC = CB$,

$(4):$ 存在没有常数项的多项式 $p(x), q(x) \in \mathbb{F}[x]$, 使得 $C = q(A), B = p(A)$.

且满足 $(1)-(3)$ 的分解 B, C 是唯一的.

设 $\mathbb{F}$ 是一代数闭域, 给定 $n \in \mathbb{N}_+$, $A \in M_n(\mathbb{F})$ 且可逆, 则存在 $C, B \in M_n(\mathbb{F})$ 使得 :

$(1): A = CB$,

$(2): C$ 是特征值全为单位元矩阵, B 是可对角化的可逆矩阵,

$(3): BC = CB$,

$(4):$ 存在没有常数项的多项式 $p(x), q(x) \in \mathbb{F}[x]$, 使得 $C = q(A), B = p(A)$.

且满足 $(1)-(3)$ 的分解 B, C 是唯一的.

Proof. (By 清疏竞赛数学) 不妨设 $A = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_s \end{pmatrix}$, 其中 $J_i, i = 1, 2, \cdots, s$ 是同一个特征值对应所有 $jordan$ 块排在一起的矩阵, 设其对应特征值为 $\lambda_i, i = 1, 2, \cdots, s$.

当 A 可逆时, 我们有

$$A = \begin{pmatrix} J_1 - \lambda_1 I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 - \lambda_2 I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_s - \lambda_s I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_s I \end{pmatrix} = C + B$$

或者

$$A = \begin{pmatrix} \frac{J_1}{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{J_2}{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{J_s}{\lambda_s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_s I \end{pmatrix} = CB$$

由中国剩余定理, 取 s_i 是 J_i 的阶数, 则存在 $f(\lambda)$, 我们有

$$\begin{cases} f(\lambda) \equiv \lambda_i \left(mod \left(\lambda - \lambda_i \right)^{s_i} \right), & i = 1, 2, \cdots, s \\ f(\lambda) \equiv 0 \left(mod \lambda^j \right), & j\text{为任意给定自然数} \end{cases}$$

代入就有

$$f(A) = B, C = A - f(A) \text{或} C = A \left[f(A) \right]^{-1}$$

且 B, C 对应的多项式都没有常数项.

当 A 不可逆时, 不妨设 $\lambda_s = 0$, 对加法, 同样有上述的分解, 因此我们取的 $f(\lambda)$ 天然的包含第二项, 于是我们完成了存在性证明, 下证唯一性 :

若还有 $A = C' + B'$ 满足条件, 则 $C' - C = B - B'$, C, C' 和 B, B' 可交换, 因此对充分大的 n, 利用 B, B' 可同时对角化, 我们有

$$0 = (C' - C)^n = (B - B')^n \Longrightarrow B = B'$$

对 $A = C'B'$ 满足条件, 我们有 $C^{-1}C' = B(B')^{-1}$,C, C' 和 B, B' 可交换, 因此对充分大的 n, 利用 C, C' 可同时上三角化, 因此 $C^{-1}C'$ 特征值全部是 1, 利用 B, B' 可同时对角化, 因此 $B(B')^{-1} = E$, 我们完成了证明.

Problem 203

(1) : 设 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 二阶可导, $f(0)=0$, 证明存在 $\zeta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, 使得

$$f''(\zeta)=f(\zeta)\left(1+2\tan^2\zeta\right)$$

(2) : 设 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 二阶可导, $f(0)=0$, 证明存在 $\zeta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, 使得

$$f''(\zeta)=3f'(\zeta)\tan\zeta+2f(\zeta)$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) (1) :

求解微分方程 $y''=y\left(1+2\tan^2 x\right)$, 我们得到通解 $y=c_1\frac{1}{\cos x}+c_2\frac{\sin(2x)+2x}{\cos x}$, 因此有

$$(y\cos x)'=c_2\left(2\cos(2x)+2\right),\left(\frac{(y\cos x)'}{1+\cos(2x)}\right)'=0$$

这样只需要构造函数

$$g(x)=f(x)\cos x,h(x)=\left(\frac{g'(x)}{1+\cos(2x)}\right)'=\frac{f''(x)-f(x)\left(1+2\tan^2 x\right)}{2\cos x}$$

注意到 $g(x)$ 有三个零点 $-\frac{\pi}{2},0,\frac{\pi}{2}$, 因此由罗尔中值定理, $h(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 有两个零点, 再由罗尔中值定理, 就知道存在 $\zeta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, 使得

$$f''(\zeta)=f(\zeta)\left(1+2\tan^2\zeta\right)$$

(2) :

求解微分方程 $y''=3y'\tan x+2y$, 我们得到通解 $y=c_1\frac{1}{\cos^2 x}+c_2\frac{\sin(x)}{\cos^2 x}$, 因此有

$$(y\cos^2 x)'=c_2\cos x,\left(\frac{(y\cos^2 x)'}{\cos x}\right)'=0$$

这样只需要构造函数

$$g(x)=f(x)\cos^2 x,h(x)=\left(\frac{g'(x)}{\cos x}\right)'=\cos x\cdot\left(f''(x)-2f(x)-3\tan x\cdot f'(x)\right)$$

反复运用罗尔定理即得, 存在 $\zeta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, 使得

$$f''(\zeta) = 3f'(\zeta)\tan\zeta + 2f(\zeta)$$

Problem 204

考虑测度空间 $(X, B(X), \mu)$,H 是 X 上某些可测实值函数的线性空间, 如果满足 :

(1) : H 对一致有界函数列逐点收敛封闭,

(2) : $1 \in H$.

设 $M \subset H$ 且对乘法封闭且 M 中都是有界函数则 H 包含所有 $\sigma(M)-$ 有界实值可测函数.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 记 H_0 是包含 $1,M$ 的最小的满足 $(1),(2)$ 的某些有界可测实值函数的线性空间.

考虑

$$H_0^f = \{g \in H_0 : fg \in H_0\},\ f \in H_0$$

首先 $1 \in H_0^f$, 其次设

$$g_n \in H_0^f, |g_n| \leqslant M, \lim_{n\to\infty} g_n = g$$

有

$$fg_n \in H_0, |fg_n| \leqslant M \sup_{x\in X} |f|, \lim_{n\to\infty} fg_n = fg, |fg| \leqslant M \sup_{x\in X} |f|$$

因此对 $f \in M$, H_0^f 是包含 $1,M$ 的最小的满足 $(1),(2)$ 的某些有界可测实值函数的线性空间, 这告诉我们

$$H_0^f = H_0 \Longrightarrow fg \in H_0, \forall f \in M, g \in H_0$$

从而对 $f \in H_0$, H_0^f 是包含 $1,M$ 的最小的满足 $(1),(2)$ 的某些有界可测实值函数的线性空间, 这告诉我们

$$H_0^f = H_0 \Longrightarrow fg \in H_0, \forall f, g \in H_0$$

要证明 $\chi_A \in H_0$, $\forall A \in \sigma(M)$, 构造

$$S = \{A \in \sigma(M) : \chi_A \in H_0\}$$

显然 $X, \emptyset \in S$, 且

$$A \in S \Longrightarrow \chi_A \in H_0 \Longrightarrow \chi_{A^c} = 1 - \chi_A \in H_0 \Longrightarrow A^c \in S$$

$$A, B \in S \Longrightarrow \chi_A, \chi_B \in H_0 \Longrightarrow \chi_A\chi_B = \chi_{A\bigcap B} \in H_0 \Longrightarrow A\bigcap B \in S$$

$$A_n \in S, A_n \uparrow A \Longrightarrow \chi_{A_n} \in S, \chi_A = \lim_{n\to\infty} \chi_{A_n} \Longrightarrow \chi_A \in S$$

因此 S 是单调的代数, 从而是 σ 代数.

只需再断言

$$f^{-1}\left((c,+\infty)\right)\in S,\forall f\in M,c\in\mathbb{R}$$

设 $|f\left(x\right)|\leqslant s$, 考虑 $\varphi_n\left(x\right)\in C\left(\mathbb{R}\right),|\varphi_n\left(t\right)|\leqslant 1,\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n\left(t\right)=\chi_{(c,+\infty)}\left(t\right)$ 和多项式 $g_n(t)$, 有

$$|\varphi_n\left(t\right)-g_n\left(t\right)|\leqslant\frac{1}{n},t\in[-s,s]$$

则有

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n\left(f\left(x\right)\right)=\chi_{(c,+\infty)}\left(f\left(x\right)\right)=\chi_{f^{-1}((c,+\infty))}\left(x\right)$$

以及

$$|g_n\left(t\right)|\leqslant 2,\lim_{n\to\infty}g_n\left(f\left(x\right)\right)=\chi_{f^{-1}((c,+\infty))}\left(x\right)$$

因此 $\chi_{f^{-1}((c,+\infty))}\left(x\right)\in S$. 因此 H_0 包含所有 $\sigma\left(M\right)-$ 有界实值可测函数.

考虑 H 和所有有界实值可测函数空间之交 H_1, 显然 H_1 满足 (1),(2) 且 $M\subset H_1$, 这样 H_1 就包含所有 $\sigma\left(M\right)-$ 有界实值可测函数, 从而 H 亦然, 我们完成了证明.

Problem 205

设 $1 \leqslant p < \infty$, 考虑全有限测度空间 $(X, B(X), \mu)$, M 是 X 上某些有界可测实值函数的集合, 如果满足：

(1) : 对乘法封闭,

(2) : $\sigma(M) = B(X)$,

(3) : $1 \in \overline{spanM}$.

则有 $\overline{spanM} = L^p(X, B(X), \mu)$.

PROOF. (*By* 清疏竞赛数学) 显然 $\overline{spanM}$ 对一致有界收敛封闭, 容易知道 $\overline{spanM}$ 是 X 上某些可测实值函数组成的线性空间.

只需要 $1 \in \overline{spanM}$, 那么就有 $\overline{spanM}$ 包含所有 $\sigma(M)-$ 有界实值可测函数, 因此 $\overline{spanM}$ 包含 X 上的所有特征函数, 所以 $\overline{spanM} = L^p(X, B(X), \mu)$.

Problem 206

考虑

$$f(x)=\int_0^x\left(1-\frac{[u]}{u}\right)du=x-[x]\ln x+\sum_{k=1}^{[x]}\ln k, x\to+\infty$$

这里 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 证明

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\sqrt{x}[e^{f(x)}-\sqrt{2\pi x}]=\sqrt{2\pi},\quad \underline{\lim_{x\to+\infty}}\sqrt{x}[e^{f(x)}-\sqrt{2\pi x}]=-\frac{\sqrt{2\pi}}{24}$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 注意到

$$\begin{aligned}f(x)&=x-[x]\ln x+\frac{\ln[x]}{2}+\frac{\ln(2\pi)}{2}+[x]\ln[x]-[x]+\frac{1}{12[x]}+O\left(\frac{1}{[x]^3}\right)\\&=\{x\}-\left([x]+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{\{x\}}{x}\right)+\frac{\ln x}{2}+\frac{\ln(2\pi)}{2}+\frac{1}{12(x-\{x\})}+O\left(\frac{1}{x^3}\right)\\&=\{x\}-\left([x]+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\{x\}}{x}-\frac{\{x\}^2}{2x^2}+\frac{\{x\}^3}{3x^3}\right)+\frac{\ln x}{2}+\frac{\ln(2\pi)}{2}+\frac{\{x\}}{12x^2}+O\left(\frac{1}{x^3}\right)\\&=\frac{\ln x}{2}+\frac{\ln(2\pi)}{2}+\frac{3\{x\}^2-\{x\}}{2x}-\frac{10\{x\}^3-\{x\}-3\{x\}^2}{12x^2}+O\left(\frac{1}{x^3}\right)\end{aligned}\tag{97}$$

于是有

$$\begin{aligned}e^{f(x)}&=e^{\frac{\ln x}{2}+\frac{\ln(2\pi)}{2}+\frac{3\{x\}^2-\{x\}}{2x}-\frac{10\{x\}^3-\{x\}-3\{x\}^2}{12x^2}+O\left(\frac{1}{x^3}\right)}\\&=\sqrt{2\pi x}e^{\frac{3\{x\}^2-\{x\}}{2x}-\frac{10\{x\}^3-\{x\}-3\{x\}^2}{12x^2}}\left(1+O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\\&=\sqrt{2\pi x}+\frac{3\{x\}^2-\{x\}}{2\sqrt{x}}\sqrt{2\pi}+\frac{\frac{9}{8}\{x\}^4-\frac{19}{12}\{x\}^3+\frac{3}{8}\{x\}^2+\frac{1}{12}\{x\}}{x\sqrt{x}}\sqrt{2\pi}+O\left(\frac{1}{x^2\sqrt{x}}\right)\end{aligned}\tag{98}$$

我们有

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\sqrt{x}[e^{f(x)}-\sqrt{2\pi x}]=\sqrt{2\pi},\quad \underline{\lim_{x\to+\infty}}\sqrt{x}[e^{f(x)}-\sqrt{2\pi x}]=-\frac{\sqrt{2\pi}}{24}$$

Problem 207

设 $f(z)\in H(B(0,1)), f(0)=0$, 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(z^n)\text{ 在}B(0,1)\text{ 内闭绝对且一致收敛}$$

Proof. (By 清疏竞赛数学) $\forall r\in(0,1)$, 取 $C=\left\{z\in\mathbb{C}:|z|=\frac{1+r}{2}\right\}$, 于是在 $|z|\leqslant r$ 上有

$$|z|^n\leqslant r^n\leqslant r<\frac{1+r}{2}\Rightarrow z^n\in C^o,\forall n\geqslant 1$$

则有

$$\begin{aligned}
|f(z^n)|&=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_C\left(\frac{f(w)}{w-z^n}-\frac{f(w)}{w}\right)dw\right|\\
&\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_C\left|\frac{f(w)}{w-z^n}-\frac{f(w)}{w}\right|ds\\
&=\frac{|z|^n}{2\pi}\int_C\frac{|f(w)|}{|(w-z^n)w|}ds\\
&\leqslant\frac{r^n}{\pi(1+r)}\int_C\frac{|f(w)|}{|w|-r}ds\\
&\leqslant\frac{2r^n}{\pi(1-r^2)}\int_C|f(w)|ds
\end{aligned}\tag{99}$$

于是我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(z^n)\text{ 在}B(0,1)\text{ 内闭绝对且一致收敛}$$

Problem 208

设 D 是有界区域, $f(z) \in H(D)$, 证明存在一点 $z_0 \in \partial D$, 和 $z_n \in D$, 使得 :

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0,\ \lim_{n\to\infty} f(z_n) \text{存在}$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 反证, 如若不然, 则 $\forall z_0 \in \partial D$, 有 $\lim\limits_{z\to z_0, z\in D} f(z) = \infty$.

因此 $f(z)$ 在 D 中至多只有有限个零点 $z_1, z_2, \cdots, z_n$(可能一样), 于是

$$g(z) = \frac{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)}{f(z)} \in H\left(\overline{D}\right), g(z) = 0, \forall z \in \partial D$$

由最大模定理, 我们知道 $g(z) \equiv 0, \forall z \in D$, 矛盾!

我们完成了证明.

Problem 209

设

$$x_n = \ln\left(\frac{e^{x_{n+1}-x_n} - e^{-x_n}}{(2e^{x_n})^{-1} - \frac{1}{2}e^{-3x_n}}\right), x_0 = 1$$

证明：存在 $C \in \mathbb{R}$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln^2 n}[\ln n[\frac{n}{\ln n}[nx_n - 2] - 2] - C] = 2$$

Proof. *(By 清疏竞赛数学)* 注意到

$$x_{n+1} = x_n - \ln 2 + \ln\left(1 - e^{-2x_n} + 2e^{-x_n}\right)$$

显然 $x_n = o(1)$, 于是

$$\frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{x_n} + \frac{1}{2} + o(1) \Rightarrow \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} > \frac{1}{3} \Rightarrow x_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

因此

$$\frac{1}{x_n} = \frac{1}{2}n + o(n) \Rightarrow x_n = \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

因此

$$\frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{x_n} + \frac{1}{2} - \frac{x_n}{4} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \Rightarrow \frac{1}{x_{n+1}} = \frac{n - \ln n}{2} + o(\ln n) \Rightarrow x_n = \frac{2}{n} + \frac{2\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$$

再代回上式有

$$\frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{x_n} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} + \frac{\ln n}{2n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \Rightarrow \frac{1}{x_n} = C + \frac{n}{2} - \frac{\ln n}{2} + \frac{\ln n}{2n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right) \Rightarrow x_n = \frac{2}{n} + \frac{2\ln n}{n^2} + \frac{C}{n^2} + \frac{2\ln^2 n}{n^3} + O\left(\frac{\ln n}{n^3}\right)$$

Problem 210

设

$$a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+\frac{1}{x^n a_n},x>1$$

(1) : 证明存在无穷常数列 $\{C_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$, 使得对任意 $m\in\mathbb{N}$, 都有

$$\lim_{n\to\infty}\underbrace{x^n[\cdots[x^n[x^n[a_n-C_0(x)]-C_1(x)]-C_2(x)]\cdots]}_{m\text{个}x^n}=C_{m+1}(x)$$

(2) : 证明存在 $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}_+$, 使得 $A_j=-\lim\limits_{x\to+\infty}C_0^{2j-1}(x)\,C_j(x)\,,\ \forall j\geqslant 1.$

(3) : 证明

$$\lim_{j\to\infty}j[j[j[\frac{j\sqrt{j}}{4^j}A_j-\frac{1}{4\sqrt{\pi}}]-\frac{3}{32\sqrt{\pi}}]-\frac{25}{512\sqrt{\pi}}]=\frac{105}{4096\sqrt{\pi}}$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 考虑 $a_n=c_0+c_1y+c_2y^2+\cdots+c_my^m+o(y^m)\,,y=\frac{1}{x^n},\ y=a_na_{n+1}-a_n^2$, 注意到

$$a_n=\sum_{k=0}^{\infty}c_ky^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{x^{kn}},a_{n+1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{x^k}y^k$$

因此

$$a_na_{n+1}-a_n^2=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k}\frac{c_{k-j}c_j}{x^j}-c_jc_{k-j}\right)y^k=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k}\left(\frac{1}{x^j}-1\right)c_jc_{k-j}\right)y^k=y$$

于是

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{x^j}-1\right)c_jc_{k-j}\right)y^k=y\Rightarrow c_1c_0=\frac{x}{1-x},\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{x^j}-1\right)c_jc_{k-j}=0,\forall k\geqslant 2$$

$$C_1(x)=\frac{x}{1-x}\frac{1}{C_0(x)},\quad C_k(x)=\sum_{j=1}^{k-1}\frac{x^k-x^{k-j}}{1-x^k}A_j(x)\,A_{k-j}(x)\cdot\frac{1}{C_0^{2k-1}(x)},\forall k\geqslant 2$$

则有

$$A_0=1,\ A_1=-1,\ A_k=-\sum_{j=1}^{k-1}A_jA_{k-j},\forall k\geqslant 2,\ \sum_{k=1}^{\infty}A_kx^k=\frac{\sqrt{1-4x}-1}{2}$$

这里 $A_j=\lim\limits_{x\to+\infty}A_j(x)\,,j=0,1,2,\cdots$, 注意到

$$A_k=C_{\frac{1}{2}}^{k}(-1)^k\,2^{2k-1}=\frac{-2^{k-1}(2k-1)!!}{k!\,(2k-1)},k\geqslant 1$$

显然

$$A_k \sim -\frac{4^{k-1}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{k\sqrt{k}}+\frac{3}{8k^2\sqrt{k}}+\frac{25}{128k^3\sqrt{k}}+\frac{105}{1024k^4\sqrt{k}}+O\left(\frac{1}{k^5\sqrt{k}}\right)\right), k\to\infty$$

注意答案里的 $A_j, j\geqslant 1$ 和题目中的 $A_j, j\geqslant 1$ 互为相反数.

我们完成了证明.

Problem 211

设 $f(x) \in C^1(\mathbb{R})$, 满足 $f'(x) = \frac{\sin f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}$, $f(0) = \frac{4\pi}{3}$. 求极限：

(1)：$\lim\limits_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} \frac{\sin^2 f(x)}{1+f^2(x)} dx$

(2)：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

Proof. (By 清疏竞赛数学) 设

$$x_0 = \sup\{y > 0 : \sin f(x) \neq 0, \forall x \in [0, y)\}$$

显然 $f(x_0) = 0$, 则存在

$$x_n \in \{y > 0 : \sin f(x) \neq 0, \forall x \in [0, y)\}, \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

于是

$$\int_{\frac{4\pi}{3}}^{f(x_n)} \frac{\sqrt{1+t^2}}{\sin t} dt = \int_0^{x_n} \frac{f'(x)\sqrt{1+f^2(x)}}{\sin f(x)} dx = x_n$$

因为被积函数不变号, 所以

$$\infty = \lim_{n\to\infty} \int_{\frac{4\pi}{3}}^{f(x_n)} \frac{\sqrt{1+t^2}}{\sin t} dt = \int_0^{x_n} \frac{f'(x)\sqrt{1+f^2(x)}}{\sin f(x)} dx = x_0$$

类似的可以考虑 $x < 0$, 因此 $\sin f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, 于是

$$f(x) \in (\pi, 2\pi), f'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

因此

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \text{ 存在}, \lim_{x\to\infty} f'(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \pi, \lim_{x\to-\infty} f(x) = 2\pi$$

以及

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} \frac{\sin^2 f(x)}{1+f^2(x)} dx = \lim_{n\to\infty} \int_{f(-n)}^{f(n)} \frac{\sin t}{\sqrt{1+t^2}} dt = \int_{2\pi}^{\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{1+t^2}} dt$$

Problem 212

给定不恒为零的 $g(x) \in C[a,b]$ 且不变号, 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有二阶导数, 证明 :

(1) : 若

$$\min\{f(a), f(b)\} \geqslant \frac{\int_a^b f(x) g(x) \, dx}{\int_a^b g(x) \, dx}$$

则必有某个点使得 $f''(\theta) > 0$.

(2) : 若

$$\max\{f(a), f(b)\} \leqslant \frac{\int_a^b f(x) g(x) \, dx}{\int_a^b g(x) \, dx}$$

则必有某个点使得 $f''(\theta) < 0$.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 设 $\int_a^b g(x)\,dx = p \neq 0, \int_a^b f(x)\,dx = r, f(a) = s, f(b) = t$, 则存在 $\theta \in (a,b)$, 使得

$$f''(\theta) = \frac{-2(apt - ar - pt\theta - pbs + ps\theta + rb)}{(\theta - a)(b - \theta)(b - a)p}$$

注意到 $\frac{-2(apt-ar-pt\theta-pbs+ps\theta+rb)}{p}$ 可以视为关于 θ 一次函数, 系数为 $t-s$, 代入 $\theta = a, b$ 分别得

$$\frac{2}{p}(b-a)(ps-r), \frac{2}{p}(b-a)(pt-r)$$

这显然导出了我们需要的结果.

Problem 213

设 ℓ^2 上的函数 $f(s)$ 在包含 $x+ty,t\in(0,1)$ 的开集上 $frechet$ 可微, 且在 $x,x+y$ 处连续, 则存在 $\theta\in(0,1)$, 使得

$$f(x+y)-f(y)=\sum_{i=1}^{\infty}y_i f_{x_i}(x+\theta y),\theta\in(0,1)$$

Proof. $(By$ 清疏竞赛数学$)$ 考虑

$$g(t)=f(x+ty)\in D^1(0,1)\bigcap C[0,1]$$

则

$$f(x+y)-f(y)=\sum_{i=1}^{\infty}y_i f_{x_i}(x+\theta y),\theta\in(0,1)$$

Problem 214

设 $f(x) \in C[0,1]$, $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = 0$, 证明：存在互不相同的 $\eta, \zeta \in (0,1)$, 使得 $2f(\eta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta^2}$.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 考虑函数 $g(x,y) = 2y^2 f(x) - f(y) \in C\left([0,1]^2\right)$, 如果要证的不成立, 那么在区域 $\left\{(x,y) \in (0,1)^2 : y > x\right\}$, 和区域 $\left\{(x,y) \in (0,1)^2 : y < x\right\}$ 都不变号, 注意到

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} g(x,y)\,dxdy = 0$$

这暗示在两个三角形区域函数值必然反号, 由连续性, 给出 $g(0,0) = 0, g\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0 \Longrightarrow f(0) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, 由于

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = 0$$

这给出了某个 $\eta \in (0, \frac{1}{2})$, 有 $f(\eta) = 0$, 我们取 $\zeta = \frac{1}{2}$ 即可, 证毕!

Problem 215

设 $f(x), g(x), h(x) \in C\left[0,1\right], \int_c^d f\left(x\right)dx = 0, 0 \leqslant c < d \leqslant 1.$

如果 $\exists x_0 \in \left[0,1\right] / \left(c,d\right)$, 使得 $g\left(x_0\right) \neq h\left(x_0\right)$, 证明 :

存在互不相同的 $\eta, \zeta \in (0,1)$, 使得 $g\left(\zeta\right)f\left(\eta\right) = h\left(\eta\right)f\left(\zeta\right)$.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 假设要证的不成立, 构造 $F\left(x,y\right) = g\left(x\right)f\left(y\right) - h\left(y\right)f\left(x\right) \in C\left(\left[0,1\right]^2\right)$, 于是有

$$\int_c^d \int_c^d F\left(x,y\right)dxdy = 0$$

于是 $F(x,y)$ 在区域 $\left\{(x,y) \in (0,1)^2 : y > x\right\}$, 和区域 $\left\{(x,y) \in (0,1)^2 : y < x\right\}$ 都不变号, 这暗示 $F\left(x,x\right) = 0, \forall x \in \left[0,1\right]$, 因此 $\left[g\left(x\right) - h\left(x\right)\right]f\left(x\right) = 0, \forall x \in \left[0,1\right]$.

因此 $f\left(x_0\right) = 0$, 结合积分中值定理,$f(x)$ 在 (c,d) 还有零点, 我们完成了证明.

Problem 216

设 $0 \leqslant x_{n+1} \leqslant x_n + y_n, \forall n \in \mathbb{N}_+$, 满足 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ 收敛, 证明

$$\lim_{n\to\infty} x_n \text{收敛}$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ 收敛, 故存在 $c \in \mathbb{R}$, 使得 $\sum\limits_{k=1}^{n} y_k \leqslant c, \forall n \geqslant 1$.
注意到

$$-c \leqslant x_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} y_k \leqslant x_n - \sum_{k=1}^{n-1} y_k, \forall n \geqslant 2$$

因此由单调收敛准则, 我们有

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} (x_n - \sum_{k=1}^{n-1} y_k) + \sum_{k=1}^{\infty} y_k \text{存在}$$

Problem 217

设非负实数 $\sigma_{n,k}^2, n=1,2,\cdots,k=1,2\cdots,n$ 满足

$$\sum_{k=1}^{n}\sigma_{n,k}^2=1, n=1,2,\cdots,\ \lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant k\leqslant n}\sigma_{n,k}^2=0$$

证明

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{t^2\sigma_{n,k}^2}{2}\right)=e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 只需证明

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{t^2\sigma_{n,k}^2}{2}\right)=-\frac{t^2}{2}$$

注意到

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{t^2\sigma_{n,k}^2}{2}\right)=\sum_{k=1}^{n}(-\frac{t^2\sigma_{n,k}^2}{2}+O\left(\sigma_{n,k}^4\right))=-\frac{t^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}O\left(\sigma_{n,k}^4\right)$$

以及

$$0\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sigma_{n,k}^4\leqslant\lim_{n\to\infty}\sup_{1\leqslant k\leqslant n}\sigma_{n,k}^2\cdot\sum_{k=1}^{n}\sigma_{n,k}^2=0$$

我们完成了证明.

Problem 218

对 $x\in\mathbb{R},n\in\mathbb{N}$, 有如下估计

$$\left|e^{ix}-\sum_{j=0}^{n}\frac{(ix)^j}{j!}\right|\leqslant\min\left\{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!},\frac{2|x|^n}{n!}\right\}$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 事实上我们如果证明了

$$\left|e^{ix}-\sum_{j=0}^{n}\frac{(ix)^j}{j!}\right|\leqslant\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

那么就有

$$\left|e^{ix}-\sum_{j=0}^{n}\frac{(ix)^j}{j!}\right|\leqslant\left|e^{ix}-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(ix)^j}{j!}\right|+\frac{|x|^n}{n!}\leqslant\frac{2|x|^n}{n!}$$

这样就完成了证明.

注意到积分等式

$$f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k=\int_a^x dt_n\int_a^{t_n}dt_{n-1}\cdots\int_a^{t_2}f^{(n+1)}(t)\,dt_1$$

那么有

$$\left|e^{ix}-\sum_{j=0}^{n}\frac{(ix)^j}{j!}\right|=\left|i^{n+1}\int_0^x dt_n\int_0^{t_n}dt_{n-1}\cdots\int_0^{t_2}e^{it_1}dt_1\right|\leqslant\int_0^x dt_n\int_0^{t_n}dt_{n-1}\cdots\int_0^{t_2}1dt_1=\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

我们完成了证明.

Problem 219

设非退化独立随机变量 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足

$$\forall\varepsilon>0,\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\int_{|X_j-EX_j|\geqslant\varepsilon\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}DX_k}}|X_j-EX_j|^2\,dP}{\sum\limits_{k=1}^{n}DX_k}=0$$

且均值和方差都存在, 证明

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}(X_j-EX_j)}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}DX_k}}\xrightarrow{d}N(0,1)$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 对 $n\in\mathbb{N}_+$, 考虑独立随机变量

$$g_{n,j}=\frac{X_j-EX_j}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}DX_k}},j=1,2,\cdots,n$$

满足

$$Eg_{n,j}=0,\sum_{j=1}^{n}Dg_{n,j}^2=1$$

断言

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{j=1}^{n}\int e^{itg_{n,j}}dP=e^{-\frac{t^2}{2}},\forall t\in\mathbb{R}$$

形式的注意到

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{j=1}^{n}\int 1+itg_{n,j}+\frac{(it)^2g_{n,j}^2}{2}dP=\lim_{n\to\infty}\prod_{j=1}^{n}(1-\int\frac{g_{n,j}^2}{2}t^2dP)=\lim_{n\to\infty}e^{\sum\limits_{j=1}^{n}\ln(1-\int\frac{g_{n,j}^2}{2}t^2dP)}=\lim_{n\to\infty}e^{\sum\limits_{j=1}^{n}-\frac{t^2}{2}\int g_{n,j}^2dP}$$

对于最后一个等号, 我们期望

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant j\leqslant n}\int g_{n,j}^2dP=0$$

注意到

$$\left|\int e^{itg_{n,j}}dP\right|\leqslant 1,|\int 1+\frac{(it)^2g_{n,j}^2}{2}dP|\leqslant 1$$

运用结果：

设 $a_j, b_j \in \mathbb{C}, |a_j|, |b_j| \leqslant 1, j = 1, 2, \cdots, n$, 则有

$$\left|\prod_{j=1}^{n} a_j - \prod_{j=1}^{n} b_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_j - b_j|$$

我们可以知道第一个等成立需要

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\left|\int e^{itg_{n,j}} - 1 - itg_{n,j} - \frac{(it)^2 g_{n,j}^2}{2} dP\right| = 0$$

运用估计

$$|e^z - \sum_{j=0}^{n}\frac{z^j}{j!}| \leqslant \sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{|z|^j}{j!} = e^{|z|} - \sum_{j=0}^{n}\frac{|z|^j}{j!} = \frac{1}{n!}\int_0^{|z|} e^t (|z| - t)^n \, dt \leqslant \frac{e^{|z|}|z|^{n+1}}{(n+1)!}$$

特别的, 有估计

$$|e^{ix} - \sum_{j=0}^{n}\frac{(ix)^j}{j!}| \leqslant \frac{e^{|x|}|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

但他是不够好的, 我们可以运用估计

$$\left|e^{ix} - \sum_{j=0}^{n}\frac{(ix)^j}{j!}\right| \leqslant \min\left\{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \frac{2|x|^n}{n!}\right\}$$

运用估计

$$\begin{aligned}\int\left|e^{itg_{n,j}} - 1 - itg_{n,j} - \frac{(it)^2 g_{n,j}}{2}\right| dP &\leqslant \int \min\left\{\frac{t^3|g_{n,j}|^3}{3!}, t^2|g_{n,j}|^2\right\} dP \\ &\leqslant \int_{|g_{n,j}|<\varepsilon}\frac{t^3|g_{n,j}|^3}{6} dP + \int_{|g_{n,j}|\geqslant\varepsilon} t^2|g_{n,j}|^2 \, dP \\ &\leqslant \frac{t^3}{6}\varepsilon + t^2\int_{|g_{n,j}|\geqslant\varepsilon}|g_{n,j}|^2 \, dP\end{aligned} \tag{100}$$

可以看到

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\int_{|g_{n,j}|\geqslant\varepsilon}|g_{n,j}|^2 \, dP = 0, \forall\varepsilon > 0$$

是需要的, 并且由

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant j\leqslant n}\int|g_{n,j}|^2 \, dP \leqslant \varepsilon^2 + \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\int_{|g_{n,j}|\geqslant\varepsilon}|g_{n,j}|^2 \, dP = \varepsilon^2$$

最后一个不等号也成立.

Problem 220

设均值和方差都存在的非退化独立随机变量 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}(X_j-EX_j)}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}DX_k}}\xrightarrow{d}N(0,1)$$

以及

$$\forall\varepsilon>0,\lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant k\leqslant n}\int_{|g_{n,j}|\geqslant\varepsilon}1dP=0$$

证明

$$\forall\varepsilon>0,\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\int_{|X_j-EX_j|\geqslant\varepsilon\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}DX_k}}\left|X_j-EX_j\right|^2dP}{\sum\limits_{k=1}^{n}DX_k}=0$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 我们继续使用上一个命题中的 $g_{n,j}$, 事实上记 $\phi_{n,j}(t)$ 是 $g_{n,j}$ 的特征函数, 我们有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant j\leqslant n}\left|\phi_{n,j}(t)-1\right|&\leqslant\lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant j\leqslant n}\int\left|e^{itg_{n,j}}-1\right|dP\\&\leqslant\lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant j\leqslant n}\int\min\left\{\left|g_{n,j}t\right|,2\right\}dP\\&\leqslant\lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant j\leqslant n}\int_{|g_{n,j}|\leqslant\varepsilon}|t|\varepsilon dP+\lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant j\leqslant n}\int_{|g_{n,j}|\geqslant\varepsilon}2dP\\&\leqslant\varepsilon\left|t\right|\end{aligned}\tag{101}$$

因此我们有

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant j\leqslant n}\left|\phi_{n,j}(t)-1\right|=0$$

此外我们还有

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{j=1}^{n}\int e^{itg_{n,j}}dP=\lim_{n\to\infty}\prod_{j=1}^{n}\phi_{n,j}(t)=e^{-\frac{t^2}{2}},\forall t\in\mathbb{R}$$

如果还能证明

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{j=1}^{n}\left(e^{\phi_{n,j}-1}\right)=e^{-\frac{t^2}{2}},\forall t\in\mathbb{R}$$

那么就有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\int\cos\left(tg_{n,j}\right)-1+\frac{t^2g_{n,j}^2}{2}dP=0$$

注意到

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\int\cos\left(tg_{n,j}\right)-1+\frac{t^2g_{n,j}^2}{2}dP\geqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\int_{|g_{n,j}|\geqslant\varepsilon}\frac{t^2g_{n,j}^2}{2}-2dP\geqslant\left(\frac{t^2}{2}-\frac{2}{\varepsilon^2}\right)\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\int_{|g_{n,j}|\geqslant\varepsilon}g_{n,j}^2dP$$

可让 $|t|$ 充分大即得我们需要的.

那么运用上一命题引出的初等不等式, 我们只需要证明

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\left|e^{\phi_{n,j}-1}-\phi_{n,j}\right|=0$$

又注意到

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\left|e^{\phi_{n,j}-1}-\phi_{n,j}\right|=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\left|O\left(\phi_{n,j}-1\right)\right|^2\leqslant C\lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant j\leqslant n}\left|\phi_{n,j}-1\right|\cdot\sum_{j=1}^{n}\left|\phi_{n,j}-1\right|$$

以及

$$\sum_{j=1}^{n}\left|\phi_{n,j}-1\right|=\sum_{j=1}^{n}\left|\int(e^{itg_{n,j}}-1)dP\right|\leqslant\sum_{j=1}^{n}\int\left|e^{itg_{n,j}}-1\right|^2dP\leqslant t^2\sum_{j=1}^{n}\int\left|g_{n,j}\right|^2dP=t^2$$

这样就完成了全部证明.

Problem 221

给定 $n \in \mathbb{N}_+$, 设 $f(x) \in C^n[0,1]$, 且 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有 $n+1$ 个互不相同的零点.

证明 : $\exists \zeta \in (0,1)$, 使得 $f^{(n)}(\zeta) = -f(\zeta)$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 对于 $c \in \mathbb{R}$, 若 $f(x)$ 在区间 I 上有 k 个根, 则

$$(e^{-cx}f(x))' = (f'(x) - cf(x))\, e^{-cx}]$$

在区间 I 上也有 k 个根.

对 $a, b \in \mathbb{R}, b > 0$, 注意到

$$((\frac{f(x)}{e^{ax}\cos(bx)})'\cos^2(bx))' = \frac{\cos(bx)\,(f''(x) - 2af'(x) + (a^2+b^2)\, f(x))}{e^{ax}}$$

于是在不包含 $\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b}, k \in \mathbb{Z}$ 的区间 I 内, 若 $f(x)$ 有 k 个根, 则 $f''(x) - 2af'(x) + (a^2+b^2)\, f(x)$ 在区间 I 内至少有 $k-2$ 个根.

因此对 $x^n + 1$, 其根都在单位圆上且总能因式分解为上述那样微分式的积, 所以这给出了根的虚部 $|b| \leqslant 1$, 因此 $[0,1]$ 内不包含 $\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{b}, k \in \mathbb{Z}$, 这样就说明 : $\exists \zeta \in (0,1)$, 使得 $f^{(n)}(\zeta) = -f(\zeta)$.

Problem 222

求全部四阶不可对角化实矩阵 A 满足 $A^T = A^2$.

Proof. (By 清疏竞赛数学) 注意到 $AA^T = A^TA = A^3$, 故 A 实正规, 若 A 不可对角化, 则 A 只可能有如下正交相似标准型

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & -d & 0 & 0 \\ d & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}, b>0, d>0, a, b, c, d, \delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$$

对于第一种, 我们有

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \delta_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-b^2 & -2ab \\ 0 & 0 & 2ab & a^2-b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -b & a \end{pmatrix}$$

因此

$$\delta_1^2 = \delta_1, \delta_2^2 = \delta_2, -2ab = b, a^2 - b^2 = a \Rightarrow \delta_1, \delta_2 = 0, 1, a = -\frac{1}{2}, b = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

对于第二种情况, 类似的有

$$a, c = -\frac{1}{2}, b, d = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

因此这样的 A 全体是

$$\left\{ T^{-1} \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} T, T^{-1} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} T : \delta_1, \delta_2 = 0\text{或}1, T\text{是四阶实正交矩阵} \right\}$$

Problem 223

证明

$$\lim_{n\to\infty}\ln n\cdot e^{\sqrt{\ln n}}\int_{\frac{1}{\sqrt{\ln n}}}^{\infty}\frac{dt}{(1+t)\cdots\left(1+\frac{t}{n}\right)}=1$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 注意到

$$\int_{n^{\frac{1}{3}}}^{\infty}\frac{dt}{(1+t)\cdots\left(1+\frac{t}{n}\right)}\leqslant\int_{n^{\frac{1}{3}}}^{\infty}\frac{dt}{\left(1+\frac{t}{n}\right)^{n}}=O(e^{-\sqrt[3]{n}})$$

$$\int_{1}^{n^{\frac{1}{3}}}\frac{n!dt}{(n+t)\,(n-1+t)\cdots(1+t)}\leqslant\frac{n^{\frac{1}{3}}}{n}=\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}=e^{-\frac{2}{3}\ln n}$$

注意到

$$n!\int_{\frac{1}{\sqrt{\ln n}}}^{1}\frac{\Gamma\left(1+t\right)dt}{\Gamma\left(n+1+t\right)}\sim\int_{\frac{1}{\sqrt{\ln n}}}^{1}\frac{\Gamma\left(1+t\right)dt}{n^{t}}=\int_{\frac{1}{\sqrt{\ln n}}}^{1}\Gamma\left(1+t\right)e^{-t\ln n}dt$$

以及

$$\lim_{n\to\infty}ne^{\sqrt{n}}\int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{1}e^{-tn}dt=\lim_{n\to\infty}1-e^{-n+\sqrt{n}}=1$$

因此局部化知

$$\lim_{n\to\infty}ne^{\sqrt{n}}\int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{1}\Gamma\left(1+t\right)e^{-tn}dt=1$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\ln n\cdot e^{\sqrt{\ln n}}\int_{\frac{1}{\sqrt{\ln n}}}^{\infty}\frac{dt}{(1+t)\cdots\left(1+\frac{t}{n}\right)}=1$$

Problem 224

设 $\lambda \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 估计

$$\sum_{k=1}^{n} C_n^k (-1)^k k^{-\lambda},\ n \to \infty$$

Proof. (By 清疏竞赛数学) 取 $n > 1 - \lambda, R > n$ 估计

$$\sum_{k=1}^{n} C_n^k (-1)^k k^{-\lambda} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{ds}{s^{\lambda+1} \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{s}{j}\right)}$$

这里 $C \triangleq C_1 \bigcup C_2 \bigcup C_3 \bigcup C_4$, 其中

$$\begin{aligned}
C_1 &= \left\{ s : |s| = R, |\Im(s)| \geqslant \frac{1}{\ln n} \text{或者} \Re(s) > 0 \right\} \\
C_2 &= \left\{ s : s = -\frac{t}{\ln n} + \frac{i}{\ln n}, t \geqslant 0, |s| \leqslant R \right\} \\
C_3 &= \left\{ s : s = \frac{e^{i\theta}}{\ln n}, \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \right\} \\
C_4 &= \left\{ s : s = \frac{-t}{\ln n} - \frac{i}{\ln n}, t \geqslant 0, |s| \leqslant R \right\}
\end{aligned}$$

首先有

$$\lim_{R \to +\infty} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{ds}{\prod_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{s}{j}\right)} \right| \leqslant \lim_{R \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{C_1} \frac{|ds|}{|s|^{\lambda+1} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{|s|}{j} - 1\right)} \leqslant \lim_{R \to +\infty} \frac{1}{R^{\lambda} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{R}{j} - 1\right)} = 0$$

因此

$$\sum_{k=1}^{n} C_n^k (-1)^k k^{-\lambda} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{ds}{s^{\lambda+1} \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{s}{j}\right)}$$

这里 $C \triangleq C_2 \bigcup C_3 \bigcup C_4$, 其中

$$\begin{aligned}
C_2 &= \left\{ s : s = -\frac{t}{\ln n} + \frac{i}{\ln n}, t \geqslant 0 \right\} \\
C_3 &= \left\{ s : s = \frac{e^{i\theta}}{\ln n}, \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \right\} \\
C_4 &= \left\{ s : s = \frac{-t}{\ln n} - \frac{i}{\ln n}, t \geqslant 0 \right\}
\end{aligned}$$

于是

Problem 225

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 二阶可导, 且满足

$$f\left(0\right)=2f'\left(0\right),f'\left(1\right)+f\left(1\right)=0,2f'\left(x\right)+xf\left(x\right)\neq 0,\forall x\in[0,1]$$

证明 : 存在一点 $\zeta\in(0,1)$, 使得

$$\left(\zeta^2+1\right)f\left(\zeta\right)+4\zeta f'\left(\zeta\right)+4f''\left(\zeta\right)=0$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 构造方法, 设微分方程有通解 $y=c_1w_1+c_2w_2$, 那么我们有

$$\left(\frac{y}{w_1}\right)'=c_2\left(\frac{w_2}{w_1}\right)' \text{或} \left(\frac{y}{w_2}\right)'=c_1\left(\frac{w_1}{w_2}\right)'$$

于是

$$\left(\frac{\left(\frac{y}{w_1}\right)'}{\left(\frac{w_2}{w_1}\right)'}\right)'=0\text{或}\left(\frac{\left(\frac{y}{w_2}\right)'}{\left(\frac{w_1}{w_2}\right)'}\right)'=0$$

注意到

$$\left(\frac{\frac{1}{2}e^{\frac{1}{4}x(x-2)}\left(2f'\left(x\right)+\left(x-1\right)f\left(x\right)\right)}{-e^{-x}}\right)'=-\frac{1}{4}e^{\frac{1}{4}x(x+2)}\left[\left(x^2+1\right)f\left(x\right)+4xf'\left(x\right)+4f''\left(x\right)\right]$$
$$\left(\frac{\frac{1}{2}e^{\frac{1}{4}x(x+2)}\left(2f'\left(x\right)+\left(x+1\right)f\left(x\right)\right)}{e^{x}}\right)'=\frac{1}{4}e^{\frac{1}{4}x(x-2)}\left[\left(x^2+1\right)f\left(x\right)+4xf'\left(x\right)+4f''\left(x\right)\right]$$

因为我们可以解一阶微分方程 $2f'\left(x\right)+xf\left(x\right)=0$, 所以令 $g\left(x\right)=f\left(x\right)e^{\frac{1}{4}x^2}$, 因为 $g'(x)\neq 0$, 所以代入题目给的初值条件, 就有

$$0<g'\left(1\right)g'\left(0\right)=-\frac{1}{4}g\left(0\right)g\left(1\right)$$

反证, 假设结果不成立, 不妨设

$$\left(x^2+1\right)f\left(x\right)+4xf'\left(x\right)+4f''\left(x\right)>0,\forall x\in\left(0,1\right)$$

因此

$$2f'\left(x\right)+\left(x-1\right)f\left(x\right)\geqslant 0,2f'\left(x\right)+\left(x+1\right)f\left(x\right)\leqslant 0,\forall x\in\left[0,1\right]$$

两式做差就有 $f\left(x\right)\leqslant 0,\forall x\in[0,1]$, 这导致了 $g\left(x\right)\leqslant 0,\forall x\in[0,1]$, 这和 $g\left(0\right)g\left(1\right)<0$ 矛盾, 我们完成

了证明.

Problem 226

设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶矩阵, A 可交换的矩阵空间是 $C(A)$,

证明 : 与全体 $C(A)$ 中矩阵可交换的矩阵一定是 A 的多项式.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 显然可以在 $\mathbb{C}$ 上考虑而不失一般性.

当 A 是幂零矩阵时, 不妨设 $A=\begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_s \end{pmatrix}$, 这里 $J_i, i=1,2,\cdots,s$ 是 $jordan$ 块.

则取 $\tilde{A}=\begin{pmatrix} J_1+E & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2+2E & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_s+sE \end{pmatrix} \in C(A)$. 设 $X\tilde{A}=\tilde{A}X, X=\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1s} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{s1} & X_{s2} & \cdots & X_{ss} \end{pmatrix}$,

这给出了

$$(J_i+iE)X_{ij}=X_{ij}(J_j+jE), \forall i,j=1,2,\cdots,s$$

因此存在多项式 $p_i(x)\in\mathbb{F}[x], i=1,2,\cdots,s$, 使得

$$X_{ij}=\begin{cases} 0, & i\neq j \\ p_i(J_i), & i=j \end{cases}$$

对任意 $J_1B_{12}=B_{12}J_2$, 使得 $A'=\begin{pmatrix} J_1 & B_{12} & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_s \end{pmatrix} \in C(A)$, 那么根据 $XA'=A'X$, 必有

$$p_1(J_1)B_{12}=B_{12}\,p_2(J_2)$$

我们断言 $p_1=p_2$, 设 p_1,p_2 的 $0,1,\cdots,s-1$ 次系数都相同, 考虑 s 次系数, 那么因为对任意 $p(x)\in\mathbb{F}[x]$, 都有 $p(J_1)B_{12}=B_{12}\,p(J_2)$ 知, 可设 p_1,p_2 的 $0,1,\cdots,s-1$ 次系数都为 0, 设

$$p_1=q_1\cdot x^s, p_2=q_2\cdot x^s, q_1,q_2\in\mathbb{F}[x]$$

可让 $s \leqslant \min\{J_1\text{阶数}, J_2\text{阶数}\} - 1$(注意矩阵多项式空间的维数), 以及 $J_1^s B_{12} = B_{12} J_2^s$.

直接计算知, 存在满足 $J_1 B_{12} = B_{12} J_2$ 的 B_{12}, 使得 $J_1^s B_{12} = B_{12} J_2^s \neq 0$.

因此 q_1, q_2 常数项一致 (经典矩阵方程有解的条件), 因此我们有 $p_1 = p_2$, 类似的所有 $p_i, i = 1, 2, \cdots s$ 都相同.

于是 $X = p_1(A)$, 我们完成了最麻烦的一部分的证明.

对于一般情况, 不妨设 $A = \begin{pmatrix} T_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & T_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & T_s \end{pmatrix}$, 这里 $T_i, i = 1, 2, \cdots, s$ 特征值互不相同 (从而每个块的极小多项式互素).

设 $X\tilde{A} = \tilde{A}X, X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1s} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{s1} & X_{s2} & \cdots & X_{ss} \end{pmatrix}$, 类似上面可知 $X_{ij} = 0, \forall i \neq j$, 因此由单特征值时 (和幂零情况一致) 的结论, 我们知道, 存在多项式 $p_i(x) \in \mathbb{F}[x], i = 1, 2, \cdots, s$, 使得

$$X_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ p_i(T_i), & i = j \end{cases}$$

设 T_i 的极小多项式为 $m_i \in \mathbb{F}[x], i = 1, 2, \cdots, s$, 则由中国剩余定理, 存在多项式 $p(x) \in \mathbb{F}[x]$, 使得

$$p \equiv p_i\,(mod\ m_i)\,, i = 1, 2, \cdots, s$$

直接验证就有 $X = p(A)$, 我们完成了证明.

Problem 227

设 $a \in \mathbb{R}$, 证明

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-t}t^{\frac{1}{2}-a}\int_1^{\infty} x^a\left(\frac{te}{x}\right)^x\frac{dx}{x}=\sqrt{2\pi}$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 首先注意到

$$e^{-t}t^{\frac{1}{2}-a}\int_1^{\infty} x^a\left(\frac{te}{x}\right)^x\frac{dx}{x}=\sqrt{t}e^{-t}\int_{\frac{1}{t}}^{\frac{1}{2}} x^{a-1}\left(\frac{e}{x}\right)^{tx}dx+\sqrt{t}e^{-t}\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} x^{a-1}\left(\frac{e}{x}\right)^{tx}dx$$

又

$$\sqrt{t}e^{-t}\int_{\frac{1}{t}}^{\frac{1}{2}} x^{a-1}\left(\frac{e}{x}\right)^{tx}dx\leqslant\sqrt{t}e^{-t}\left(\sqrt{2e}\right)^t\int_{\frac{1}{t}}^{\frac{1}{2}} x^{a-1}dx\to 0$$

因此

$$\lim_{t\to\infty} e^{-t}t^{\frac{1}{2}-a}\int_1^{\infty} x^a\left(\frac{te}{x}\right)^x\frac{dx}{x}=\lim_{t\to\infty}\sqrt{t}\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} x^{a-1}e^{-t(1-x\ln\frac{e}{x})}dx=2\lim_{t\to\infty}\sqrt{t}\int_0^{\infty} e^{-t\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{2\pi}$$

Problem 228

设 $a>0$, 证明

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-\frac{a}{e}t^{\frac{1}{a}}}t^{-\frac{1}{2a}}\int_0^{\infty} x^{-ax}t^x dx=\sqrt{\frac{2\pi}{ae}}$$

Proof. *(By 清疏竞赛数学)* 首先期望 $c\ln t-ac\ln c=ac, c>0$, 即 $c=e^{-1}t^{\frac{1}{a}}$, 换元 $x=c(x+1)$, 就有

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} x^{-ax}t^x dx &= \int_0^{\infty} e^{-ax\ln x+x\ln t}dx\\ &= c\int_{-1}^{\infty} e^{-ac(x+1)\ln[c(x+1)]+c(x+1)\ln t}dx\\ &= c\int_{-1}^{\infty} e^{[c\ln t-ac\ln c]\cdot(x+1)-ac(x+1)\ln(x+1)}dx\\ &= ce^{ac}\int_{-1}^{\infty} e^{-ac[(x+1)\ln(x+1)-x]}dx\end{aligned}\tag{102}$$

因此

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-ac}\sqrt{\frac{a}{c}}\int_0^{\infty} x^{-ax}t^x dt=\lim_{t\to\infty}\sqrt{ac}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ac}{2}x^2}dx=\sqrt{2\pi}$$

故

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-\frac{a}{e}t^{\frac{1}{a}}}t^{-\frac{1}{2a}}\int_0^{\infty} x^{-ax}t^x dx=\sqrt{\frac{2\pi}{ae}}$$

Problem 229

设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 二阶可导, 并且满足

$$\lim_{x\to0^+}f'(x)=-\infty,\ \lim_{x\to0^+}f''(x)=+\infty$$

证明

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{f'(x)}=0$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 若 $f(x)$ 连续到原点, 则命题是显然的, 只需考虑存在 $\delta>0$, 使得 $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 是正的严格递减下凸函数且 $f'(x)\neq0$.

令 $g(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}$, 则

$$f(x)=f\left(\frac{\delta}{2}\right)e^{-\int_x^{\frac{\delta}{2}}\frac{1}{g(y)}dy},\forall0<x<\frac{\delta}{2}$$

显然有 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$, 因此

$$\lim_{x\to0^+}\int_x^{\frac{\delta}{2}}\frac{1}{g(y)}dy=-\infty$$

因此, 存在子列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}^+$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}x_n=0,\ \lim_{n\to\infty}g(x_n)=0$$

$$f'(x)=\frac{f\left(\frac{\delta}{2}\right)}{g(x)}e^{-\int_x^{\frac{\delta}{2}}\frac{1}{g(y)}dy},f''(x)=\frac{1-g'(x)}{g^2(x)}f\left(\frac{\delta}{2}\right)e^{-\int_x^{\frac{\delta}{2}}\frac{1}{g(y)}dy}$$

由 $\lim\limits_{x\to0^+}f''(x)=+\infty$ 知, 存在 $\eta>0$, 使得 $g'(x)\leqslant1,\forall x\in(0,\eta)$, 所以 $g(x)-x$ 在 $(0,\eta)$ 单调, 这就有 $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)-x$ 存在或为 ∞, 这导致

$$\lim_{x\to0^+}g(x)=0$$

我们完成了证明.

Problem 230

若存在 $a>0$, 使得 w 是 $(0,a)$ 上的正值单调增加的连续函数且 $\lim\limits_{x\to0^+} w(x)=0$, 则如下命题是等价的：

(1) : $\int_0^\delta \frac{w(t)}{t}dt = O(w(\delta)), \delta\to0^+$,

(2) : $\sum\limits_{k=n}^{\infty} \frac{w\left(\frac{1}{k}\right)}{k} = O\left(w\left(\frac{1}{n}\right)\right)$,

(3) : 存在 $\eta>1$, 使得 $\varliminf\limits_{\delta\to0^+} \frac{w(\eta\delta)}{w(\delta)}>1$.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) (1) $\Rightarrow$ (3) :

设 $A,\delta_0>0$, 使得

$$\int_0^\delta \frac{w(t)}{t}dt \leqslant Aw(\delta), \forall 0<\delta\leqslant\delta_0$$

因此设 $\eta>1$, 我们有

$$w(\delta)\ln\eta \leqslant \int_\delta^{\eta\delta} \frac{w(t)}{t}dt \leqslant Aw(\eta\delta), \forall 0<\delta\leqslant\frac{\delta_0}{\eta}$$

取 $\eta=e^A+1$ 即可.

(3) $\Rightarrow$ (1) :

设在 $\eta>1$, 使得 $\varliminf\limits_{\delta\to0^+} \frac{w(\eta\delta)}{w(\delta)}>1$, 因此可取 $t>1, 1>\delta_0>0$, 使得

$$w(\eta\delta)>tw(\delta), \forall 0<\delta<\delta_0$$

对 $x\in(0,\delta)$, 取 $n\in\mathbb{N}$, 使得 $\eta^n x\leqslant\delta, \eta^{n+1}x>\delta$, 那么有

$$w(x)<\frac{1}{t}w(\eta x)<\frac{1}{t^2}w\left(\eta^2 x\right)<\cdots<\frac{1}{t^n}w(\eta^n x)<\frac{1}{t^n}w(\delta)$$

因为

$$\eta^{n+1}x>\delta \Rightarrow n>\frac{\ln\frac{\delta}{x}}{\ln\eta}-1$$

于是

$$\int_0^\delta \frac{w(x)}{x}dx \leqslant \int_0^\delta \frac{w(\delta)}{x}\frac{1}{t^{\frac{\ln\frac{\delta}{x}}{\ln\eta}-1}}dx = t\delta^{-\frac{\ln t}{\ln\eta}}\int_0^1 \frac{1}{x^{1-\frac{\ln t}{\ln\eta}}}dx\cdot w(\delta)$$

就得到我们需要的结果.

(1) $\Leftrightarrow$ (2) :

设 $\frac{1}{n+1}<\delta\leqslant\frac{1}{n},n\in\mathbb{N}$, 于是有

$$\begin{aligned}\frac{1}{w\left(\delta\right)}\int_0^\delta\frac{w\left(t\right)}{t}dt&\leqslant\frac{1}{w\left(\frac{1}{n+1}\right)}\int_0^{\frac{1}{n+1}}\frac{w\left(t\right)}{t}dt+\frac{1}{w\left(\delta\right)}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\delta}\frac{w\left(t\right)}{t}dt\\&\leqslant\frac{1}{w\left(\frac{1}{n+1}\right)}\sum_{k=n+1}^{\infty}\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}}\frac{w\left(t\right)}{t}dt+\ln\left(\left(n+1\right)\delta\right)\\&\leqslant\frac{1}{w\left(\frac{1}{n+1}\right)}\sum_{k=n+1}^{\infty}w\left(\frac{1}{k}\right)\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\\&\leqslant\frac{1}{w\left(\frac{1}{n+1}\right)}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k}w\left(\frac{1}{k}\right)+1\end{aligned}\tag{103}$$

以及

$$\begin{aligned}\frac{1}{w\left(\frac{1}{n}\right)}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k}w\left(\frac{1}{k}\right)&\leqslant\frac{1}{w\left(\frac{1}{n}\right)}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k}w\left(\frac{1}{k}\right)+1\\&\leqslant\frac{1}{w\left(\frac{1}{n}\right)}\sum_{k=n+1}^{\infty}\int_{\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k-1}}\frac{w\left(x\right)}{x}dx+1\\&\leqslant\frac{1}{w\left(\frac{1}{n}\right)}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{w\left(x\right)}{x}dx+1\end{aligned}\tag{104}$$

因此我们完成了证明.

Problem 231

若存在 $a,p>0$, 使得 w 是 $(0,a]$ 上的正值单调增加的连续函数且 $\lim\limits_{x\to0^+} w(x)=0$, 则如下命题是等价的：

(1) : $\int_\delta^a \frac{w(t)}{t^{p+1}}dt = O\left(\frac{w(\delta)}{\delta^p}\right), \delta\to 0^+$,

(2) : $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{w\left(\frac{1}{k}\right)}{k^{1-p}} = O\left(n^p w\left(\frac{1}{n}\right)\right), n\to\infty$,

(3) : 存在 $\eta>1$, 使得 $\overline{\lim\limits_{\delta\to0^+}} \frac{w(\eta\delta)}{w(\delta)} < \eta^p$.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 与上一命题类似.

Problem 232

若存在 $a, p > 0$, 使得 w 是 $(0, a]$ 上的正值单调增加的连续函数且 $\lim\limits_{x\to0^+} w(x) = 0$, 则如下命题是等价的：

(1) : $\int_\delta^a \frac{w(t)}{t^{p+1}} dt = O\left(\frac{w(\delta)}{\delta^p}\right), \delta \to 0^+$,

(2) : $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{w\left(\frac{1}{k}\right)}{k^{1-p}} = O\left(n^p w\left(\frac{1}{n}\right)\right), n \to \infty$,

(3) : 存在 $\eta > 1$, 使得 $\varlimsup\limits_{\delta\to0^+} \frac{w(\eta\delta)}{w(\delta)} < \eta^p$.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 与上一命题类似.

Problem 233

设 $\mathbb{F}$ 是特征不为 2 的域, 设线性映射 $\delta : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ 满足

$$\delta(AB) = \delta(A)B + A\delta(B), \forall A, B \in M_n(\mathbb{F})$$

确定全部 δ.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 显然 $\forall A \in M_n(\mathbb{F})$, 有 $\delta_A(X) = AX - XA$ 满足题目条件的线性映射, 且 $A \to \delta_A$ 是嵌入, 因此这样的映射构成的线性空间维数至少是 n^2.

接下来我们说明这样线性映射的维数不超过 n^2, 事实上 δ 被其在基上取值完全确定, 因此满足且必须满足

$$\delta(E_{ij}E_{kl}) = \delta(E_{ij})E_{kl} + E_{ij}\delta(E_{kl}), k, l = 1, 2, \cdots, n$$

就能唯一确定 δ.

现对每个满足条件的 δ, 熟知 $E_{ij}E_{kl} = \delta_{kj}E_{il}$, 这意味着只有 i 行和 l 列,$\delta(E_{il})$ 才可能有非 0 元, 因此当 $k \neq j$ 时,

$$\delta(E_{ij})E_{kl} = (\delta(E_{ij}))_{ik}E_{il}, E_{ij}\delta(E_{kl}) = (\delta(E_{kl}))_{jl}E_{il}$$

即

$$(\delta(E_{ij}))_{ik} + (\delta(E_{kl}))_{jl} = 0, \forall j \neq k$$

当 $k = j$ 时,

$$\delta(E_{ij})E_{kl} = \sum_{s=1}^{n}(\delta(E_{ij}))_{sj}E_{sl}, E_{ij}\delta(E_{kl}) = \sum_{s=1}^{n}(\delta(E_{kl}))_{js}E_{is}$$

即

$$\delta(E_{il}) = \sum_{s=1}^{n}(\delta(E_{ij}))_{sj}E_{sl} + \sum_{s=1}^{n}(\delta(E_{kl}))_{js}E_{is}, \forall j = k$$

因此只要 $\delta(E_{ij}), \delta(E_{jl})$ 确定了,$\delta(E_{il})$ 随之确定.

因此若 $\delta(E_{12}), \delta(E_{23}), \cdots, \delta(E_{n-1n}), \delta(E_{n1})$ 确定了, 则 δ 完全确定.

注意每个 $\delta(E_{ij})$ 至多提供 $2n-1$ 维取法, 因此上面 n 个至多提供 $2n^2-n$ 维取法, 但是条件

$$(\delta(E_{ij}))_{ik} + (\delta(E_{kl}))_{jl} = 0, \forall j \neq k$$

因此把 $\delta(E_{12})$ 和 $\delta(E_{12}), \delta(E_{23}), \cdots, \delta(E_{n-1n}), \delta(E_{n1})$ 依次比较, 可以增加 $n-1$ 个约束, 把 $\delta(E_{23})$

和 $\delta(E_{12}),\delta(E_{23}),\cdots,\delta(E_{n-1n}),\delta(E_{n1})$ 依次比较, 可以增加 $n-1$ 个约束, 这样依次下去这, 说明了有 n^2-n 个约束, 因此因此上面 n 个至多提供 $2n^2-n-n^2+n=n^2$ 维取法, 我们说明了全体的 δ 就是形如 $\delta_A(X)=AX-XA$ 的全体.

注：特征不为 2 的意义是保证相反数有意义.

Problem 234

计算

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x\frac{t}{1+t^2\sin^2 t}dt}{x}$$

Proof. (By 清疏竞赛数学) 注意本题不可洛必达, 我们顺便估计一下渐进, 首先对 $n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$, 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^x\frac{t}{1+t^2\sin^2 t}dt&=\int_0^{n\pi}\frac{t}{1+t^2\sin^2 t}dt+\int_{n\pi}^x\frac{t}{1+t^2\sin^2 t}dt\\&=\sum_{k=1}^n\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{t}{1+t^2\sin^2 t}dt+\int_{n\pi}^x\frac{t}{1+t^2\sin^2 t}dt\\&=\sum_{k=1}^n\int_0^{\pi}\frac{t+(k-1)\pi}{1+(t+(k-1)\pi)^2\sin^2 t}dt+\int_{n\pi}^x\frac{t}{1+t^2\sin^2 t}dt\\&\geqslant\sum_{k=1}^n\int_0^{\pi}\frac{(k-1)\pi}{1+k^2\pi^2\sin^2 t}dt=\sum_{k=1}^n\frac{(k-1)\pi^2}{\sqrt{1+k^2\pi^2}}\end{aligned}\tag{105}$$

$$\begin{aligned}\int_0^x\frac{t}{1+t^2\sin^2 t}dt&=\sum_{k=1}^n\int_0^{\pi}\frac{t+(k-1)\pi}{1+(t+(k-1)\pi)^2\sin^2 t}dt+\int_{n\pi}^x\frac{t}{1+t^2\sin^2 t}dt\\&\leqslant\sum_{k=1}^{n+1}\int_0^{\pi}\frac{k\pi}{1+((k-1)\pi)^2\sin^2 t}dt=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{k\pi^2}{\sqrt{1+((k-1)\pi)^2}}\end{aligned}\tag{106}$$

注意到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^n\frac{(k-1)\pi^2}{\sqrt{1+k^2\pi^2}}}{n\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\pi}{\sqrt{1+(n+1)^2\pi^2}}=1,\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1}\frac{k\pi^2}{\sqrt{1+((k-1)\pi)^2}}}{n\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)\pi}{\sqrt{1+((n+1)\pi)^2}}=1$$

因此我们说明了

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x\frac{t}{1+t^2\sin^2 t}dt}{x}=1$$

Problem 235

设 $x(t)$ 满足

$$x'(t) \leqslant -ax(t) + b(t), a > 0, t \geqslant 0$$

并且

$$\lim_{t\to+\infty} b(t) = 0$$

证明

$$\varlimsup_{t\to+\infty} x(t) \leqslant 0$$

Proof. (By 清疏竞赛数学) $\forall\varepsilon > 0$, 存在 $t_0 > 0$, 使得 $b(t) < \varepsilon, \forall t \geqslant t_0$, 因此

$$x'(t) \leqslant -ax(t) + \varepsilon, \forall t \geqslant t_0$$

令

$$c(t) = e^{at}x(t) - \varepsilon\int_{t_0}^{t} e^{as}ds$$

于是 $c'(t) \leqslant 0, \forall t \geqslant t_0$ 因此

$$x(t) \leqslant \varepsilon\int_{t_0}^{t} e^{-a(t-s)}ds + e^{at_0}x(t_0)e^{-at} \leqslant \varepsilon\int_{0}^{\infty} e^{-as}ds + e^{at_0}x(t_0)e^{-at}$$

令 $t\to+\infty, \varepsilon\to0^+$ 即得 $\varlimsup\limits_{t\to+\infty} x(t) \leqslant 0$.
我们不能证明 $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$, 因为取 $x(t) = \frac{\int_0^t e^{as}(-\arctan s)ds}{e^{at}}$, 则

$$x'(t) + ax(t) = -\arctan t \leqslant 0$$

此时

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = -\frac{\pi}{2}$$

Problem 236

$f(x) \in C^1[0,\pi]$, 满足

$$\int_0^\pi f(x)\cos x dx = \int_0^\pi f(x)\,dx = 0$$

证明

$$\int_0^\pi |f'(x)|^2\,dx \geqslant 4\int_0^\pi |f(x)|^2\,dx$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 注意 *fourier* 级数逐项微分的条件, 我们首先需要把 $f(x)$ 偶延拓到 $[-\pi,\pi]$, 因此有

$$\int_{-\pi}^\pi f(x)\cos x dx = \int_{-\pi}^\pi f(x)\,dx = 0$$

以及 $f(\pi) = f(-\pi), f(x) \in C[-\pi,\pi]$.

设

$$f(x) \sim \sum_{n=2}^\infty a_n \cos nx, f'(x) \sim \sum_{n=2}^\infty -na_n \sin nx$$

因此由帕塞瓦尔恒等式, 我们有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi |f'(x)|^2\,dx = \sum_{n=2}^\infty n^2 a_n^2 \geqslant 4\sum_{n=2}^\infty a_n^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi |f(x)|^2\,dx$$

因此, 我们完成了证明.

Problem 237

给定 n 阶实矩阵 A, 设 A^TA 的特征值是 $\lambda_1^2,\lambda_2^2,\cdots,\lambda_n^2$, 且

$$1\geqslant\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n\geqslant 0$$

证明

$$|E_n-A|\geqslant(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)\cdots(1-\lambda_n)$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 若有 $a\neq 0$, 使得 $Aa=\lambda a$, 则有

$$a^{\star}A^{\star}Aa=|\lambda|^2a^{\star}a\leqslant\lambda_1^2a^{\star}a\leqslant a^{\star}a$$

因此若 $\lambda_1=1$, A 的全体复特征值在单位闭圆内, 此时显然有 $|E_n-A|\geqslant 0$(分别考虑实复特征值, 复特征值必成对出现).

下设 $0\leqslant\lambda_1<1$, 考虑 A 的极分解 $A=OS$, O 是实正交矩阵,S 是实半正定矩阵.

对任意正交矩阵, 我们有

$$|E_n-A|=|E_n-OS|=\left|E_n-T^{-1}OTT^{-1}ST\right|$$

因此无妨设 $S=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$, 注意到

$$|E_n-OS|\geqslant|E_n-S|\Leftrightarrow\left|(E_n-OS)(E_n-S)^{-1}\right|\geqslant 1$$

若有 $a\neq 0$, 使得 $(E_n-OS)(E_n-S)^{-1}a=\lambda a$, 整理得 $\left((E_n-S)^{-1}-\lambda E_n\right)a=OS(E_n-S)^{-1}a$(想法：正交矩阵暴露出来方便抵消).

为了估计特征值 λ, 类似一开始的操作 (或者两边取模), 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n\left|\frac{1}{1-\lambda_i}-\lambda\right|^2|a_i|^2&=|\left((E_n-S)^{-1}-\lambda E_n\right)a|^2\\&=|OS(E_n-S)^{-1}a|^2=\left|S(E_n-S)^{-1}a\right|^2\\&=\sum_{i=1}^n\left|\frac{\lambda_i}{1-\lambda_i}\right|^2|a_i|^2=\sum_{i=1}^n\left|\frac{1}{1-\lambda_i}-1\right|^2|a_i|^2\end{aligned}\tag{107}$$

这意味着必有某个 i, 使得 $\left|\lambda-\frac{1}{1-\lambda_i}\right| \leqslant \left|1-\frac{1}{1-\lambda_i}\right|$, 因此, 作图或者直接验证就有不等式

$$\Re\left(\lambda\right) \geqslant \frac{1}{1-\lambda_i} \geqslant 1$$

此时显然有

$$\left|\left(E_n-OS\right)\left(E_n-S\right)^{-1}\right| \geqslant 1$$

我们完成了证明.

Problem 238

探索

$$\int_0^{\infty} e^{-xy} f_a\left(y\right) dy = \sum_{j=0}^{n} \frac{j! c_j\left(a\right)}{x^{j+1}} + O_a\left(\frac{1}{x^{n+2}}\right)$$

一致成立

PROOF. (*By* 清疏竞赛数学) 正常来说, 得到的是存在 $x(a) > 0$, 使得

$$|\int_0^{\infty} e^{-xy} f_a\left(y\right) dy - \sum_{j=0}^{n} \frac{j! c_j\left(a\right)}{x^{j+1}}| \leqslant \frac{c_{n+1}\left(a\right)}{x^{n+2}}, \forall x > x\left(a\right)$$

我们希望 $x(a)$ 不依赖于 a.

设

$$f_a\left(x\right) = \sum_{j=0}^{n} c_j\left(a\right) x^j + O_a\left(x^{n+1}\right), x \to 0$$

即存在 $\delta\left(a\right) > 0$, 使得

$$|f_a\left(x\right) - \sum_{j=0}^{n} c_j\left(a\right) x^j| \leqslant k\left(a\right) x^{n+1}, \forall x \in \left(0, \delta\left(a\right)\right)$$

当 $x>1$, 我们有

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} e^{-xy} f_a(y)\,dy &= \int_0^{\delta(a)} e^{-xy} f_a(y)\,dy + \int_{\delta(a)}^{\infty} e^{-xy} f_a(y)\,dy \\
&= \int_0^{\delta(a)} e^{-xy} f_a(y)\,dy + O(e^{-\frac{x\delta(a)}{2}} \int_{\delta(a)}^{\infty} e^{-\frac{xy}{2}} |f_a(y)|\,dy) \\
&= \int_0^{\delta(a)} e^{-xy} \left(\sum_{j=0}^{n} c_j(a)\, y^j + O_a\left(y^{n+1}\right)\right) dy + O(e^{-\frac{x\delta(a)}{2}} \int_{\delta(a)}^{\infty} e^{-\frac{xy}{2}} |f_a(y)|\,dy) \\
&= \sum_{j=0}^{n} c_j(a) \int_0^{\delta(a)} e^{-xy} y^j dy + O(k(a) \int_0^{\delta(a)} e^{-xy} y^{n+1} dy) + O(e^{-\frac{x\delta(a)}{2}} \int_{\delta(a)}^{\infty} e^{-\frac{xy}{2}} |f_a(y)|\,dy) \\
&= \sum_{j=0}^{n} c_j(a) \int_0^{\delta(a)} e^{-xy} y^j dy + O_a(\frac{1}{x^{n+2}}) + O(e^{-\frac{x\delta(a)}{2}} \int_{\delta(a)}^{\infty} e^{-\frac{xy}{2}} |f_a(y)|\,dy) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \frac{j! c_j(a)}{x^{j+1}} + \sum_{j=0}^{n} O_a(\frac{1}{e^{\frac{\delta(a)}{2}x} x^j}) + O_a(\frac{1}{x^{n+2}}) + O(e^{-\frac{x\delta(a)}{2}} \int_{\delta(a)}^{\infty} e^{-\frac{xy}{2}} |f_a(y)|\,dy) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \frac{j! c_j(a)}{x^{j+1}} + O_a(\frac{1}{x^{n+2}}) + O(e^{-\frac{x\delta(a)}{2}} \int_{\delta(a)}^{\infty} e^{-\frac{xy}{2}} |f_a(y)|\,dy) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \frac{j! c_j(a)}{x^{j+1}} + O_a(\frac{1}{x^{n+2}}) + O(e^{-\frac{x\delta(a)}{2}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{xy}{2}} |f_a(y)|\,dy)
\end{aligned} \tag{108}$$

上面用到了如下一致估计

$$\frac{1}{e^{\frac{\delta(a)}{2}x} x^j} \leqslant \frac{1}{(e^{\frac{\delta(a)}{2(n+2)}x})^{n+2}} \leqslant \frac{(\frac{2(n+2)}{\delta(a)})^{n+2}}{x^{n+2}}, \forall x>1$$

因此期望找到与 a 无关的 $x_0>0$, 使得

$$|x^{n+2} e^{-\frac{x\delta(a)}{2}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{xy}{2}} |f_a(y)|\,dy| \leqslant C(a), \forall x > x_0$$

因此

$$\frac{x^{n+2}}{e^{\frac{x\delta(a)}{2}}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{xy}{2}} |f_a(y)|\,dy \leqslant \left(\frac{2(n+2)}{\delta(a)}\right)^{n+2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x_0 y}{2}} |f_a(y)|\,dy, \forall x > x_0$$

而条件

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{x_0 y}{2}} |f_a(y)|\,dy < \infty$$

是有的. 因此一定有上述的一致估计.

Problem 239

2022 阿里巴巴第九大题解.

Proof. (By 清疏竞赛数学) (1) :

设 a_n 周期为 $p \in \mathbb{N}_+$, 满足题目条件, 那么考虑 $\theta = \frac{k}{p}, k \in \mathbb{Z}$, 于是我们有

$$\left|\sum_{n=1}^{mp} a_n e^{2\pi i n \frac{k}{p}}\right| = m \left|\sum_{n=1}^{p} a_n e^{2\pi i n \frac{k}{p}}\right|$$

因此必有

$$\sum_{n=1}^{p} a_n e^{2\pi i n \frac{k}{p}} = 0, \forall k \in \mathbb{Z}$$

考虑多项式 $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{p} a_n z^n$,$f(z)$ 是有所有 p 次单位根的 p 次多项式, 这告诉我们 $f(z) = z^p - 1$, 这显然是个矛盾!, 因此满足条件的 a_n 不存在!

(2) : 假若存在题意的数 a_n, 那么对任意 $N \in \mathbb{N}_+, \theta \in \mathbb{Q}$, 我们有

$$\left|\sum_{n=1}^{N} a_n e^{2\pi i n \theta}\right| \leqslant 2022$$

由连续性, 这个不等式对 $\theta \in \mathbb{R}$ 也成立.

注意到

$$\int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{N} a_n e^{2\pi i n \theta}\right|^2 d\theta = \int_0^1 \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} a_n a_m e^{2\pi i (n-m)\theta} d\theta = \sum_{n=1}^{N} a_n^2 = N \to \infty$$

这和

$$\int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{N} a_n e^{2\pi i n \theta}\right|^2 d\theta \leqslant 2022^2$$

矛盾!

(3) :

注意到 $\forall a, b \in \mathbb{N}, \theta \notin \mathbb{Z}$, 有

$$|\sum_{k=a}^{b} e^{2\pi i k \theta}| = \left|\frac{e^{2\pi i a \theta} - e^{2\pi i (b-a+2)\theta}}{1 - e^{2\pi i \theta}}\right| \leqslant \frac{2}{|1 - e^{2\pi i \theta}|}$$

取严格递增非负整数序列 $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ 满足 $b_0=0$，以及对任意 $\theta\in\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|\int_{\theta b_{2k}}^{\theta b_{2k+1}}e^{2\pi it}dt+\int_{\theta(b_{2k+2}-b_{2k+1})}^{\theta(b_{2k+1}-b_{2k})}e^{2\pi it}dt\right|<\infty$$

那么取

$$a_n=\begin{cases}1, & \exists k\in\mathbb{N}, b_{2k}+1\leqslant n\leqslant b_{2k+1}\\ -1, & \exists k\in\mathbb{N}, b_{2k+1}+1\leqslant n\leqslant b_{2k+2}\end{cases}$$

事实上对 $b_{2m}\leqslant N<b_{2m+2}-1,\theta\in\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, 我们有

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{k=1}^{N}a_ne^{2\pi in\theta}\right|\\
=&\left|\sum_{n=1}^{b_{2m}}a_ne^{2\pi in\theta}+\sum_{n=b_{2m}+1}^{N}a_ne^{2\pi in\theta}\right|\\
\leqslant&\left|\sum_{n=1}^{b_{2m}}a_ne^{2\pi in\theta}\right|+\frac{4}{|1-e^{2\pi i\theta}|}\\
\leqslant&\left|\sum_{k=0}^{m-1}\Big(\sum_{j=b_{2k}+1}^{b_{2k+1}}e^{2\pi ij\theta}-\sum_{j=b_{2k+1}+1}^{b_{2k+2}}e^{2\pi ij\theta}\Big)\right|+\frac{4}{|1-e^{2\pi i\theta}|}\\
\leqslant&\frac{\left|e^{2\pi i\theta}\right|}{|1-e^{2\pi i\theta}|}\left|\sum_{k=0}^{m-1}\Big(e^{2\pi ib_{2k}\theta}-e^{2\pi ib_{2k+1}\theta}-\left(e^{2\pi i\theta}\right)^{b_{2k+1}-b_{2k}}+\left(e^{2\pi i\theta}\right)^{b_{2k+2}-b_{2k+1}}\Big)\right|+\frac{4}{|1-e^{2\pi i\theta}|}\\
\leqslant&\frac{2\pi|\theta|}{|1-e^{2\pi i\theta}|}\sum_{k=0}^{m-1}\left|\int_{b_{2k}}^{b_{2k+1}}e^{2\pi i\theta t}dt+\int_{b_{2k+2}-b_{2k+1}}^{b_{2k+1}-b_{2k}}e^{2\pi i\theta t}dt\right|+\frac{4}{|1-e^{2\pi i\theta}|}\\
\leqslant&\frac{2\pi|\theta|}{|1-e^{2\pi i\theta}|}\sum_{k=0}^{m-1}\left|\int_{b_{2k}}^{b_{2k+1}}e^{2\pi i\theta t}dt+\int_{b_{2k+2}-b_{2k+1}}^{b_{2k+1}-b_{2k}}e^{2\pi i\theta t}dt\right|+\frac{4}{|1-e^{2\pi i\theta}|}\\
\leqslant&\frac{2\pi}{|1-e^{2\pi i\theta}|}\sum_{k=0}^{\infty}\left|\int_{\theta b_{2k}}^{\theta b_{2k+1}}e^{2\pi it}dt+\int_{\theta(b_{2k+2}-b_{2k+1})}^{\theta(b_{2k+1}-b_{2k})}e^{2\pi it}dt\right|+\frac{4}{|1-e^{2\pi i\theta}|}
\end{aligned}\tag{109}$$

我们可取 $b_k=\sum\limits_{j=1}^{k}j!,k=1,2,\cdots$ 即满足条件, 因此我们完成了证明.

Problem 240

设 $z_j = x_j + \sqrt{-1}y_j \in \mathbb{C},\ \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{N}, j = 1, 2, \cdots, n$, 计算

$$\int_{\sum\limits_{j=1}^{n}|z_j|^2 \leqslant 1} z_1^{\alpha_1}\overline{z_1}^{\beta_1} z_2^{\alpha_2}\overline{z_2}^{\beta_2} \cdots z_n^{\alpha_n}\overline{z_n}^{\beta_n} dx_1dy_1dx_2dy_2\cdots dx_ndy_n$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 若有某个 $j = 1, 2, \cdots, n$, 使得 $\alpha_j \neq \beta_j$, 做换元

$$z_j = w_j e^{\frac{\pi}{\alpha_j - \beta_j}\sqrt{-1}}, z_i = w_i, \forall i \neq j$$

为方便, 不妨仍然用 z 表示 w, 因此有重积分的正交变换不变性, 我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{\sum\limits_{j=1}^{n}|z_j|^2 \leqslant 1} z_1^{\alpha_1}\overline{z_1}^{\beta_1} z_2^{\alpha_2}\overline{z_2}^{\beta_2} \cdots z_n^{\alpha_n}\overline{z_n}^{\beta_n} dx_1dy_1dx_2dy_2\cdots dx_ndy_n \\
&= -\int_{\sum\limits_{j=1}^{n}|z_j|^2 \leqslant 1} z_1^{\alpha_1}\overline{z_1}^{\beta_1} z_2^{\alpha_2}\overline{z_2}^{\beta_2} \cdots z_n^{\alpha_n}\overline{z_n}^{\beta_n} dx_1dy_1dx_2dy_2\cdots dx_ndy_n
\end{aligned} \tag{110}$$

因此

$$\int_{\sum\limits_{j=1}^{n}|z_j|^2 \leqslant 1} z_1^{\alpha_1}\overline{z_1}^{\beta_1} z_2^{\alpha_2}\overline{z_2}^{\beta_2} \cdots z_n^{\alpha_n}\overline{z_n}^{\beta_n} dx_1dy_1dx_2dy_2\cdots dx_ndy_n = 0$$

设 $\alpha_j = \beta_j, j = 1, 2, \cdots, n$, 记 $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ 于是有

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{2n}} \prod_{j=1}^{n}\left(x_j^2 + y_j^2\right)^{\alpha_j} e^{-\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j^2+y_j^2)} dV &= \prod_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^2}\left(x_j^2 + y_j^2\right)^{\alpha_j} e^{-x_j^2-y_j^2}dx_jdy_j \\
&= (2\pi)^n \prod_{j=1}^{n}\int_0^{\infty} r^{2\alpha_j+1}e^{-r^2}dr \\
&= \pi^n \prod_{j=1}^{n}\Gamma\left(\alpha_j + 1\right) = \pi^n \prod_{j=1}^{n}\alpha_j! \\
&= \int_0^{\infty} e^{-r^2}dr \int_{\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j^2+y_j^2)=r^2} \prod_{j=1}^{n}\left(x_j^2 + y_j^2\right)^{\alpha_j} dS \\
&= \int_0^{\infty} r^{2n-1+2|\alpha|}e^{-r^2}dr \int_{\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j^2+y_j^2)=1} \prod_{j=1}^{n}\left(x_j^2 + y_j^2\right)^{\alpha_j} dS \\
&= \frac{\Gamma\left(n + |\alpha|\right)}{2} \int_{\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j^2+y_j^2)=1} \prod_{j=1}^{n}\left(x_j^2 + y_j^2\right)^{\alpha_j} dS
\end{aligned} \tag{111}$$

这样就得到

$$
\begin{aligned}
&\int_{\sum\limits_{j=1}^{n}|z_j|^2\leqslant 1} z_1^{\alpha_1}\overline{z_1}^{\beta_1}z_2^{\alpha_2}\overline{z_2}^{\beta_2}\cdots z_n^{\alpha_n}\overline{z_n}^{\beta_n}dx_1dy_1dx_2dy_2\cdots dx_ndy_n\\
&=\int_{\sum\limits_{j=1}^{n}|z_j|^2\leqslant 1}|z_1|^{2\alpha_1}|z_2|^{2\alpha_2}\cdots|z_n|^{2\alpha_n}dx_1dy_1dx_2dy_2\cdots dx_ndy_n\\
&=\int_{\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j^2+y_j^2)\leqslant 1}\left(x_1^2+y_1^2\right)^{\alpha_1}\left(x_2^2+y_2^2\right)^{\alpha_2}\cdots\left(x_n^2+y_n^2\right)^{\alpha_n}dV\\
&=\int_0^1 dr\int_{\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j^2+y_j^2)=r^2}\left(x_1^2+y_1^2\right)^{\alpha_1}\left(x_2^2+y_2^2\right)^{\alpha_2}\cdots\left(x_n^2+y_n^2\right)^{\alpha_n}dS\\
&=\int_0^1 r^{2|\alpha|+2n-1}dr\int_{\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j^2+y_j^2)=1}\left(x_1^2+y_1^2\right)^{\alpha_1}\left(x_2^2+y_2^2\right)^{\alpha_2}\cdots\left(x_n^2+y_n^2\right)^{\alpha_n}dS\\
&=\frac{2\pi^n\prod\limits_{j=1}^{n}\alpha_j!}{(n+|\alpha|-1)!}\int_0^1 r^{2|\alpha|+2n-1}dr=\frac{\pi^n\prod\limits_{j=1}^{n}\alpha_j!}{(n+|\alpha|)!}
\end{aligned}
\tag{112}
$$

Problem 241

设 $k \in \mathbb{N}_+$, 计算

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{[\sqrt[k]{n}]}$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{[\sqrt[k]{n}]} = 0$, 因此级数收敛, 注意到 $2 \nmid ((m+1)^k - m^k)$, 因此有

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{[\sqrt[k]{n}]} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m^k}^{(m+1)^k-1} \frac{(-1)^{n+1}}{m} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m^k+1}}{m} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m}\right) = \ln 2
\end{aligned} \tag{113}$$

Problem 242

设 $f(x)\in C^{(n)}(-1,1)$, $\sup\limits_{x\in(-1,1)}|f(x)|\leqslant 1$, 证明存在 $a_n>0$, 如果 $|f'(0)|\geqslant a_n$, 那么 $f^{(n)}(x)$ 在 $(-1,1)$ 至少有 $n-1$ 个不同的零点.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 对区间 $I\subset(-1,1)$, 记

$$m_j(I)=\inf_{x\in I}\left|f^{(j)}(x)\right|,\ j\geqslant 0$$

若按顺序分为 $I=I_1\bigcup I_2\bigcup I_3$.

对 $x\in I_1, y\in I_3$, 则 $|y-x|\geqslant|I_2|$, 对 $k\geqslant 1$, 我们有

$$\frac{\left|f^{(k-1)}(y)\right|+\left|f^{(k-1)}(x)\right|}{|I_2|}\geqslant\left|\frac{f^{(k-1)}(y)-f^{(k-1)}(x)}{y-x}\right|\geqslant m_k(I)$$

由 y,x 任意性, 我们有 $\frac{m_{k-1}(I_1)+m_{k-1}(I_3)}{|I_2|}\geqslant m_k(I)$.

我们归纳证明 $m_k(I)\leqslant\frac{2^{\frac{k(k+1)}{2}}k^k}{|I|^k}$, 取

$$|I_1|=|I_3|=\frac{k-1}{2k}|I|$$

如上把区间 I 分成 3 份之后运用归纳假设, 我们有

$$m_k(I)\leqslant\frac{m_{k-1}(I_1)+m_{k-1}(I_3)}{|I_2|}\leqslant\frac{\frac{2^{\frac{k(k-1)}{2}}(k-1)^{k-1}}{|I_1|^{k-1}}+\frac{2^{\frac{k(k-1)}{2}}(k-1)^{k-1}}{|I_3|^{k-1}}}{|I|-|I_1|-|I_3|}=\frac{2^{\frac{k(k+1)}{2}}k^k}{|I|^k}$$

因此完成了证明.

取 $a_0=0, a_1=1, a_2=3$, 若 $f''(x)\neq 0$, 不妨设 $f''(x)>0$, 则

$$2\geqslant f(1)-f(0)\geqslant f'(0)\geqslant f(0)-f(-1)\geqslant -2$$

这是一个矛盾.

因此存在 $-1<x_{2_1}<x_{2_2}<1$, 使得 $f''(x_{2_1})f''(x_{2_2})<0$, 可让

$$f'''(x_{3_1})=\frac{f''(x_{2_2})-f''(x_{2_1})}{x_{2_2}-x_{2_1}}, x_{2_1}<x_{3_1}<x_{2_2}$$

若还有 $x_{2_3}\in(x_{2_2},1)$ 还有 $f''(x_{2_3})f''(x_{2_2})<0$,

则类似的可在 (x_{2_2}, x_{2_3}) 插入点 x_{3_2}, 此时有 $f'''(x_{3_1}) f'''(x_{3_2}) < 0$.

若 $f''(x) f''(x_{2_2}) \geqslant 0, \forall x \in (x_{2_2}, 1)$, 不妨设 (其余情况是更为显然的)$f''(x), f'''(x) \geqslant 0, \forall x \in (x_{2_2}, 1)$, 则

对 $n \geqslant 1$, 取 a_n, 我们证明

$$\exists -1 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < 1$$

有 $f^{(n)}(x_k) f^{(n)}(x_{k+1}) < 0, k = 1, 2, \cdots, n-1$.

当 $n = 1$ 时命题显然成立, 假定 $m \leqslant n-1$ 时, 有

$$\exists -1 < x_{m_1} < x_{m_2} < \cdots < x_{m_m} < 1$$

使得 $f^{(m)}\left(x_{m_j}\right) f^{(m)}\left(x_{m_{j+1}}\right) < 0, j = 1, 2, \cdots, m-1$.

当 $m = n$ 时, 首先

$$f^{(n)}(y_j) = \frac{f^{(n-1)}\left(x_{(n-1)_{j+1}}\right) - f^{(n-1)}\left(x_{(n-1)_j}\right)}{x_{(n-1)_{j+1}} - x_{(n-1)_j}}, x_{(n-1)_j} < y_j < x_{(n-1)_{j+1}}, j = 1, 2, \cdots, n-2$$

注意 $f^{(n)}(y_j) f^{(n)}(y_{j+1}) < 0, j = 1, 2, \cdots, n-3$.

为了完成归纳假设, 注意到如果一旦某个 $1 \leqslant m \leqslant n-1$, 使得满足两两不同号的点如果超过归纳假设的个数, 那么总会导致下一阶导数如上操作得到的两两不同号的点会增加对应的个数, 因此无妨设在

Problem 243

设 $\alpha^2 - 4\beta > 0, f(x) \in C[a,b] \bigcap D^2(a,b)$ 满足

$$f''(x) + \alpha f'(x) + \beta f(x) \geqslant 0, \forall x \in (a,b), f(a) = f(b) = 0$$

证明 $f(x) \leqslant 0$

PROOF. (*By* 清疏竞赛数学) 为应用极值原理, 注意到需要 $b \leqslant 0$, 一般情况这是不成立的.

考虑 $g(x) = e^{\frac{\alpha x}{2}} f(x)$, 我们有

$$g''(x) = e^{\frac{\alpha}{2}x}\left(f''(x) + \alpha f'(x) + \frac{\alpha^2}{4} f(x)\right) \geqslant \left(\frac{\alpha^2}{4} - \beta\right) g(x)$$

注意到 $Lg = -g'' + \left(\frac{\alpha^2}{4} - \beta\right) g \leqslant 0$, 因此 g 的非负最大值必然在边界取到, 从而 $g \leqslant 0$, 这给出了 $f(x) \leqslant 0$.

Problem 244

设 $A \in M_n(\mathbb{C})$, 证明

$$W(A) \triangleq \{x^\star Ax : x \in \mathbb{C}^n, ||x||_{\mathbb{C}^n} = 1\}$$

是凸集.

Proof. (By 清疏竞赛数学) 我们先证明如下辅助结果, 若 A 是 $Hermite$ 矩阵, 则

$$E \triangleq \{x \in \mathbb{C}^n : x^\star Ax = 0, ||x||_{\mathbb{C}^n}\} = 1$$

道路连通.

事实上, 若 $x, y \in E$ 是线性相关的, 则存在 $\theta \in \mathbb{R}$, 使得 $x = e^{i\theta}y$, 则有路径 $e^{it\theta}y, 0 \leqslant t \leqslant 1$ 为所求.

若若 $x, y \in E$ 是线性无关的, 现在想寻找某个 β, 使得

$$\frac{(1-t)\,e^{i\beta}x + ty}{||(1-t)\,e^{i\beta}x + ty||_{\mathbb{C}^n}} \in E, \forall t \in [0,1]$$

线性无关性保证了分母不为 0.

注意到

$$\left((1-t)\,e^{i\beta}x + ty\right)^\star A\left((1-t)\,e^{i\beta}x + ty\right) = 2\,(1-t)\,t \cdot \Re\left(e^{i\beta}y^\star Ax\right)$$

选取 β, 使得 $e^{i\beta}y^\star Ax \in i\mathbb{R}$ 即可.

因此我们完成了辅助结果的证明.

回到原题, 对任意直线 $L \triangleq \{(x,y) : ax + by + c = 0\} \subset \mathbb{C},\ a, b, c \in \mathbb{R}$, 有

$$L \bigcap W(A) = \{x^\star (G + iH)\,x : x \in \mathbb{C}^n, ||x||_{\mathbb{C}^n} = 1, x^\star (aG + bH + cI)\,x = 0\}$$

其中

$$A = G + iH, G = \frac{A + A^\star}{2}, H = \frac{A - A^\star}{2i}\text{是}Hermite\text{矩阵}$$

运用辅助结果, 注意到 $L \bigcap W(A)$ 是连通集的连续像, 因此也连通, 我们证明了 $W(A)$ 是凸的.

Problem 245

设 $n \geqslant 2$ 阶矩阵 A 的所有元素 A_{ij} 非负, 证明：不存在置换矩阵 P, 使得

$$P^T AP = \begin{pmatrix} A_m & 0 \\ B & C \end{pmatrix}$$

的充分必要条件是对每个 $1 \leqslant i, j \leqslant n$, 都有 $k \in \mathbb{N}_+$, 使得 $\left(A^k\right)_{ij} > 0$.

这里 A_m 是 m 阶矩阵,$1 \leqslant m \leqslant n-1$.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 充分性：

若存在置换矩阵 P, 使得

$$P^T AP = \begin{pmatrix} A_m & 0 \\ B & C \end{pmatrix}$$

那么

$$P^T A^k P = \begin{pmatrix} A_m^k & 0 \\ \star & B_m^k \end{pmatrix}, \forall k \geqslant 1$$

因此 A 必有任意次方恒为 0 的元, 这和假设矛盾!.

必要性：

如果我们能证明 $(I+A)^{n-1}$ 的所有元素都为正, 那么注意到 $B = (I+A)^{n-1} A = A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \cdots + c_1 A$ 的所有元素都为正 (A 不可能有一列恒为 0, 否则交换到最后一列就和条件矛盾).

因为 $c_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n-1$, 所以对每个 $1 \leqslant i, j \leqslant n$, 必有一个 $k \in \mathbb{N}_+$, 使得 $\left(A^k\right)_{ij} > 0$.

注意到

$$(I+A)^{n-1}\text{所有元素都为正} \Leftrightarrow \forall\text{所有元素都非负的非0向量}y,\text{都有}\ (I+A)^{n-1}y\text{所有元素都为正}$$

我们只需说明若元素有 0 的非负向量 y, $(I+A)y$ 的 0 元分量会严格减少即可.

直接矩阵乘法计算, 可以发现 $(I+A)y$ 的 0 元分量会不变或者严格减少, 因此我们假定 0 元分量个数不变, 来导出矛盾!

取置换矩阵 P, 设 $x=Py=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_k\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$, 那么由

$$((I+A)\,y)_i=0\Leftrightarrow y_i=0\text{且}\,(Ay)_i=0\Leftrightarrow x_i=0\text{且}\,(PAy)_i=\left(PAP^Tx\right)_i=0$$

知

$$\left(PAP^Tx\right)_i=0, i=k+1,k+2,\cdots,n$$

因此

$$\sum_{j=1}^{k}\left(PAP^T\right)_{ij}x_j=0, i=k+1,k+2,\cdots,n$$

这暗示

$$\left(PAP^T\right)_{ij}=0, i=k+1,k+2,\cdots,n, j=1,2,\cdots,k$$

因此这是一个矛盾!

我们完成了证明.

我们把不存在如上置换矩阵的矩阵称为不可约的.

Problem 246

设 $n\geqslant 2$ 阶矩阵 A 是非负矩阵 (所有元素非负, 或记做 $A\geqslant 0$), 且是不可约的 (不存在置换矩阵 $\cdots$ 见上题).

则 :

(1) : $\rho\left(A\right)\triangleq\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{\left|\lambda_i\right|:\lambda_i\text{是}A\text{的特征值}, i=1,2,\cdots,n\right\}$ 是 A 的一个正的单特征值,

(2) : A 有一个对应于 $\rho(A)$ 的元素全为正的特征向量,

(3) : A 的每一个非负特征向量都对应于特征值 $\rho(A)$.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 考虑 $f_A\left(x\right)=\min\limits_{x_i\neq 0}\frac{(Ax)_i}{x_i},\forall x_j\geqslant 0,j=1,2,\cdots,n,x\neq 0.$

显然

$$f_A\left(tx\right)=f_A\left(x\right),\forall t>0, f_A\left(x\right)=\max_{\rho\in\mathbb{R}}\left\{x:Ax-\rho x\geqslant 0\right\}$$

对 $x_j\geqslant 0,j=1,2,\cdots,n,x\neq 0$, 那么由

$$A\left(1+A\right)^{n-1}x-f_A\left(x\right)\left(1+A\right)^{n-1}x=\left(1+A\right)^{n-1}\left(Ax-f_A\left(x\right)x\right)\geqslant 0$$

有

$$f_A\left(\left(I+A\right)^{n-1}x\right)\geqslant f_A\left(x\right)$$

此外, 显然有 f_A 非负且不超过 A 最大行和.

我们断言 f_A 可以达到最大值, 齐次性让我们知道可以在

$$\Omega_n\triangleq\left\{x\in\mathbb{R}^n:x_j\geqslant 0,j=1,2,\cdots,n,\sum_{j=1}^n x_j=1\right\}$$

考虑, 对于 $\Gamma=\left(I+A\right)^{n-1}\Omega_n$, 由上一习题我们知道,$\Gamma$ 中的向量都是正的, 且 Γ 是紧的, 考虑 $y^0\in\Gamma$, 使得 f_A 在 Γ 上达到最大值.

那么 $z^0=\frac{y^0}{\sum\limits_{i=1}^n y_i^0}\in\Omega_n$, 于是

$$f_A\left(x\right)\leqslant f_A\left(\left(I+A\right)^{n-1}x\right)\leqslant f_A\left(y^0\right)=f_A\left(z^0\right),\forall x\in\Omega_n$$

我们说明了 f_A 可达到最大值.

记 $r=f_A\left(x^0\right)\geqslant f_A\left(x\right),\forall x\in\Omega_n$, 取 $\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$, 可知 $r>0$, 如果 $\left(I+A\right)^{n-1}\left(Ax^0-rx^0\right)>0$(所有分量为正数), 因此 $f_A(\left(I+A\right)^{n-1})>r$ 是一个矛盾, 所以 $Ax^0=rx^0$, 因此 x^0 是属于 A 的特征值 r 的非负特征向量.

注意到

$$\left|\lambda\right|\leqslant r,Ax=\lambda x\Longrightarrow A\left|x\right|\geqslant\left|\lambda\right|\left|x\right|\Longrightarrow r\geqslant f_A\left(\left|x\right|\right)\geqslant\left|\lambda\right|$$

因此 $r=\rho(A)$, 我们证明了 (1),(2) 的绝大部分 (还差单特征值未说明).

设 $x\geqslant0,x\neq0$, 有 $Ax=\lambda x$, 则 $\left(I+A\right)x=\left(1+\lambda\right)x$ 正分量个数不变, 因此 $x>0$, 故 A 的所有非负特征向量都是正特征向量, 此外, 再设 $y>0$ 满足 $A^Ty=ry$, 于是

$$\lambda y^Tx=y^TAx=ry^Tx$$

注意到 $y^Tx\neq0$, 因此 $\lambda=r$, 所以我们证明了 (3).

我们先证明 r 的几何重数为 1, 设 $y\neq0$, 使得 $Ay=ry$, 必有 $A\left|y\right|=r\left|y\right|$, 因此 $\left|y\right|>0$, 故 A 的对应 r 的特征向量不含 0 分量, 设 y,z 都是对应 r 的特征向量, 那么 z_1y-y_1z 也是对应 r 的特征向量或者 0, 但是其第一个分量为 0, 于是 $z_1y-y_1z=0$, 这说明 y,z 线性相关, 所以我们证明了几何重数是 1.

运用结论 $\frac{d}{d\lambda}\left|\lambda I-A\right|=tr\left(\lambda I-A^\star\right)$, 我们说明 $tr((rI-A)^\star)\neq0$, 事实上

$$\left(rI-A\right)\left(rI-A\right)^\star=0,rank\left(rI-A\right)=n-1,\left(rI-A\right)^\star\neq0$$

因此 $\left(rI-A\right)^\star$ 的非 0 列向量 b 是 A 的属于 r 的特征向量, 他不能有 0 分量, 因为他总是 A 的正特征向量的倍数, 所以 $b<0,b>0$ 必居其一, 考虑 A^T, 那么对行也如此, 这告诉我们 $\left(rI-A\right)^\star>0,\left(rI-A\right)^\star<0$ 必居其一, 因此 $tr((rI-A)^\star)\neq0$.

故我们完成了证明.

Problem 247

设复系数多项式 $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kz^k$, 假定 $z_1,z_2,\cdots,z_t$ 分别是 $f(z)$ 的 $s_1,s_2,\cdots,s_t$ 重根.
那么对任意充分小的 $\varepsilon>0$, 存在 $\eta>0$, 只要 $|a_k-b_k|<\eta$, 那么多项式 $g(z)=\sum\limits_{k=0}^{n}b_kz^k$ 的根恰好分布在 $\bigcup\limits_{j=1}^{t}\{z:|z-z_j|<\varepsilon\}$ 内, 且对 $j=1,2,\cdots,t$, $g(z)$ 在 $\{z:|z-z_j|<\varepsilon\}$ 内恰有 s_j 个根.

Proof. *(By 清疏竞赛数学)* 给定多项式 $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kz^k$, 设全部根分布在 $|z|<r,\ r>0$.
$\forall\varepsilon>0$, 对 $j=1,2,\cdots,t$, 取 z_j 的充分小的且闭包含于 $|z|<r$ 的邻域 c_j 即

$$c_j=\{z:|z-z_j|<\varepsilon\}$$

再取

$$0<\delta<\inf_{\bigcup\limits_{j=1}^{t}\partial c_j\bigcup\{z:|z|=r\}}|f(z)|$$

那么对所有 $g(z)=\sum\limits_{k=0}^{n}b_kz^k$, 只要

$$\max_{0\leqslant k\leqslant n}|a_k-b_k|\leqslant\frac{\delta}{(n+1)\sum\limits_{j=0}^{n}r^j}$$

就有

$$|f(z)-g(z)|\leqslant\sum_{k=0}^{n}|a_k-b_k|r^k\leqslant\delta<|f(z)|,\forall|z|=r$$

因此由儒歇定理 $f(z),g(z)$ 在 $|z|<r$ 零点数完全相同, 并且由最大模定理, 有

$$|f(z)-g(z)|\leqslant\delta,\forall|z|\leqslant r$$

于是对 $j=1,2,\cdots,t$, $f(z),g(z)$ 在 c_j 内根完全相同.
因此我们完成了证明.

Problem 248

没有 n 阶实矩阵 A^2 的元素都为负数.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 若有某个 n 阶实矩阵 A^2 的元素都为负数, 那么 $-A^2$ 是元素都为正的矩阵, 由上一题, 我们知道 $-A^2$ 有单的正特征值 $a \in \mathbb{R}_+$, 因此 A 有特征值 $\lambda \in \mathbb{C}$, 使得 $-\lambda^2 = a$, 因此 $-\bar{\lambda}^2 = a$, 这和 a 是单特征值矛盾.

Problem 249

设 $n \geqslant 2$, 若 $|B| \leqslant A$ 都是 n 阶矩阵,A 不可约, 证明 $\rho(B) \leqslant \rho(A)$,
且等号成立条件是存在对角酉矩阵 D 和 $\theta \in \mathbb{R}$, 使得 $B = e^{i\theta}DAD^{-1}, \rho(A)\,e^{i\theta}$是$B$的特征值.

Proof. (By 清疏竞赛数学) 设 $Bx = \lambda x, x \neq 0, \lambda \in \mathbb{C}$, 则

$$A|x| \geqslant |B||x| \geqslant |\lambda||x|, \rho(A) \geqslant f_A(|x|) \geqslant |\lambda|$$

这就给出了 $\rho(B) \leqslant \rho(A)$.

若 $\rho(B) = \rho(A) > 0$, 存在 $\theta \in \mathbb{R}$, 使得 $\rho(A)\,e^{i\theta} = \lambda$是$B$的特征值.

那么

$$f_A(|x|) = \rho(A), x > 0, A|x| = \rho(A)|x|, A = |B|$$

于是

$$Bx = BD|x| = \lambda D|x|, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, D \triangleq \begin{pmatrix} \frac{x_1}{|x_1|} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{x_n}{|x_n|} \end{pmatrix}$$

结合上面等式就有

$$BD|x| = e^{i\theta}DA|x| \Longrightarrow e^{-i\theta}D^{-1}BD|x| = A|x| \Longrightarrow e^{-i\theta}D^{-1}BD|x| = |B||x|$$

因此

$$|e^{-i\theta}D^{-1}BD| = |B| \Longrightarrow (\left|e^{-i\theta}D^{-1}BD|x|\right| - e^{-i\theta}D^{-1}BD)|x| = 0 \Longrightarrow e^{-i\theta}D^{-1}BD = \left|e^{-i\theta}D^{-1}BD\right| = A$$

其中第二个推出可如此说明：设 $(e^{-i\theta}D^{-1}BD)_{i,j} = c_{ij}$, 那么

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j = \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}x_j| \Longrightarrow c_{ij}x_j \geqslant 0 \Longrightarrow c_{ij} \geqslant 0, \forall i, j = 1, 2, \cdots, n$$

我们完成了证明.

从证明中可以看到 λ 是 B 的特征值, 如果 $|\lambda| = \rho(A)$, 那么设 $\lambda = \rho(A)\,e^{i\theta}$, 取属于这个特征值的特征向量 x, 则取对应的 D, 就有 $B = e^{i\theta}DAD^{-1}$.

特别的对于非负不可约矩阵 A, 设 $\rho(A)\,e^{i\theta_j}, j = 1, 2, \cdots, t$ 是其全部模为 $\rho(A)$ 的特征值, 那么 $A =$

$e^{i\theta_j}D_jAD_j^{-1}, A\sim e^{i\theta_j}A$, 从而 A 的所有模长为 $\rho(A)$ 的特征值都是单特征值.
同时 $A=e^{i(\theta_j+\theta_k)}D_jD_kA\left(D_jD_k\right)^{-1}$, 于是

$$e^{i(\theta_j+\theta_k)}\in\left\{e^{i\theta_i}:1\leqslant i\leqslant t\right\}$$

因此 $\left\{e^{i\theta_i}:1\leqslant i\leqslant t\right\}$ 是全体 t 次单位根.
还可以看到 A 的全体特征值旋转 $\frac{2\pi}{t}$ 度不改变, 但是旋转少于 $\frac{2\pi}{t}$ 的度数, 模长为 $\rho(A)$ 的特征值会发生改变, 因此可把 t 叫做 A 的非本原指数,$t=1$ 时 A 叫做本原矩阵.
因此设 A 是不可约的非负矩阵, 非本原指数为 t, 设其特征多项式为

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n_1}+a_2\lambda^{n_2}+\cdots+a_k\lambda^{n_k}, n>n_1>n_2>\cdots>n_k, a_j\neq 0, j=1,2,\cdots,k$$

那么 zA 的特征多项式是

$$\lambda^n+a_1z^{n-n_1}\lambda^{n_1}+a_2z^{n-n_2}\lambda^{n_2}+\cdots+a_kz^{n-n_k}\lambda^{n_k}, z=e^{\frac{i2\pi}{m}}$$

现在若 zA 和 A 特征值完全一样, 那么这等价于 $m|\left(n-n_j\right), j=1,2,\cdots,k$, 而 t 是使得 zA 和 A 特征值完全相同的最大正整数, 因此 $t=\gcd\left(n-n_1,n-n_2,\cdots,n-n_k\right)$.

Problem 250

设连续函数 $f(x,y)$ 在原点可偏导, 且成立

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\int_0^1 f(tx,ty)\,dt}{\sqrt{x^2+y^2}}=A$$

求 $f(0,0)\,,f_x(0,0)\,,f_y(0,0)$.

Proof. (By 清疏竞赛数学) 取 $y=0$, 则

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^1 f(tx,0)\,dt}{|x|}=A$$

注意由偏导数和连续性定义, 我们有 $\forall\varepsilon>0$, 当 x 充分小和任意 $t\in[0,1]$, 有不等式

$$f(0,0)+f_x(0,0)\,tx-\varepsilon tx\leqslant f(tx,0)\leqslant f(0,0)+f_x(0,0)\,tx+\varepsilon tx$$

因此

$$\frac{f(0,0)}{|x|}+\frac{x}{2|x|}f_x(0,0)-\frac{\varepsilon}{2}\leqslant\frac{\int_0^1 f(tx,0)\,dt}{|x|}\leqslant\frac{f(0,0)}{|x|}+\frac{x}{2|x|}f_x(0,0)+\frac{\varepsilon}{2}$$

因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(0,0)}{|x|}+\frac{x}{2|x|}f_x(0,0)=A$$

这只能有

$$f(0,0)=f_x(0,0)=0$$

类似的 $f_y(0,0)=0$.

我们完成了证明

Problem 251

设 $r_j(x)=\operatorname{sgn}(\sin(2^j\pi x))$, 对任意定义在 $[0,1]$ 的函数 $f_j(x), j=0,1,2,\cdots,n$, 证明

$$\int_0^1\prod_{j=0}^n f_j(r_j(x))\,dx=\prod_{j=0}^n\int_0^1 f_j(r_j(x))\,dx$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 注意到

$$f_j(r_j(t))=\begin{cases} f_j(1), & \frac{2k-2}{2^j}<t<\frac{2k-1}{2^j} \\ f_j(0), & t=\frac{2k-2}{2^j},\frac{2k-1}{2^j},\frac{2k}{2^j}, k=1,2,\cdots,2^{j-1}, j\geqslant 1 \\ f_j(-1), & \frac{2k-1}{2^j}<t<\frac{2k}{2^j} \end{cases}$$

因此

$$\prod_{j=0}^n\int_0^1 f_j(r_j(x))\,dx=f_0(1)\prod_{j=1}^n\frac{f_j(1)+f_j(-1)}{2}=\frac{f_0(1)}{2^n}\sum_{S\subset\{1,2,\cdots n\}}\prod_{j\in S}f_j(1)\prod_{j\notin S}f_j(-1)$$

另外一方面

$$\int_0^1\prod_{j=0}^n f_j(r_j(x))\,dx=f_0(1)\sum_{k=0}^{2^n-1}\int_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{k+1}{2^n}}\prod_{j=1}^n f_j(r_j(x))\,dx$$

因为每个 $r_j, j=1,2,\cdots,n$ 的零点都是 r_n 的零点, 所以在区间 $\left(\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right)$ 内没有 r_j 的零点, 因此不变号, 所以 r_j 常值.

对不同的 k,

Problem 252

设 V 是拓扑向量空间,f 是 V 上非 0 线性函数, 证明 f 是开映射.

Proof. (By 清疏竞赛数学) 设 $U \subset V$ 是一开集, 对 $x \in U$, 若 $f(x) \neq 0$, 则

因为 $1 \cdot x \in U$, 由乘法连续性, 存在 $\delta > 0, \forall |c-1| < \delta$, 就有 $cx \in U$, 因此

$$\{y : |y - f(x)| < \delta |f(x)|\} \subset f(U)$$

这对 $f(x) \neq 0$ 的情况说明了 $f(x)$ 是 $f(U)$ 的内点

若 $f(x) = 0$, 取 $z \in V$, 使得 $f(z) \neq 0$, 那么 $f(U) = f(U+z) - f(z)$, 注意到 $f(x+z) = f(x) + f(z)$ 是 $f(U+z)$ 的内点, 这告诉我们 $f(x)$ 是 $f(U)$ 的内点. 因此我们证明了 f 是开映射.

Problem 253

设 $f \in R\left([-3,3]^2\right)$, 证明

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(\theta-a) f(2\cos a+\cos\theta, 2\sin a+\sin\theta)\, d\theta da = 0$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 由第一逼近定理, 不妨设 $f = x^m y^n, m, n \in \mathbb{N}$, 则

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(\theta-a)(2\cos a+\cos\theta)^m(2\sin a+\sin\theta)^n\, d\theta da \\
&= \sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} 2^{k+j} C_m^k C_n^j \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(\theta-a)\cos^k a \sin^j a \cos^{m-k}\theta \sin^{n-j}\theta d\theta da \\
&= \sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} 2^{k+j} C_m^k C_n^j \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^{k+1} a \sin^j a \cos^{m-k}\theta \sin^{n-j+1}\theta d\theta da \\
&- \sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} 2^{k+j} C_m^k C_n^j \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^{k} a \sin^{j+1} a \cos^{m-k+1}\theta \sin^{n-j}\theta d\theta da \\
&= 0
\end{aligned} \tag{114}$$

最后一个等号可以通过换元 $\theta = \frac{\pi}{2} - x, a = \frac{\pi}{2} - y$ 和周期性得到.

Problem 254

求 $y=4\left(x^2+y^2\right)^2+z^4$ 围成体积

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 球坐标有

$$4r^4\sin^4\varphi+r^4\cos^4\varphi=r\sin\varphi\cos\theta\Longrightarrow r=\sqrt[3]{\frac{\sin\varphi\cos\theta}{4\sin^4\varphi+\cos^4\varphi}}$$

因此

$$V=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^{\sqrt[3]{\frac{\sin\varphi\cos\theta}{4\sin^4\varphi+\cos^4\varphi}}}r^2dr$$

故

$$V=\frac{2}{3}\int_0^{\pi}\frac{\sin^2\varphi}{4\sin^4\varphi+\cos^4\varphi}d\varphi=\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}$$

Problem 255

设 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内连续, 若如下极限存在

$$\lim_{h\to 0,h\in\mathbb{Q}}\frac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)}{h}$$

证明 $f'(x_0)$ 存在.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 事实上, 不妨设 $x_0=0$,$f(x)$ 一致连续,$f(0)=0$, 对 $h\in\mathbb{R}/\mathbb{Q}$, $|h|\leqslant 1$ 充分小, 取 $h'\in\mathbb{Q}$, 使得并成立

$$|f\left(h\right)-f\left(h'\right)|\leqslant|h|^2,|h-h'|\leqslant|h|^2$$

因此

$$\left|\frac{f\left(h\right)}{h}-\frac{f\left(h'\right)}{h'}\right|\leqslant\frac{|f\left(h\right)-f\left(h'\right)|}{|h|}+\frac{|f\left(h'\right)|}{|h'|}\frac{|h-h'|}{|h|}\leqslant|h|\left[1+\frac{|f\left(h'\right)|}{|h'|}\right]$$

于是

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{f\left(h\right)}{h}-\frac{f\left(h'\right)}{h'}\right|=0\Rightarrow\lim_{h\to 0}\frac{f\left(h\right)}{h}=\lim_{h'\to 0}\frac{f\left(h'\right)}{h'}=f'\left(0\right)$$

我们完成了证明.

Problem 256

设 A 是 n 阶实矩阵, 其非对角元都非正, 证明如下条件等价 :

(1) : $A = cI - B$,B 的元素非负, 且 $c \geqslant \rho(B)$,

(2) : A 的每个特征值实部非负,

(3) : A 的所有实特征值非负,

(4) : A 的所有主子式非负.

这里 $\rho(B)$ 定义为 B 的特征值的最大模, 即谱半径.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) (1) 推 (2):

设 λ 是 A 的特征值, 则 $c-\lambda$ 是 B 的特征值, 故 $|c-\lambda| \leqslant \rho(B)$, 因此得到 (2).

(2) 推 (3):

显然.

(3) 推 (1):

取 c 为 A 对角元最大值, 考虑非负矩阵 $B = cI - A$, 故 B 的最大实特征值 $\rho(B)$ 满足 $c - \rho(B) \geqslant 0$, 这样就说明了 (1).

(1) 推 (4):

显然 A 的主子矩阵也满足 (1) 所叙述的性质, 所以 A 的主子矩阵所有特征值实部非负, 因此行列式非负.

(4) 推 (1) :

若 A 的所有主子式都为 0, 则特征多项式为 λ^n, 因此 A 满足 (3), 所以 A 满足 (1).

若 A 有一个主子式为正,A 的特征多项式的 λ^k 的系数是 $(-1)^{n-k}$ 乘以所有 k 阶主子式之和.

可取 c 为 A 对角元最大值, 考虑非负矩阵 $B = cI - A$, 要证明 $c \geqslant \rho(B)$, 我们证明对于任意正数 p,$p+c$ 都不是 B 特征值.

事实上

$$|(p+a)\,I - B| = |pI + A| = \prod_{i=1}^{n} (p + \lambda_i) > 0$$

最后一个不等式可展开为 A 特征值初等对称多项式的具有正系数的线性组合, 根据韦达定理, 必然是正的, 我们完成了证明.!

Problem 257

设线性映射 $\varphi:\mathbb{F}^{n\times n}\to\mathbb{F}^{n\times n}$ 满足 $\varphi(AB)=\varphi(A)\varphi(B),\forall A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$, 确定所有 φ.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 显然 $\phi=0$ 和 $\varphi_T(A)=T^{-1}AT,T\in\mathbb{F}^{n\times n},|T|\neq 0$ 为满足条件的 φ, 下面说明这就是全部的 φ.

设 $r(A)=r(B)$, 则 $A=PBQ,|P|,|Q|\neq 0$, 因此 $r[\varphi(A)]=r[\varphi(P)\varphi(B)\varphi(Q)]\leqslant r[\varphi(B)]$, 反之亦然, 因此 $r[\varphi(A)]=r[\varphi(B)]$.

若对某个 $1\leqslant i,j\leqslant n$, 有 $\varphi(E_{ij})=0$, 则 $\varphi=0$, 反之, 可设 $\varphi(E_{ij})\neq 0,i,j=1,2,\cdots,n$.

设

$$\phi(E_{ij})=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}c_{kl}^{ij}E_{kl}$$

则必须有

$$\delta_{j'i}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}c_{kl}^{i'j}E_{kl}=\delta_{j'i}\phi(E_{i'j})=\phi(E_{i'j'})\phi(E_{ij})=\sum_{k'=1}^{n}\sum_{l'=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\delta_{lk'}c_{k'l'}^{i'j'}c_{kl}^{ij}E_{kl'}$$

Problem 258

计算

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{\tan x\}\, dx$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学)

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{\tan x\}\, dx &= \int_0^{\infty} \frac{\{x\}}{1+x^2} dx \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \int_k^{k+1} \frac{x-k}{1+x^2} dx \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{x}{1+(x+k)^2} dx \\
&= \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x}{1+(x+k)^2} dx \\
&= \frac{i}{2} \int_0^1 x[\psi^{(0)}(x-i) - \psi^{(0)}(x+i)] dx \\
&= \left[\frac{i}{2}\left(x\ln\Gamma(x-i) - x\ln\Gamma(x+i) - \psi^{(-2)}(x-i) + \psi^{(-2)}(x+i)\right)\right]\Big|_0^1 \\
&= \frac{i}{2}\left(\ln\Gamma(1-i) - \ln\Gamma(1+i) - 2i\right) \approx 0.698359679
\end{aligned} \tag{115}$$

Problem 259

设 $B.D$ 是实反对称矩阵, 且阶数和为奇数, 计算

$$\begin{vmatrix} B & C \\ C^T & D \end{vmatrix}$$

Proof. (By 清疏竞赛数学) 注意到

$$\begin{vmatrix} B & C \\ C^T & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -B & C \\ C^T & -D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -E & 0 \\ 0 & E \end{vmatrix} \begin{vmatrix} B & C \\ C^T & D \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} B & C \\ C^T & D \end{vmatrix}$$

因此

$$\begin{vmatrix} B & C \\ C^T & D \end{vmatrix} = 0$$

Problem 260

设 B 实 n 阶矩阵, 令 $A=\left(B^T+qE\right)(B-qE)\,,|q|<1$, 对任意 $b\in\mathbb{R}^n$ 证明：

$$A^T\left(A^2+A\right)x=A^Tb\text{有解}$$

Proof. (By 清疏竞赛数学) 对任意 $y\in\mathbb{R}^n$, 直接计算有

$$y^T(A+E)y=(By)^T By+(1-q)\,y^Ty\geqslant 0$$

且等号成立当且仅当 $y=0$.

若 $A+E$ 有 0 特征值, 则必有实特征向量 $y_0\neq 0$, 且 $y_0^T(A+E)y_0=0$, 矛盾!

因此 $A+E$ 可逆, 注意到 $A^TAz=A^Tv$ 关于 z 必有解, 这是因为

$$r\,(A)=r\left(A^TA\right)\leqslant r\left(A^TA,A^Tb\right)=r\left(A^T\cdot(A,b)\right)\leqslant r\,(A)$$

再取 $v=b$,$x=(A+E)^{-1}\,z$ 即可得

$$A^T\left(A^2+A\right)x=A^Tb$$

Problem 261

设 $f(x)$ 是 $[0,1]\to[0,1]$ 的递增函数, 满足 $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{2}$, 证明

$$\int_0^1 |f(x)-x|\,dx \leqslant \frac{1}{4}$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 当 f 是阶梯函数, 考虑

$$I=\{x\in[0,1]: f(x)\geqslant x\},\ J=\{x\in[0,1]: f(x)<x\}$$

我们把 I,J 尽可能分解为若干区间之并, 使得每个区间如果相连, 则分别属于 I,J, 注意 $|I|+|J|=1$, 我们不妨设 $|I|\leqslant\frac{1}{2}$ 于是由条件

$$\begin{aligned}\int_0^1|f(x)-x|\,dx&=2\int_I(f(x)-x)\,dx\\&=2\sum_{k=1}^n\int_{x_{k-1}}^{x_k}(f(x)-x)\,dx\\&\leqslant 2\sum_{k=1}^n\int_{x_{k-1}}^{x_k}(f(x_k)-x)\,dx\\&=\sum_{k=1}^n\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x_k-x)\,dx\\&=2\sum_{k=1}^n\frac{(x_k-x_{k-1})^2}{2}\\&\leqslant|I|^2\leqslant\frac{1}{4}\end{aligned}\tag{116}$$

倒数第三个等号是因为若 $x_k\in(0,1)$, 则有

$$f\left(x_k^-\right)-x_k\geqslant 0, f\left(x_k^+\right)-x_k\leqslant 0$$

若 $x_k=0,1$, 由 $0\leqslant f(x)\leqslant 1$ 类似可得, 所以由递增性, 必有

$$f(x_k)=f\left(x_k^-\right)=f\left(x_k^+\right)=x_k$$

当 f 是一般的满足条件的函数, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在划分

$$0=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_m=1$$

使得 $\sum\limits_{i=1}^{n} w_i\left(y_i-y_{i-1}\right)<\varepsilon$, 这里

$$w_i=M_i-m_i, M_i=\sup_{x\in[y_{i-1},y_i]} f\left(x\right), m_i=\inf_{x\in[y_{i-1},y_i]} f\left(x\right), i=1,2,\cdots,m$$

取

$$g\left(x\right)=\frac{\int_{y_{i-1}}^{y_i} f\left(x\right)dx}{y_i-y_{i-1}}, x\in\left[y_{i-1},y_i\right]$$

因为端点是有限的, 虽然重复定义, 但不影响积分.

则

$$\int_0^1 g\left(x\right)dx=\sum_{i=1}^{m}\int_{y_{i-1}}^{y_i}\frac{\int_{y_{i-1}}^{y_i} f\left(t\right)dt}{y_i-y_{i-1}}dx=\int_0^1 f\left(x\right)dx=\frac{1}{2}$$

显然 $0\leqslant g\left(x\right)\leqslant 1$ 且递增, 又

$$\int_0^1\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|dx=\sum_{i=1}^{m}\int_{y_{i-1}}^{y_i}\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|dx\leqslant\sum_{i=1}^{m}w_i\left(y_i-y_{i-1}\right)\leqslant\varepsilon$$

因此

$$\int_0^1\left|f\left(x\right)-x\right|dx\leqslant\int_0^1\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|dx+\frac{1}{4}\leqslant\frac{1}{4}+\varepsilon$$

由 ε 任意性, 我们完成了证明.

Problem 262

证明

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2x+n}-\gamma+\ln x-\frac{1}{2}x+12x^2}{x^4}=\frac{1}{120}$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2x+n}=\gamma+\psi^{(0)}\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

所以这是显然的.

Problem 263

证明

$$\lim_{x\to 1}\frac{\int_1^x \frac{1}{\ln\frac{x+t}{1+t}}dt-2-(x-1)+\frac{(x-1)^2}{24}-\frac{(x-1)^3}{48}+\frac{23}{1920}(x-1)^4}{(x-1)^5}=\frac{29}{3840}$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 无妨考虑 $x>1$, 事实上对 $t\in[1,x]$, 我们有 $\frac{x+t}{1+t}\in\left[\frac{2x}{1+x},\frac{x+1}{2}\right]$, 这暗示我们当 $x\to 1$, 有 $\frac{x+t}{1+x}\rightrightarrows 1$, 因此可以在 $x=1$ 处洛朗展开

$$\frac{1}{\ln x}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}-\frac{x-1}{12}+\frac{(x-1)^2}{24}-\frac{19(x-1)^3}{720}+\frac{3(x-1)^4}{160}+O\left((x-1)^5\right)$$

注意到

$$\int_1^x\left(\frac{x+t}{1+t}-1\right)^5dt=(x-1)^5\left(\frac{1}{4(x+1)^4}-\frac{1}{64}\right)=O\left((x-1)^6\right)$$

因为一致性 (如果去掉, 还成立吗?), 我们可以把 $\frac{x+t}{1+t}$ 代入洛朗展开再积分, 注意到余项已经估计完了, 直接计算有

$$\begin{aligned}\int_1^x\frac{1}{\ln\frac{x+t}{1+t}}dt&=\int_1^x[\frac{1}{\frac{x+t}{1+t}-1}+\frac{1}{2}-\frac{\frac{x+t}{1+t}-1}{12}+\frac{\left(\frac{x+t}{1+t}-1\right)^2}{24}-\frac{19\left(\frac{x+t}{1+t}-1\right)^3}{720}+\frac{3\left(\frac{x+t}{1+t}-1\right)^4}{160}]dt+O\left((x-1)^6\right)\\&=2+x-1-\frac{(x-1)^2}{24}+\frac{(x-1)^3}{48}-\frac{23(x-1)^4}{1920}+\frac{29(x-1)^5}{3840}+O\left((x-1)^6\right)\end{aligned}\tag{117}$$

我们完成了证明.

Problem 264

设独立同分布随机变量 $x_1, x_2, \cdots$ 有连续的偶密度函数, 证明

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{x_j} \xrightarrow{d} \text{cauchy分布}$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 首先有

$$\int e^{i\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{x_j}}{n}t}dP = [\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{n}\frac{1}{x}t}f(x)\,dx]^n = \left[2\int_0^{\infty}\cos\left(\frac{t}{nx}\right)f(x)\,dx\right]^n$$

无妨考虑 $t>0$, 注意到

$$\begin{aligned}1+2\int_0^{\infty}[\cos\left(\frac{t}{nx}\right)-1]f(x)\,dx &= 1+2\int_{\delta}^{\infty}[\cos\left(\frac{t}{nx}\right)-1]f(x)\,dx+2\int_0^{\delta}\left[\cos\left(\frac{t}{nx}\right)-1\right]f(x)\,dx\\ &= 1+O\left(\frac{1}{n^2}\right)+2f(0)\int_0^{\delta}\left[\cos\left(\frac{t}{nx}\right)-1\right]dx\\ &= 1+O\left(\frac{1}{n^2}\right)-\frac{2t}{n}f(0)\int_0^{\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}dx\\ &= 1-\frac{f(0)\,\pi t}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned} \tag{118}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\left[2\int_0^{\infty}\cos\left(\frac{t}{nx}\right)f(x)\,dx\right]^n = e^{-f(0)\pi|t|}$$

因此由特征函数逐点极限暗示依分布收敛, 我们完成了证明.

Problem 265

设 A, B, X 是复数域上的 n 阶矩阵, 若 $R = \begin{pmatrix} A & E \\ A^2 - B & A \end{pmatrix}$ 特征值两两不同, 证明矩阵方程

$$X^2 - 2AX + B = 0$$

有解

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 因为 R 可对角化, 因此存在可逆矩阵 $P = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{pmatrix}$, 使得

$$R \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{pmatrix}$$

若 P_1 不可逆, 可将秩 n 子矩阵 (P_1, P_2) 的列极大无关组交换至前 n 列 (后 n 行的列也同步交换), 此时新得到的 P_1 可逆的, 并根据初等变换和矩阵相似的关系知 (这里实际上是正交相似, 即也是合同, 因此效果上相当于把矩阵对角线交换了), 那之后可取 $X = P_1 \Lambda_1 P_1^{-1}$, 注意到

$$P_3 = P_1 \Lambda_1 - AP_1, A^2 P_1 - BP_1 + AP_3 = P_3 \Lambda_1$$

两式消去 P_3 即是 $X^2 - 2AX + B = 0$

Problem 266

设 E 是一个复 $banach$ 空间, 若 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E'$的单位球面, 且 $\star$ 弱收敛到 0, 证明

$$f\left(x\right) \triangleq \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m^m\left(x\right) \text{是无界算子}$$

即存在一个 E 的有界子集 A, 使得 $f(A)$ 无界.

Proof. (By 清疏竞赛数学)

Problem 267

对 $\rho > 0$, 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{\rho n}}{(n!)^{\rho}} \sim \frac{e^{\rho x}}{(2\pi)^{\frac{\rho-1}{2}} x^{\frac{\rho=1}{2}} \sqrt{\rho}}, x \to +\infty$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{\rho n}}{(n!)^{\rho}} \sim \int_0^{\infty} [\frac{x^y}{\Gamma(y+1)}]^{\rho} dy \sim \int_1^{\infty} \left[\frac{x^y}{\sqrt{2\pi y}\left(\frac{y}{e}\right)^y}\right]^{\rho} dy$$

于是有

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{\rho n}}{(n!)^{\rho}} &\sim \frac{1}{(2\pi)^{\frac{\rho}{2}}} \int_1^{\infty} e^{\rho\left(y\ln x + y - \left(y+\frac{1}{2}\right)\ln y\right)} dy \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{\rho}{2}}} \int_1^{\infty} e^{\rho\left(y\ln\frac{x}{y} + y - \frac{1}{2}\ln y\right)} dy \\
&= \frac{x^{1-\frac{\rho}{2}}}{(2\pi)^{\frac{\rho}{2}}} \int_{\frac{1}{x}}^{\infty} e^{\rho\left(xz\ln\frac{x}{xz}\right)} \frac{e^{\rho xz}}{z^{\frac{\rho}{2}}} dz \\
&= \frac{x^{1-\frac{\rho}{2}}}{(2\pi)^{\frac{\rho}{2}}} \int_{\frac{1}{x}}^{\infty} e^{-\rho x(z\ln z - z)} \frac{1}{z^{\frac{\rho}{2}}} dz \\
&= \frac{e^{\rho x} x^{1-\frac{\rho}{2}}}{(2\pi)^{\frac{\rho}{2}}} \int_{\frac{1}{x}}^{\infty} e^{-\rho x(z\ln z - z + 1)} \frac{1}{z^{\frac{\rho}{2}}} dz \\
&\sim \frac{e^{\rho x} x^{1-\frac{\rho}{2}}}{(2\pi)^{\frac{\rho}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\rho x\frac{(z-1)^2}{2}} dz \\
&= \frac{e^{\rho x}}{(2\pi)^{\frac{\rho-1}{2}} x^{\frac{\rho=1}{2}} \sqrt{\rho}}
\end{aligned} \tag{119}$$

Problem 268

设 Ω 为曲线 $\{\begin{smallmatrix} x^2+z^2=2x \\ y=\sqrt{x^2+z^2} \end{smallmatrix}$ 绕 z 轴旋转一周形成旋转曲面围成区域, 计算

$$\iiint_\Omega \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 消去

$$x_0^2+z_0^2=2x_0, y_0=\sqrt{x_0^2+z_0^2}, z=z_0, x^2+y^2=x_0^2+y_0^2$$

参数得旋转曲面方程为

$$\left(x^2+y^2+z^2-4\right)^2=16\left(1-z^2\right)$$

因此

$$\left(r^2-4\right)^2=16\left(1-r^2\cos^2\psi\right) \Longrightarrow r=\sqrt{8-16\cos^2\psi}$$

又

$$8-16\cos^2\psi \geqslant 0 \Longrightarrow \frac{\pi}{4} \leqslant \psi \leqslant \frac{3\pi}{4}$$

因此

$$\iiint_\Omega \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz=\int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin\psi d\psi \int_0^{\sqrt{8-16\cos^2\psi}} r^3dr=\frac{256\sqrt{2}\pi}{15}$$

Problem 269

求 $a \in \mathbb{R}$ 的值, 使得下述极限存在

$$\lim_{x\to 0}\int_{-x}^{x}\frac{1}{x}\left(1-\frac{|t|}{x}\right)\cos(a-t)\,dt$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 注意

$$\lim_{x\to 0^+}\int_{-x}^{x}\frac{1}{x}\left(1-\frac{|t|}{x}\right)\cos(a-t)\,dt=\lim_{x\to 0^+}\int_{-1}^{1}(1-|t|)\cos(a-xt)\,dt=\cos a\int_{-1}^{1}1-|t|\,dt$$

以及

$$\lim_{x\to 0^-}\int_{-x}^{x}\frac{1}{x}\left(1-\frac{|t|}{x}\right)\cos(a-t)\,dt=\lim_{x\to 0^-}\int_{-1}^{1}(1+|t|)\cos(a-xt)\,dt=\cos a\int_{-1}^{1}1+|t|\,dt$$

因此 $\cos a=0$, 故 $a=\frac{\pi}{2}+n\pi, n\in\mathbb{Z}$

Problem 270

计算

$$\iint_D \left(x-y^2\right)\left(y-x^2\right)(1-4xy)\,dxdy, D\text{由}y=\sqrt{x}, x=\sqrt{y}, x^2+y^2-x-y+\frac{1}{4}=0, 0\leqslant x, y\leqslant\frac{1}{2}\text{围成}$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 做换元

$$u=x-y^2, v=y-x^2, J=\begin{vmatrix} 1 & -2y \\ -2x & 1 \end{vmatrix}^{-1}=\frac{1}{1-4xy}$$

因此

$$\begin{aligned}\iint_D \left(x-y^2\right)\left(y-x^2\right)(1-4xy)\,dxdy &= \iint uvdudv \\ &= \int_0^{\frac{1}{4}} udu \int_0^{\frac{1}{4}-u} vdv = \frac{1}{6144}\end{aligned} \tag{120}$$

Problem 271

设正值 $f(x) \in C[0,1]$, 满足对任意 $n \geqslant 1$, 存在划分 $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = 1$, 使得

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx = \frac{1}{n}\int_0^1 f(x)\,dx, k = 1, 2, \cdots, n$$

计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

PROOF. (By 清疏竞赛数学) 先证划分存在性, 事实上由介值定理, 存在 $x_1 \in (0,1)$, 使得 $\int_0^{x_1} f(x)\,dx = \frac{1}{n}\int_0^1 f(x)\,dx$, 然后存在 $x_2 \in (x_1, 1)$, 使得 $\int_0^{x_2} f(x)\,dx = \frac{2}{n}\int_0^1 f(x)\,dx$, 依此下去, 可以找到需要的划分 $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = 1$.

再来计算极限, 事实上, 记同胚映射

$$F(x) : [0,1] \to [0, F(1)], x \to \int_0^x f(y)\,dy$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(F^{-1}\left(\frac{k}{n}\int_0^1 f(y)\,dy\right)\right)\\ &= \int_0^1 f\left(F^{-1}\left(x\int_0^1 f(y)\,dy\right)\right)dx\\ &= \int_0^1 f(z)\frac{F'(z)}{\int_0^1 f(y)\,dy}dz\\ &= \frac{\int_0^1 f^2(z)\,dz}{\int_0^1 f(z)\,dz}\end{aligned} \tag{121}$$

期中倒数第二个等号, 来自换元 $x = \frac{F(z)}{\int_0^1 f(y)dy}$.

Problem 272

设 $y \in C^1(\mathbb{R})$, 且满足 $y' = \sin y^3$, 证明 : y 有界.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 对某个 $x_0 \in \mathbb{R}$, 若 $y(x_0) = 0$, 由解的唯一性, 我们知道 $y(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
因此不妨设 $y(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
可设对某个 $x_0 \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, 使得

$$\sqrt[3]{n\pi} < y(x_0) < \sqrt[3]{(n+1)\pi}$$

记

$$\delta_0 = \sup\left\{\delta > 0 : \sqrt[3]{n\pi} < y(x) < \sqrt[3]{(n+1)\pi}, \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]\right\}$$

若 $0 < \delta_0 < \infty$, 则必有一个端点的函数值取到边界, 即不妨设设为 $x_0 + \delta$, 使得

$$y(x_0 + \delta_0) = \sqrt[3]{(n+1)\pi}, \sqrt[3]{n\pi} < y(x) < \sqrt[3]{(n+1)\pi}, \forall x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$$

于是

$$\infty = \int_{x_0}^{x_0+\delta_0} \frac{y'(x)}{\sin y^3(x)} dx = \delta_0$$

这是一个矛盾, 因此 y 只能是常值函数, 那就没什么好证的.
我们完成了证明.

Problem 273

设 $e^{-2022\cos t}f'(t) = \cos(2022\sin t - 2022t)$，计算 $f(2\pi) - f(0)$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 事实上

$$\begin{aligned}
f(2\pi) - f(0) &= \int_0^{2\pi} f'(y)\,dy \\
&= \int_0^{2\pi} e^{2022\cos y}\cos(2022\sin y - 2022y)\,dy \\
&= \Re\int_0^{2\pi} e^{2022e^{iy}}e^{-2022iy}dy \\
&= \Re\int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2022^n e^{i(n-2022)y}}{n!}dy \\
&= \Re\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{2022^n e^{i(n-2022)y}}{n!}dy \\
&= \frac{2022^{2022}}{(2022)!}\cdot 2\pi
\end{aligned} \tag{122}$$

Problem 274

给定 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, 设

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, x \in (-1, 1)$$

若

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = +\infty\,(-\infty)$$

证明

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty\,(-\infty)$$

并指出

$$\lim_{n\to\infty} \left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right| = \infty \nRightarrow \lim_{x\to 1^-} |f(x)| = \infty$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 记 $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$, 不妨设

$$\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$$

于是对任意 $C > 0$, 存在 N, 对任意 $n > N$, 成立 $S_n \geqslant C$.

注意到

$$\begin{aligned}
\varliminf_{x\to 1^-} f(x) &= \varliminf_{x\to 1^-} (1-x)\frac{f(x)}{1-x} \\
&= \varliminf_{x\to 1^-} (1-x)\left[\sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n\right] \\
&= \varliminf_{x\to 1^-} (1-x)\left[\sum_{n=0}^{N} S_n x^n + \sum_{n=N+1}^{\infty} S_n x^n\right] \\
&\geqslant \varliminf_{x\to 1^-} (1-x)\left[\sum_{n=0}^{N} S_n x^n + C\sum_{n=N+1}^{\infty} x^n\right] \\
&= C \varliminf_{x\to 1^-} (1-x)\frac{x^{N+1}}{1-x} = C
\end{aligned} \tag{123}$$

由 C 任意性, 我们证明了

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$$

对于反例, 考虑下面的函数即可

$$f(x) = \frac{x-1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}(2n+1)x^n$$

Problem 275

计算

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]^n}\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}dx_1dx_2\cdots dx_n$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 令

$$A_n=\frac{\sum\limits_{i=1}^n x_i^2}{n}$$

显然

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]^n}\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^n x_i^2}{n}\right)^2dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\int_{[0,1]^n}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_i^2x_j^2dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\frac{n^2}{9}=\frac{1}{9}$$

以及

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]^n}\frac{\sum\limits_{i=1}^n x_i^2}{n}dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{n}{3}=\frac{1}{3}$$

本质是 $\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$ 注意到

$$\begin{aligned}\left|\int_{[0,1]^n}\sqrt{A_n}-\sqrt{\frac{1}{3}}dx\right|&\leqslant\int_{\left|A_n-\frac{1}{3}\right|\leqslant\delta}\left|\sqrt{A_n}-\sqrt{\frac{1}{3}}\right|dx+\frac{1+\sqrt{\frac{1}{3}}}{\delta^2}\int_{\left|A_n-\frac{1}{3}\right|\geqslant\delta}\left|A_n-\frac{1}{3}\right|^2dx\\&\leqslant\int_{\left|A_n-\frac{1}{3}\right|\leqslant\delta}\left|\sqrt{A_n}-\sqrt{\frac{1}{3}}\right|dx+\frac{1+\sqrt{\frac{1}{3}}}{\delta^2}\int_{[0,1]^n}\left|A_n-\frac{1}{3}\right|^2dx\end{aligned}\tag{124}$$

$\forall\epsilon>0$, 取 δ 充分小, 使得 $\int_{\left|A_n-\frac{1}{3}\right|\leqslant\delta}\left|\sqrt{A_n}-\sqrt{\frac{1}{3}}\right|dx\leqslant\epsilon$, 在上面的不等式令 $n\to\infty$, 再由 ϵ 任意性即得

$$\int_{[0,1]^n}\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}dx_1dx_2\cdots dx_n\sim\sqrt{\frac{1}{3}n}$$

Problem 276

设 $a_n > 0$ 是趋于 0 的递减数列, 证明：

在 $\mathbb{R}$ 上, 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx$ 一致收敛的充分必要条件是 $\lim_{k\to\infty} ka_k = 0$

Proof. (By 清疏竞赛数学) 必要性：

注意到

$$\lim_{n\to\infty} 2na_{2n} \leqslant \frac{4}{\sqrt{2}} \sum_{k=n+1}^{2n} a_k \sin\frac{k\pi}{4n} = 0,\ \lim_{n\to\infty}(2n+1)a_{2n+1} \leqslant \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n}\cdot 2na_{2n} = 0$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} na_n = 0$$

充分性：

我们证明在 $x \in [0,\pi]$ 证明一致收敛即可.

注意到

$$\left|\sum_{k=n}^{m} \sin kx\right| = \frac{\left|\cos\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right] - \cos\left[\left(m+\frac{1}{2}\right)x\right]\right|}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$$

于是对 $x \in \left[\frac{\pi}{n}, \pi\right]$, 有

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k \sin kx\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\left[\sum_{k=n}^{m-1}|a_k - a_{k+1}| + a_m\right] = \frac{a_n}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \leqslant \frac{\pi a_n}{x} \leqslant na_n$$

对 $x \in \left[0, \frac{\pi}{m}\right]$ 有

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k \sin kx\right| \leqslant |\sin x| \sum_{k=n}^{m} ka_k \leqslant |x| \sum_{k=n}^{m} ka_k \leqslant \frac{\pi}{m}\sum_{k=n}^{m} ka_k$$

对 $x \in \left[\frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}\right]$, 取 $\ell = \left[\frac{\pi}{x}\right], x \in \left[\frac{\pi}{\ell+1}, \frac{\pi}{\ell}\right]$, 有

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k \sin kx\right| \leqslant \left|\sum_{k=n}^{\ell} a_k \sin kx\right| + \left|\sum_{k=\ell+1}^{m} a_k \sin kx\right| \leqslant \frac{\pi}{\ell}\sum_{k=n}^{\ell} ka_k + (\ell+1)a_{\ell+1}$$

我们完成了证明.

Problem 277

$C\in M_2(\mathbb{R})$, $h\in\mathbb{R}[x],\deg h\geqslant 1$, 证明存在 $X\in M_2(\mathbb{R})$, 使得 $h(X)=C$.

其中 C 的特征多项式 $\lambda^2+p\lambda+q$, 满足 $p^2-4q<0$.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 设 $P\in M_2(\mathbb{C})$, 使得

$$P^{-1}CP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix},\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$$

$h(z)$ 是多项式, 于是存在 $z_1,z_2\in\mathbb{C}$, 使得 $h(z_1)=\lambda_1,h(z_2)=\lambda_2$, 取 $X=P\begin{pmatrix}z_1 & 0\\ 0 & z_2\end{pmatrix}P^{-1}$, 则

$$h(X)=P\begin{pmatrix}h(z_1) & 0\\ 0 & h(z_2)\end{pmatrix}P^{-1}=C$$

又 X 是二阶矩阵, 因此存在 $a,b\in\mathbb{R}$, 不妨设 $a\neq 0$, 使得 $h(X)=aX+bE$, 因此

$$X=\frac{C-bE}{a}\in M_2(\mathbb{R})$$

我们完成了证明.

Problem 278

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处可导, 证明 : $\forall\delta>0$, 存在可测集 $E_\delta\subset[a,b]\,, m\left([a,b]\,/E_\delta\right)<\delta$, 使得

$$\lim_{x'\to x}\frac{f\left(x'\right)-f\left(x\right)}{x'-x}=f'\left(x\right), 关于x\in E_\delta一致$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 事实上, 相当于沿着实轴的极限的叶果洛夫定理也成立.

考虑

$$f_n\left(x\right)=\sup_{0<|x'-x|\leqslant\frac{1}{n}}\left|\frac{f\left(x'\right)-f\left(x\right)}{x'-x}-f'\left(x\right)\right|$$

由条件, 有

$$\lim_{n\to\infty}f_n\left(x\right)=0, a.e$$

由叶果洛夫定理, 我们知道存在可测集 $E_\delta\subset[a,b]\,, m\left([a,b]\,/E_\delta\right)<\delta$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}f_n\left(x\right)=0, 关于x\in E_\delta一致$$

因此 $\forall\epsilon>0$, 存在 $n_0\geqslant1$, 有 $|f_n\left(x\right)|\leqslant\epsilon,\forall x\in E_\delta, n\geqslant n_0$, 这就是

$$\left|\frac{f\left(x'\right)-f\left(x\right)}{x'-x}-f'\left(x\right)\right|\leqslant\epsilon,\forall0<|x'-x|\leqslant\frac{1}{n_0}, x\in E_\delta$$

我们完成了证明.

Problem 279

设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, 且 $A^2+B^2=AB$, 证明

$$AB-BA\text{可逆} \Rightarrow 3|n.$$

Proof. (By 清疏竞赛数学) 取 w 为三次单位根,$C=AB-BA$, 那么

$$(A+wB)\left(A+w^2B\right)=AB+w^2AB+wBA=\left(1+w+w^2\right)AB-wC=-wC,$$

又 $\overline{A+wB}=A+w^2B$, 因此

$$(-w)^n|C|=\left|(A+wB)\left(A+w^2B\right)\right|\geqslant 0$$

故 $3|n$, 我们完成了证明.

Problem 280

设 $f(x) \in R[0,1]$, 证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{f(\{\ln k\})}{k}}{\ln n} = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Proof. (By 清疏竞赛数学) 若 $f \in C^1[0,1]$, 注意 $\frac{f(\{\ln x\})}{x}$ 并不是连续函数, 所以不可以直接使用欧拉麦克劳林恒等式.

不妨设 $f(x) = x^m, m \in \mathbb{N}$, 只需证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\{\ln k\}^m}{k}}{\ln n} = \frac{1}{m+1}.$$

又注意对每个 $N \geqslant 1$, 必然有某个 n, 使得 $[e^{n-1}] < N \leqslant [e^n]$,

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{[e^{n-1}]} \frac{\{\ln k\}^m}{k}}{n-1} \sim \frac{\sum\limits_{k=1}^{[e^{n-1}]} \frac{\{\ln k\}^m}{k}}{\ln N} \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{N} \frac{\{\ln k\}^m}{k}}{\ln N} \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{[e^n]} \frac{\{\ln k\}^m}{k}}{\ln N} \sim \frac{\sum\limits_{k=1}^{[e^n]} \frac{\{\ln k\}^m}{k}}{n}.$$

于是

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{[e^n]} \frac{\{\ln k\}^m}{k}}{n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1} \sum\limits_{j=[e^k]+1}^{[e^{k+1}]} \frac{(\ln j - k)^m}{j}}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=[e^n]+1}^{[e^{n+1}]} \frac{(\ln j - n)^m}{j} \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{[e^n]}^{[e^{n+1}]} \frac{(\ln x - n)^m}{x} dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_n^{n+1} (y-n)^m\,dy \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 y^m dy = \frac{1}{m+1}.
\end{aligned}$$

上述式子中剩下的繁而不难的简单细节留给读者思考.

现在对一切多项式 p, 当然有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{p(\{\ln k\})}{k}}{\ln n} = \int_0^1 p(x)\,dx.$$

现考虑一般的黎曼可积函数.

对任意 $\epsilon > 0$, 由基本逼近常识, 存在多项式 $f_1(x), f_2(x) \in C^1[0,1]$, 使得

$$f_1(x) \leqslant f(x) \leqslant f_2(x), \ \int_0^1 f_2(x)\,dx - \epsilon \leqslant \int_0^1 f(x)\,dx \leqslant \int_0^1 f_1(x)\,dx + \epsilon.$$

因此

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{f(\{\ln k\})}{k}}{\ln n} \leqslant \int_0^1 f(x)\,dx + \epsilon, \ \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{f(\{\ln k\})}{k}}{\ln n} \geqslant \int_0^1 f(x)\,dx - \epsilon,$$

由 ϵ 任意性可以知道,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{f(\{\ln k\})}{k}}{\ln n} = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

我们完成了证明.

Problem 281

数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 V 上的一个函数 $p(x)$ 称为 m 次齐次多项式, 如果存在 V 上的 m 重线性函数 A, 使得

$$p(x) = Ax^m \triangleq A(x, x, \cdots, x).$$

现设 V 上的函数 p 在 V 的任何 $m+1$ 维子空间上是 m 次齐次多项式, 证明 : p 也是 m 次齐次多项式.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 令

$$A(x_1, x_2, \cdots, x_m) \triangleq \frac{1}{2^m m!} \sum_{\epsilon_j = \pm 1} [\epsilon_1 \epsilon_2 \cdots \epsilon_m p(\epsilon_1 x_1 + \epsilon_2 x_2 + \cdots + \epsilon_m x_m)],$$

下证 A 是 V 上的 m 重线性函数, 且满足 $Ax^m = p(x)$.

容易知道 p 在 V 的任何 $\leqslant m+1$ 维子空间上是 m 次齐次多项式, 进一步对 $x \in V$, $c \in \mathbb{F}$, 考虑 x 生成的一维空间, 则在其上有 $p(cx) = c^m p(x)$.

给定 $x_1, x_2, \cdots x_m$, 考虑其生成的 m 维子空间 V_m, 则在此子空间上存在 m 重线性函数 h, 使得 $p(x) = hx^m, \forall x \in V_m$, 此时因此

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^m m!} \sum_{\epsilon_j = \pm 1} [\epsilon_1 \epsilon_2 \cdots \epsilon_m p(\epsilon_1 x_1 + \epsilon_2 x_2 + \cdots + \epsilon_m x_m)] &= \frac{1}{2^m m!} \sum_{\epsilon_j = \pm 1} [\epsilon_1 \epsilon_2 \cdots \epsilon_m h(\epsilon_1 x_1 + \epsilon_2 x_2 + \cdots + \epsilon_m x_m)^m] \\
&= \frac{1}{2^m m!} \sum_{\epsilon_j = \pm 1} \sum_{|a| = m} \frac{m!}{a!} \epsilon^{a+1} h x^a \\
&= \frac{h(x_1, x_2, \cdots, x_m)}{2^m} \sum_{\epsilon_j = \pm 1} (\epsilon_1^2 \epsilon_2^2 \cdots \epsilon_m^2) \\
&= h(x_1, x_2, \cdots, x_m) = A(x_1, x_2, \cdots, x_m),
\end{aligned}$$

因此

$$A(x_1, x_2, cx_j, \cdots, x_m) = cA(x_1, x_2, \cdots, x_m), \ \forall j = 1, 2, \cdots, m, c \in \mathbb{F}.$$

类似的对每个 $j = 1, 2, \cdots, m$, 给定 $x_1, x_2, \cdots x_m, y_j$, 考虑生成的 $m+1$ 维子空间, 我们知道

$$A(x_1, x_2, x_j + y_j, \cdots, x_m) = A(x_1, x_2, \cdots, x_j, \cdots, x_m) + A(x_1, x_2, \cdots, y_j, \cdots, x_m).$$

因此 A 是 m 重线性函数. 又

$$\begin{aligned}
Ax^m = \frac{1}{2^m m!}\sum_{\epsilon_j=\pm1}\left[\epsilon_1\epsilon_2\cdots\epsilon_m p\left(\epsilon_1 x+\epsilon_2 x+\cdots+\epsilon_m x\right)\right] &= \frac{1}{2^m m!}\sum_{\epsilon_j=\pm1}\left[\epsilon_1\epsilon_2\cdots\epsilon_m h\left(\epsilon_1 x_1+\epsilon_2 x_2+\cdots+\epsilon_m x_m\right)^m\right]\\
&= \frac{p(x)}{2^m m!}\sum_{\epsilon_j=\pm1}\left[\epsilon_1\epsilon_2\cdots\epsilon_m\left(\epsilon_1+\epsilon_2+\cdots+\epsilon_m\right)^m\right]\\
&= \frac{p(x)}{2^m m!}\sum_{\epsilon_j=\pm1}\sum_{|a|=m}\frac{m!}{a!}\epsilon^{a+1}\\
&= p(x),
\end{aligned}$$

我们完成了证明.

Problem 282

设 $f(x,y,z)\in C^2(\mathbb{R}^3)$, 满足 $\lim\limits_{r\to\infty} r\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}-3\right)=1,\ r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 记

$$A_n=\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant n^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)dxdydz.$$

判断下述级数收敛性

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{A_n}.$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 记

$$g(x,y,z)=r\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}\right),$$

由高斯公式, 容易得到

$$A_n=\iint_{x^2+y^2+z^2=n^2}\frac{g(x,y,z)}{n^2}dS,$$

注意

$$\iint_{x^2+y^2+z^2=n^2}\frac{1+3r}{n^2}dS=4\pi(1+3n),$$

$\forall\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得 $\forall n\geqslant N$, 都有 q

Problem 283

设

$$I_n=\int_{[0,1]^n}(z_1z_2\cdots z_n)^{z_1z_2\cdots z_n}\,dz_1dz_2\cdots dz_n,$$

证明：

$$I_1=I_2<I_3<\cdots,\ \lim_{n\to\infty}I_n=1.$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 注意到

$$I_2=\int_0^1\int_0^1(xy)^{xy}\,dxdy=\int_0^1\frac{1}{x}dx\int_0^x u^u du=-\int_0^1 u^u\ln u du,$$

以及

$$\int_0^1 u^u\ln u du+\int_0^1 u^u du=u^u|_0^1=0,$$

故 $I_2=I_1$.

类似的可做换元

$$u_1=z_1z_2\cdots z_n,u_2=z_1z_2\cdots z_{n-1},\cdots,u_n=z_n,$$

就可以得到

$$I_n=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 x^x\left|\ln x\right|^{n-1}dx,$$

因此

$$\begin{aligned}
I_{n+1}&=\frac{1}{n!}\int_0^\infty y^n e^{-ye^{-y}-y}dy\\
&=\frac{n\cdot n^n\cdot e^{-n}}{n!}\int_0^\infty e^{n(\ln u-u+1)}e^{-nue^{-nu}}du\\
&\sim\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{n(\ln u-u+1)}e^{-nue^{-nu}}du\\
&\sim\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{1}{2}n(u-1)^2}du=1.
\end{aligned}$$

至于递增性, 注意到

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^x\left|\ln x\right|^n dx-n\int_0^1 x^x\left|\ln x\right|^{n-1}dx&=\int_0^\infty y^n e^{-ye^{-y}-y}dy-\int_0^\infty e^{-ye^{-y}-y}dy^n\\
&=\int_0^\infty y^n e^{-y\left(2+e^{-y}\right)}(y-1)\,dy\\
&\geqslant\int_0^\infty ye^{-y\left(2+e^{-y}\right)}(y-1)\,dy=0,
\end{aligned}$$

这里运用了不等式

$$\left(y^{n-1}-1\right)(y-1) \geqslant 0, \forall y \geqslant 0, n \geqslant 1,$$

容易看到当 $n>1$ 时, 不等式是严格的.

我们完成了证明.

Problem 284

设测度空间 (X,Ω,μ), 可测函数列满足 $|f_n|\leqslant|g_n|\,, a.e\ \mu$, 若

$$f_n\Rightarrow f,\ g_n\Rightarrow g,\ \lim_{n\to\infty}\int_X g_n d\mu=\int_X g d\mu,$$

若 g,g_n 是可积函数, 则 f_n,f 也是可积函数, 且成立

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu=\int_X f d\mu.$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 取子列使得

$$\lim_{k\to\infty}\int_X\left(g_{n_k}-f_{n_k}\right)d\mu=\varliminf_{n\to\infty}\int_X\left(g_n-f_n\right)d\mu,$$

再由里斯引理, 取子列的子列 (仍然记为 f_{n_k},g_{n_k}), 使得 $f_{n_k}\to f,\ g_{n_k}\to g,\ a.e$, 于是 $|f|\leqslant|g|\,,\ a.e$, 故 $f\in L^1\left(X,\mu\right)$.

于是由法图引理, 我们有

$$\int_X\left(g-f\right)d\mu\leqslant\lim_{k\to\infty}\int_X\left(g_{n_k}-f_{n_k}\right)d\mu=\varliminf_{n\to\infty}\int_X\left(g_n-f_n\right)d\mu=\int_X g d\mu-\varlimsup_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu,$$

这给出了

$$\varlimsup_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu\leqslant\int_X f d\mu.$$

类似的, 可取子列, 使得

$$\lim_{k\to\infty}\int_X\left(g_{n_k}+f_{n_k}\right)d\mu=\varliminf_{n\to\infty}\int_X\left(g_n+f_n\right)d\mu,\ f_{n_k}\to f,\ g_{n_k}\to g,\ a.e,$$

于是

$$\int_X\left(g+f\right)d\mu\leqslant\lim_{k\to\infty}\int_X\left(g_{n_k}+f_{n_k}\right)d\mu=\varliminf_{n\to\infty}\int_X\left(g_n+f_n\right)d\mu=\int_X g d\mu+\varliminf_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu,$$

这给出了

$$\int_X f d\mu\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu.$$

因此, 我们得到了

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu.$$

Problem 285

设 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=1$, 计算

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{f(x)}\left(\frac{\sin t}{t}-1\right)dt}{x^6}.$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 首先, 存在 $\delta>0, C>0$, 使得

$$-\frac{t^2}{6}-Ct^4\leqslant\frac{\sin t}{t}-1\leqslant-\frac{t^2}{6}+Ct^4,\ \forall |t|<\delta,$$

于是取 $\epsilon>0$, 使得 $|f(x)|<\delta, \forall |x|<\epsilon$, 因此当 $\forall |x|<\epsilon$, 我们有

$$-\frac{1}{18}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{f(x)}-\frac{t^2}{6}-Ct^4dt}{x^6}\leqslant\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{f(x)}\left(\frac{\sin t}{t}-1\right)dt}{x^6}\leqslant\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{f(x)}-\frac{t^2}{6}+Ct^4dt}{x^6}=-\frac{1}{18}.$$

我们完成了证明.

Problem 286

设 n 阶矩阵

$$A+A^T=\begin{pmatrix} 0 & 2022 & \cdots & 2022 \\ 2022 & \ddots & \cdots & 2022 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2022 & 2022 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

证明：$r(A) \geqslant n-1$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 我们将其写做 $2022E+A+A^T=J$, 这里 J 是元素全为 1 的矩阵, 我们可取正交矩阵 T, 使得

$$2022E+T^{-1}AT+T^{-1}A^TT=\begin{pmatrix} 2022 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

因此就有

$$T^{-1}AT=\tilde{A}+\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1011 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1011 \end{pmatrix}=\tilde{A}+\hat{A},$$

这里 $\tilde{A}$ 是反对称的 (并且特征值为 0 或纯虚数), 现在注意到

$$\tilde{A}+\hat{A}=\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta^T & A_1-1011E \end{pmatrix}, A_1=-A_1^T,$$

我们看到 $n-1$ 阶子式 $|A_1-1011E|\neq 0$, 因此 $r(A)\geqslant n-1$.

我们完成了证明.

Problem 287

证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]^n}\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}dV=0.$$

Proof. (By 清疏竞赛数学) 事实上 $\forall t>0$, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[t,t+1]^n}\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}}{n}dV=\int_t^{t+1}x^{-1}dx=\ln\left(1+\frac{1}{t}\right),\ \lim_{n\to\infty}\int_{[t,t+1]^n}|\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}}{n}|^2dV=[\int_t^{t+1}x^{-1}dx]^2=\ln^2\left(1+\frac{1}{t}\right),$$

于是熟知

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[t,t+1]^n}\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}}dV=\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)},\tag{125}$$

这给出了

$$0\leqslant\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]^n}\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}}dV=\lim_{n\to\infty}\int_{[t,t+1]^n}\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i-t}}dV\leqslant\lim_{n\to\infty}\int_{[t,t+1]^n}\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}}dV=\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)},$$

令 $t\to 0^+$, 就得到

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]^n}\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}dV=0.$$

我们给出(125)的证明, 以便刘神完成最一般情形的细节.

记 $A_n=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}}{n}$, $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta>0$, 使得

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)}\right|<\varepsilon,\ \forall\left|x-\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\right|<\delta,$$

于是

$$\int_{\left\{x\in[t,t+1]^n:\left|A_n-\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\right|\leqslant\delta\right\}}\left|\frac{1}{A_n}-\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)}\right|dV\leqslant\varepsilon,$$

我们还有

$$
\begin{aligned}
&\int_{\left\{x\in[t,t+1]^n:\left|A_n-\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\right|>\delta\right\}}\left|\frac{1}{A_n}-\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)}\right|dV\\
&\leqslant\frac{1}{\delta^2}\left(1+\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)}\right)\int_{[t,t+1]^n}\left|A_n-\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\right|^2dV\\
&=\frac{1}{\delta^2}\left(1+\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)}\right)[\int_{[t,t+1]^n}A_n^2dV-2\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\int_{[t,t+11]^n}A_ndV+\int_{[t,t+1]^n}[\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)]^2dV]\\
&\to 0,\ as\ n\to\infty.
\end{aligned}
$$

我们完成了证明.

Problem 288

设

$$x_1 > 0, x_{n+1} = x_n + \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i},$$

证明

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{3} - \frac{x_n}{\sqrt{n}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Proof. *(By 清疏竞赛数学)* 本题的难点是极限的存在性, 而不是极限值具体是多少.

首先

$$x_{n+1} \geqslant x_n + \frac{1}{x_n} \Rightarrow x_{n+1}^2 \geqslant x_n^2 + 2 \Rightarrow x_n \geqslant c_1\sqrt{n},$$

以及

$$x_{n+1} = x_n + \frac{n}{S_n} \leqslant x_n + \frac{n}{c_1 \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{k}} \Rightarrow x_n \leqslant c_2\sqrt{n}.$$

这里 $c_1, c_2 > 0$, 显然 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$.

注意到

$$\begin{aligned}
\varliminf_{n\to\infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}} \geqslant \varliminf_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = 2\varliminf_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n}}{S_n} \geqslant 3\varliminf_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{x_n} \\
\varlimsup_{n\to\infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = 2\varlimsup_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n}}{S_n} \leqslant 3\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{x_n}
\end{aligned},$$

我们有

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}} \varlimsup_{n\to\infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}} = 3. \tag{126}$$

另一方面

$$\begin{aligned}
\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{x_n^2}{n} &\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(x_{n+1}^2 - x_n^2\right) \\
&= 2 \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{nx_n}{S_n} \\
&\leqslant 2 + 2 \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n\left(x_{n+1} - x_n\right)}{x_{n+1}} \\
&= 2 + 2 \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n^2}{x_{n+1}S_n} \\
&\leqslant 2 + 4 \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{x_{n+1}S_{n+1} - x_nS_n} \\
&\leqslant 2 + 4 \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{x_n^2 + n} = 2 + 4 \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\frac{x_n^2}{n} + 1}.
\end{aligned}$$

于是我们有不等式

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{x_n^2}{n} \leqslant 2 + \frac{4}{1 + \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{x_n^2}{n}}. \tag{127}$$

根据等式(126)和不等式(127)和 Stolz 定理, 我们知道

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{x_n}{\sqrt{n}} = \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{3},\ \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

记

$$A = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n\left(\sqrt{3} - \frac{x_n}{\sqrt{n}}\right), B = \underline{\lim}_{n\to\infty}\, n\left(\sqrt{3} - \frac{x_n}{\sqrt{n}}\right),\ -\infty \leqslant B \leqslant A \leqslant \infty,$$

又

$$\begin{aligned}
\varlimsup_{n\to\infty} n\left(\sqrt{3}-\frac{x_n}{\sqrt{n}}\right) &= \frac{1}{2\sqrt{3}}\varlimsup_{n\to\infty}\left(\sqrt{3n}+x_n\right)\left(\sqrt{3n}-x_n\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}}\varlimsup_{n\to\infty}\frac{3-\frac{x_n^2}{n}}{\frac{1}{n}} \\
&\leqslant \frac{1}{2\sqrt{3}}\varlimsup_{n\to\infty}\frac{-\frac{x_{n+1}^2}{n+1}+\frac{x_n^2}{n}}{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}}\varlimsup_{n\to\infty}\left(nx_{n+1}^2-(n+1)\,x_n^2\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}}\varlimsup_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2x_n-x_n^2S_n}{S_n}+\frac{n^3}{S_n^2}\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4}\varlimsup_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2-x_nS_n}{n}+\frac{1}{2}\right) \\
&\leqslant \frac{\sqrt{3}}{4}\varlimsup_{n\to\infty}\left(4n+2-x_{n+1}S_{n+1}+x_nS_n+\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4}\varlimsup_{n\to\infty}\left(3n+3-x_{n+1}^2-\frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

这给出了

$$A \leqslant \frac{3}{2}A-\frac{\sqrt{3}}{8},$$

因此

$$A \geqslant \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$$\begin{aligned}
\varliminf_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n}-x_n}{\frac{1}{\sqrt{n}}} &\geqslant \varliminf_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n+3}-\sqrt{3n}-\frac{n}{S_n}}{-\frac{1}{2}n^{-\frac{3}{2}}} \\
&= \varliminf_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{3n+3}-\sqrt{3n})S_n-n}{-\frac{1}{\sqrt{3}}} \\
&= \sqrt{3}\varliminf_{n\to\infty}\frac{n\left(\sqrt{3n+3}+\sqrt{3n}\right)-3S_n}{\sqrt{3n+3}+\sqrt{3n}} \\
&= \frac{1}{2}\varliminf_{n\to\infty}\frac{n\left(\sqrt{3n+3}+\sqrt{3n}\right)-3S_n}{\sqrt{n}} \\
&\geqslant \frac{1}{2}\varliminf_{n\to\infty}\frac{3\sqrt{3n}+\sqrt{3}n^{-\frac{1}{2}}-3x_{n+1}}{\frac{1}{2}n^{-\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{1}{2}\varliminf_{n\to\infty}\left(6\sqrt{3}n+2\sqrt{3}-6\sqrt{n}x_{n+1}\right) \\
&= \sqrt{3}+3\varliminf_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{3n}-x_{n+1}\right) \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{2}+3\varliminf_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{3n}-x_n\right),
\end{aligned}$$

这给出了

$$A \geqslant B \geqslant -\frac{\sqrt{3}}{2} + 3A \Rightarrow A \leqslant \frac{\sqrt{3}}{4},$$

因此 $A = B = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

我们完成了证明.

这种方法可以实现高阶渐进, 例如 (后续系数计算实在太大, 可能会有计算错误, 留给读者自行运算.)

$$\lim_{n\to\infty} n^3\sqrt{n}\left(x_n - \sqrt{3n} + \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{3}}{32n\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{3}}{128n^2\sqrt{n}}\right).$$

Problem 289

设复值函数 $f(x), g(x) \in R[0,1]$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(\{nx\})\, g\left(\left\{\frac{n}{x}\right\}\right) dx = \int_0^1 f(x)\, dx \int_0^1 g(x)\, dx,$$

这里 $\{x\} \triangleq x-[x]$, $[x]$ 表示不超过x的最大整数.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 不妨在实数框架下证明, 否则分为实部虚部分别讨论即可.

首先当 $g=c$ 为常值函数, 由黎曼引理, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(\{nx\})\, g\left(\left\{\frac{n}{x}\right\}\right) dx = c\int_0^1 f(\{x\})\, dx = \int_0^1 g(x)\, dx \int_0^1 f(x)\, dx.$$

首先当 $f=c$ 为常值函数, 由黎曼引理, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(\{nx\})\, g\left(\left\{\frac{n}{x}\right\}\right) dx = c\lim_{n\to\infty}\int_1^\infty \frac{g(\{nx\})}{x^2}dx = c\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx\int_0^1 g(\{x\})\, dx = \int_0^1 g(x)\, dx\int_0^1 f(x)\, dx.$$

因此在后续证明中, 我们总可以适当的 $f+c, g+c$ 代替 f, g.

对于 $k, m \in \mathbb{Z}$, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 e^{2\pi ik\{nx\}}e^{2\pi im\left\{\frac{n}{x}\right\}}dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 e^{2\pi in\left(kx+\frac{m}{x}\right)}dx = \begin{cases} 1, & k=m=0 \\ 0, & k^2+m^2\neq 0 \end{cases}.$$

这一极限式只需要划分好单调区间, 然后做换元 $kx+\frac{m}{x}=y$, 利用黎曼引理即可证明 (刘神需要完成的重点细节之一). 因此我们对一切三角多项式 p, q, 都有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 p(\{nx\})\, q\left(\left\{\frac{n}{x}\right\}\right) dx = \int_0^1 p(x)\, dx\int_0^1 q(x)\, dx.$$

如果 f, g 是连续的, 且 $f(0)=f(1), g(0)=g(1)$, 由第二逼近定理, 存在三角多项式 f_m, g_m 一致收敛到 f, g, 于是对任意 $\epsilon \in (0,1)$, 当 m 充分大, 我们有

$$|f_m(x)-f(x)|<\epsilon, |g_m(x)-g(x)|<\epsilon,\ \forall x\in[0,1],$$

此时对任意 $x\in[0,1]$, 我们有

$$\begin{aligned}\left|f_m(x)g_m(x)-f(x)g(x)\right| &\leqslant |f_m(x)|\,|g_m(x)-g(x)|+|g(x)|\,|f_m(x)-f(x)|\\ &\leqslant\left(1+\sup_{[0,1]}|f|+\sup_{[0,1]}|g|\right)\epsilon.\end{aligned}$$

根据

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^1 f(\{nx\})\,g\left(\left\{\frac{n}{x}\right\}\right)dx-\int_0^1 f(x)\,dx\int_0^1 g(x)\,dx\right|\leqslant\left|\int_0^1 f(\{nx\})\,g\left(\left\{\frac{n}{x}\right\}\right)dx-\int_0^1 f_m(\{nx\})\,g_m\left(\left\{\frac{n}{x}\right\}\right)dx\right|\\ &+\left|\int_0^1 f_m(\{nx\})\,g_m\left(\left\{\frac{n}{x}\right\}\right)dx-\int_0^1 f_m(x)\,dx\int_0^1 g_m(x)\,dx\right|+\left|\int_0^1 f_m(x)\,dx\int_0^1 g_m(x)\,dx-\int_0^1 f(x)\,dx\int_0^1 g_m(x)\right|\\ &+\left|\int_0^1 f(x)\,dx\int_0^1 g_m(x)\,dx-\int_0^1 f(x)\,dx\int_0^1 g(x)\,dx\right|\\ &\leqslant\int_0^1\left|f(\{nx\})\,g\left(\left\{\frac{n}{x}\right\}\right)-f_m\{(nx)\}\,g_m\left(\left\{\frac{n}{x}\right\}\right)\right|dx+\left|\int_0^1 f_m(\{nx\})\,g_m\left(\left\{\frac{n}{x}\right\}\right)dx-\int_0^1 f_m(x)\,dx\int_0^1 g_m(x)\,dx\right|\\ &+\int_0^1|g_m(x)|\,dx\int_0^1|f_m(x)-f(x)|\,dx+\int_0^1|f(x)|\,dx\int_0^1|g_m(x)-g(x)|\,dx\\ &\leqslant 2\left(1+\sup_{[0,1]}|f|+\sup_{[0,1]}|g|\right)\epsilon+\left|\int_0^1 f_m(\{nx\})\,g_m\left(\left\{\frac{n}{x}\right\}\right)dx-\int_0^1 f_m(x)\,dx\int_0^1 g_m(x)\,dx\right|,\end{aligned}$$

易知

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(\{nx\})\,g\left(\left\{\frac{n}{x}\right\}\right)dx=\int_0^1 f(x)\,dx\int_0^1 g(x)\,dx.$$

当 $f,g\in C[0,1]$, 现在考虑

$$f_\delta^\pm(x)=\begin{cases}f(x) & ,\delta\leqslant x\leqslant 1\\ f(x)\pm\left[\frac{f(0)-f(1)}{\delta}x-f(0)+f(1)\right] & ,0\leqslant x<\delta\end{cases},$$
$$g_\delta^\pm(x)=\begin{cases}g(x) & ,\delta\leqslant x\leqslant 1\\ g(x)\pm\left[\frac{g(0)-g(1)}{\delta}x-g(0)+g(1)\right] & ,0\leqslant x<\delta\end{cases}$$

可不妨设 $f(x)\geqslant f(1)-f(0)\geqslant 0,\ g(x)\geqslant g(1)-g(0)\geqslant 0$, 则

$$0\leqslant f_\delta^-(x)\leqslant f(x)\leqslant f_\delta^+(x),\ 0\leqslant g_\delta^-(x)\leqslant g(x)\leqslant g_\delta^+(x)$$

且

$$\begin{aligned}\int_0^1 f_\delta^{\pm}(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx\pm\frac{\delta}{2}\left(f(1)-f(0)\right)\\ \int_0^1 g_\delta^{\pm}(x)\,dx=\int_0^1 g(x)\,dx\pm\frac{\delta}{2}\left(g(1)-g(0)\right)\end{aligned}.$$

注意到

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(\{nx\})\,g\left(\left\{\frac{n}{x}\right\}\right)dx\leqslant\int_0^1 f_\delta^{+}\{nx\}\,g_\delta^{+}\left(\left\{\frac{n}{x}\right\}\right)dx\to\int_0^1 f_\delta^{+}(x)\,dx\int_0^1 g_\delta^{+}(x)\,dx\\ \int_0^1 f(\{nx\})\,g\left(\left\{\frac{n}{x}\right\}\right)dx\geqslant\int_0^1 f_\delta^{-}\{nx\}\,g_\delta^{-}\left(\left\{\frac{n}{x}\right\}\right)dx\to\int_0^1 f_\delta^{-}(x)\,dx\int_0^1 g_\delta^{-}(x)\,dx\end{aligned},$$

以及 δ 的任意性, 容易知道

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(\{nx\})\,g\left(\left\{\frac{n}{x}\right\}\right)dx=\int_0^1 f(x)\,dx\int_0^1 g(x)\,dx.$$

对一般的 f,g, 不妨设 $f,g\geqslant 1$(为什么要如此不妨设, 刘神重点细节补充), 我们知道对任意 $\epsilon\in(0,1)$, 存在 (为什么存在, 刘神需要重点补充, 本细节会有一定难度)$f_1(x),f_2(x),g_1(x),g_2(x)\in C[0,1]$, 使得 $f_1(x)\leqslant f(x)\leqslant f_2(x)$, $g_1(x)\leqslant g(x)\leqslant g_2(x)$, 并且成立

$$\begin{aligned}\int_0^1 f_2(x)\,dx-\epsilon\leqslant\int_0^1 f(x)\,dx\leqslant\int_0^1 f_1(x)\,dx+\epsilon\\ \int_0^1 g_2(x)\,dx-\epsilon\leqslant\int_0^1 g(x)\,dx\leqslant\int_0^1 g_1(x)\,dx+\epsilon\end{aligned},$$

以及估计 (为什么要求这样的估计, 刘神需重点补充)

$$\begin{aligned}\sup_{[0,1]}|g_2|\leqslant\sup_{[0,1]}|g|+1,\ \inf_{[0,1]}g_1\geqslant 0\\ \sup_{[0,1]}|f_2|\leqslant\sup_{[0,1]}|f|+1,\ \inf_{[0,1]}f_1\geqslant 0\end{aligned}.$$

则

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_0^1 f(\{nx\})\,g\left(\left\{\frac{n}{x}\right\}\right)dx\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_0^1 f_2(\{nx\})\,g_2\left(\left\{\frac{n}{x}\right\}\right)dx=\int_0^1 f_2(x)\,dx\int_0^1 g_2(x)\,dx\\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\int_0^1 f(\{nx\})\,g\left(\left\{\frac{n}{x}\right\}\right)dx\geqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}\int_0^1 f_1(\{nx\})\,g_1\left(\left\{\frac{n}{x}\right\}\right)dx=\int_0^1 f_1(x)\,dx\int_0^1 g_1(x)\,dx\end{aligned},$$

又

$$\int_0^1 f_2(x)\,dx \int_0^1 g_2(x)\,dx \leqslant \left[\int_0^1 f(x)\,dx + \epsilon\right]\left[\int_0^1 g(x) + \epsilon\right]$$
$$\int_0^1 f_1(x)\,dx \int_0^1 g_1(x)\,dx \geqslant \left[\int_0^1 f(x)\,dx - \epsilon\right]\left[\int_0^1 g(x) - \epsilon\right],$$

我们知道

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(\{nx\})\,g\left(\left\{\frac{n}{x}\right\}\right)dx = \int_0^1 f(x)\,dx\int_0^1 g(x)\,dx.$$

我们完成了证明.

Problem 290

设 n 阶矩阵

$$A+A^T=\begin{pmatrix} 0 & 2022 & \cdots & 2022 \\ 2022 & \ddots & \cdots & 2022 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2022 & 2022 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

证明：$r(A)\geqslant n-1$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 我们将其写做 $2022E+A+A^T=J$, 这里 J 是元素全为 1 的矩阵, 我们可取正交矩阵 T, 使得

$$2022E+T^{-1}AT+T^{-1}A^TT=\begin{pmatrix} 2022 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

因此就有

$$T^{-1}AT=\tilde{A}+\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1011 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1011 \end{pmatrix}=\tilde{A}+\hat{A},$$

这里 $\tilde{A}$ 是反对称的 (并且特征值为 0 或纯虚数), 现在注意到

$$\tilde{A}+\hat{A}=\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta^T & A_1-1011E \end{pmatrix}, A_1=-A_1^T,$$

我们看到 $n-1$ 阶子式 $|A_1-1011E|\neq 0$, 因此 $r(A)\geqslant n-1$.

我们完成了证明.

Problem 291

设概率空间 (X, Ω, P) 中一族随机变量 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 依测度收敛到 1, 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{n \ln n} = \infty, \ a.s.$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 对任意正可测集 $S \in \Omega$, 由 Levi 定理知

$$\int_S \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{n \ln n} dP = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_S X_n dP}{n \ln n},$$

由依测度收敛的法图引理, 我们有

$$\varliminf_{n \to \infty} \int_S X_n dP \geqslant \int_S 1 dP = P(S)$$

这给出了 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\int_S X_n dP}{n \ln n} = +\infty$, 取

$$S_k = \left\{ x \in X : k - 1 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{n \ln n} < k \right\}, k \in \mathbb{N}_+,$$

我们有

$$kP(S_k) \geqslant \int_{S_k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{n \ln n} dP,$$

这给出了 $P(S_k) = 0$, 因此

$$P\left(\left\{ x \in X : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{n \ln n} < \infty \right\} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(S_k) = 0.$$

我们完成了证明.

Problem 292

设 $U \subset \mathbb{C}$ 是一连通开集, 非常值全纯函数 f 满足 $f(f(z)) = f(z)$, 证明 $f(z) = z, \forall z \in U$.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 显然 $f'(z) f'(f(z)) = f'(z)$, $z \in U$, 于是由零点孤立性, 要么 $f'(z) = 0, \forall z \in U$, 要么 $f'(f(z)) = 1, \forall z \in U$, 对于前者, 自然有 $f(z)$ 为常数, 对于后者, 因为 f 的值域是连通开集合, 故 f' 在一个连通开集上为 1, 因此仍然是 $f' = 1, \forall z \in U$, 又 f 不为常数, 因此无论如何都有 $f(z) = z, \forall z \in U$. 我们完成了证明.

Problem 293

设 $X\subset\mathbb{R}$ 是正勒贝格可测集, 证明 X 中存在 2022 个点, 其构成等差数列.

Proof. (By 清疏竞赛数学) 我们指出 $f(x)=m\left(\bigcap\limits_{k=0}^{2021}(X+kx)\right)$ 在 $x=0$ 连续.

事实上,

$$\begin{aligned}|f(x)-f(0)|&=\left|\int_{\mathbb{R}}\prod_{k=0}^{2021}\chi_{X+kx}(t)-\prod_{k=0}^{2021}\chi_X(t)\,dt\right|\\&\leqslant\int_{\mathbb{R}}\left|\prod_{k=0}^{2021}\chi_{X+kx}(t)-\prod_{k=0}^{2021}\chi_X(t)\right|dt\\&\leqslant\sum_{k=0}^{2021}\int_{\mathbb{R}}|\chi_{X+kx}(t)-\chi_X(t)|\,dt\\&=\sum_{k=0}^{2021}\int_{\mathbb{R}}|\chi_X(t-kx)-\chi_X(t)|\,dt.\end{aligned}$$

由勒贝格积分的基本性质, 我们有 $\lim\limits_{x\to0}\sum\limits_{k=0}^{2021}\int_{\mathbb{R}}|\chi_X(t-kx)-\chi_X(t)|\,dt=0$, 因此我们说明了 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续.

现可以由 $f(0)>0$ 和保号性, 找到 a 使得,

$$m\left(\bigcap_{k=0}^{2021}(X+ka)\right)>0\Rightarrow\bigcap_{k=0}^{2021}(X+ka)\neq\emptyset.$$

我们完成了证明.

Problem 294

设 $C[0,1]$ 是复值连续函数空间, P 是其中多项式组成的闭子空间, 证明 : $\dim P < \infty$.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 考虑

$$\frac{d}{dx}: P \subset C[0,1] \to C[0,1],\ f \to f',$$

我们断言 $\frac{d}{dx}$ 是闭算子.

设

$$\frac{df_n}{dx} \rightrightarrows g, f_n \rightrightarrows f,\ f_n \in P,\ f \in P$$

并且有等式

$$\int_0^x f_n'(y)\,dy = f_n(x) - f_n(0).$$

现在两边取极限, 我们有

$$\int_0^x g(y)\,dy = f(x) - f(0),$$

因此 $g = \frac{df}{dx}$.

现在我们知道 $\frac{d}{dx}$ 是有界的, 从而

$$\max_{x\in[0,1]} |f'(x)| \leqslant M \max_{x\in[0,1]} |f(x)|,\ \forall f \in P.$$

不妨设 $M > 0$, 取 $s > M+1,\ s \in \mathbb{N}$ 以及 $x_i = \frac{i}{s},\ i = 0,1,2,\cdots,s$, 考虑

$$T: P \to \mathbb{C}^{s+1}: f \to (f(x_0), f(x_1), \cdots, f(x_s)),$$

设 $f \in \ker T$, 令 x_M 是 $|f(x)|$ 最大值点, 存在 $i_0 \in \{1,2,\cdots,s\}$, 使得 $x_M \in [x_{i_0-1}, x_{i_0}]$, 此时

$$\sup_{[0,1]} |f| = |f(x_M) - f(x_{i_0})| \leqslant \sup_{[0,1]} |f'| \cdot |x_M - x_{i_0}| \leqslant M \sup_{[0,1]} |f| \cdot \frac{1}{s} \leqslant \frac{M}{M+1} \sup_{[0,1]} |f|,$$

因此 $f = 0$, 这给出了 $\dim P < \infty$.

我们完成了证明.

Problem 295

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是具有光滑边界的区域, 假如

$$u \in C\left(\overline{\mathbb{R}^3 - \Omega}\right), \ u|_{\partial\Omega} = 1, \ \lim_{|x|\to\infty} |u(x)| = 0,$$

并且 u 在 $\mathbb{R}^3 - \Omega$ 调和, 则有 $\lim\limits_{|x|\to\infty} |x|\,|u(x)|$ 存在.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 对任意 $x \in \mathbb{R}^3 - \overline{\Omega}$, 我们取充分小的球 $B(x,\epsilon)$, 和充分大的球 $B(0,R)$, 使得

$$\overline{B(x,\epsilon)} \bigcup \overline{\Omega} \subset B(0,R), \ \overline{B(x,\epsilon)} \bigcap \overline{\Omega} = \emptyset,$$

取 3 维 Laplace 方程基本解 $\Gamma(x) = \frac{1}{3(3-2)a(3)|x|} = \frac{1}{4\pi|x|}$, 我们有基本估计

$$|D\Gamma(x)| < \frac{C}{|x|^2}, \left|D^2\Gamma(x)\right| < \frac{C}{|x|^3}.$$

由第二格林公式 (涉及的法向量方向从表达式可以看出), 我们有

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{B(0,R)-\overline{B(x,\epsilon)}-\overline{\Omega}} u(y)\,\Delta\Gamma(y-x) - \Gamma(y-x)\,\Delta u(y)\,dy \\
&= \int_{\partial\Omega} u(y)\frac{\partial\Gamma(y-x)}{\partial n} - \Gamma(y-x)\frac{\partial u(y)}{\partial n}dS(y) \\
&+ \int_{\partial B(x,\epsilon)} u(y)\frac{\partial\Gamma(y-x)}{\partial n} - \Gamma(y-x)\frac{\partial u(y)}{\partial n}dS(y) \\
&+ \int_{\partial B(0,R)} u(y)\frac{\partial\Gamma(y-x)}{\partial n} - \Gamma(y-x)\frac{\partial u(y)}{\partial n}dS(y).
\end{aligned}$$

显然,

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial\Omega} \frac{\partial\Gamma(y-x)}{\partial n}dS(y) = 0, \\
&\lim_{|x|\to\infty}\int_{\partial\Omega} |x|\,\Gamma(y-x)\frac{\partial u(y)}{\partial n}dS(y) = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u(y)}{\partial n}dS(y), \\
&\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\partial B(x,\epsilon)} u(y)\frac{\partial\Gamma(y-x)}{\partial n} - \Gamma(y-x)\frac{\partial u(y)}{\partial n}dS(y) = u(x), \\
&\lim_{R\to\infty}\int_{\partial B(0,R)} u(y)\frac{\partial\Gamma(y-x)}{\partial n} - \Gamma(y-x)\frac{\partial u(y)}{\partial n}dS(y) = 0.
\end{aligned}$$

这给出了

$$\lim_{|x|\to\infty} |x|\,u(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u(y)}{\partial n}dS(y).$$

我们完成了证明.

Problem 296

设 $f(x,y)\in C^1(\mathbb{R}^2)$, 我们假设存在 $C>0$, 使得 $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|\leqslant C$, 首先证明下述微分方程有唯一的 $\mathbb{R}$ 上的解

$$y'=f(x,y(x)),y(x_0)=y_0,$$

然后假设 $f(x+1,y)=f(x,y)$, 如果上述微分方程有 $\mathbb{R}$ 上的有界解, 则上述微分方程必然有 $\mathbb{R}$ 上周期 1 的解.

Proof. *(By 清疏竞赛数学)* 第一问几乎是显然的, 因为 $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqslant C|y_1-y_2|$ 成立, 所以解当然是存在且唯一的, 我们还需要说明解能延拓至全空间, 假设在区间 (a,b) 上解存在, 且 $x_0\in(a,b)$, 注意到存在 $C_1,C_2>0$, 使得

$$\begin{aligned}|y'(x)|=|f(x,y(x))|&\leqslant|f(x,y(x))-f(x,y(x_0))|+\sup_{x\in[a,b]}|f(x,y_0)|\\&\leqslant C|y(x)-y(x_0)|+\sup_{x\in[a,b]}|f(x,y_0)|\leqslant C_1+C_2|y(x)|,\ \forall x\in(a,b),\end{aligned}$$

因此 $\int_a^b\frac{|y'(x)|}{C_1+C_2|y(x)|}dx\leqslant 1$, 从而

$$\int_{y(a^+)}^{y(b^-)}\frac{1}{C_1+C_2|x|}dx<\infty.$$

这给出了 $y(a^+),y(b^-)$ 都是存在的有限数, 从而 y 总能延拓到 $\mathbb{R}$ 上.

对于第二问, 设 y 是有界解, 若有 $x_1\in\mathbb{R}$, 使得 $y(x_1+1)=y(x_1)=y_1$, 那么 $y'=f(x,y(x)),y(x_1)=y_1$ 就有两个有界解 $y(x),y(x+1)$, 此时由解的唯一性我们知道 $y(x)=y(x+1),\forall x\in\mathbb{R}$.

现在假设 $y(x+1)\neq y(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$, 不妨设 $y(x+1)>y(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$, 结合有界性, 我们知道 $\lim\limits_{k\to+\infty}y(x+k)=g(x)$ 存在, 如果我们记题目中微分方程的解为 $\varphi(x,x_0,y_0)$, 我们有

$$y(x+k)=\varphi(x,x_0,y(x_0+k)),$$

由解对初值的连续依赖性, 并令 $k\to\infty$, 我们知道

$$g(x)=\varphi(x,x_0,g(x_0)),$$

显然还有 $g(x+1)=g(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$, 故 g 是一个周期 1 解.

Problem 297

对 $k\in\mathbb{N}$, $f(x)\in C^k(\mathbb{R})$, 且存在 $T>0$, 使得 $f(x+T)=f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, 那么我们可以找到三角多项式 (周期为 T) 列 $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}||g_n(x)-g(x)||_{C^k}=0,$$

这里

$$||f||_{C^k}\triangleq\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|+\sup_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)|+\cdots+\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|f^{(k)}(x)\right|.$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 无妨设 $T=1$, 令

$$F_n(x)=\frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin(\pi(n+1)x)}{\sin(\pi x)}\right)^2=\sum_{|j|\leqslant n}\left(1-\frac{|j|}{n+1}\right)e^{2\pi ijx},$$

然后我们有

$$\begin{aligned}F_n(x)=\int_0^1 f(x-y)F_n(y)\,dy&=\sum_{|j|\leqslant n}\int_0^1 f(x-y)\left(1-\frac{|j|}{n+1}\right)e^{2\pi ijy}dy\\&=\sum_{|j|\leqslant n}\int_0^1 f(y)\left(1-\frac{|j|}{n+1}\right)e^{-2\pi ijy}dy\cdot e^{2\pi ijx}.\end{aligned}$$

即 $F_n(x)=\int_0^1 f(x-y)F_n(y)\,dy$ 是周期 1 的三角多项式, 且成立

$$F_n^{(j)}(x)=\int_0^1 f^{(j)}(x-y)F_n(y)\,dy,\ j=0,1,2,\cdots,k,$$

熟知 $\{F_n(y)\}_{n=1}^{\infty}$ 构成恒等逼近核, 因此

$$F_n^{(j)}(x)\rightrightarrows f^{(j)}(x)\,,\ j=0,1,2,\cdots,k.$$

我们完成了证明.

Problem 298

设 $f(x)\in C^2[0,1]$, 证明：

$$\lim_{n\to\infty} n\int_{[0,1]^n}\left(f\left(\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}x_j}{n}\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right)dV=\frac{1}{24}f''\left(\frac{1}{2}\right).$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 记 $A_n=\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}x_j}{n}$, 我们令

$$K_n:C^2[0,1]\to\mathbb{R},\ f\to n\int_{[0,1]^n}\left(f(A_n)-f\left(\frac{1}{2}\right)-f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(A_n-\frac{1}{2}\right)-f''\left(\frac{1}{2}\right)\left(A_n-\frac{1}{2}\right)^2\right)dV,$$

运用泰勒中值定理, 我们有

$$\left|f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)-f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)-f''\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right|\leqslant||f||_{C^2}\cdot\left|x-\frac{1}{2}\right|^2,$$

这给出了

$$|K_nf|\leqslant||f||_{C^2}\,n\int_{[0,1]^n}\left|A_n-\frac{1}{2}\right|^2dV=\frac{1}{12}||f||_{C^2}. \tag{128}$$

由上一习题, 我们用标准的 Fredrichs 逼近方法完成证明.

如果 f 是周期 1 的, 即 $f^{(j)}(1)=f^{(j)}(0)$, $j=0,1,2$, 那么对任意 $\varepsilon>0$, 我们存在三角多项式 g, 使得 $||f-g||_{C^2}\leqslant 12\varepsilon$, 现在我们有

$$|K_nf|\leqslant|K_nf-K_ng|+|K_ng|\leqslant\frac{1}{12}||f-g||_{C^2}+|K_ng|\leqslant\varepsilon+|K_ng|,$$

直接计算知 (刘神习题)

$$\lim_{n\to\infty}|K_ng|=0,$$

由 ε 任意性, 我们知道 $\lim\limits_{n\to\infty}|K_nf|=0$.

对一般的 f, 选取 $a,b,c\in\mathbb{R}$, 并令 $p(x)=x^3(ax^2+bx+c)$, 使得

$$p^{(j)}(1)=f^{(j)}(0)-f^{(j)}(1),j=0,1,2.$$

注意直接计算有 (刘神习题)

$$\lim_{n\to\infty} K_n p = 0.$$

因此我们就有

$$\lim_{n\to\infty} K_n f = \lim_{n\to\infty} K_n (f+p) - \lim_{n\to\infty} K_n p = 0 - 0 = 0.$$

Problem 299

证明 : $\mathbb{C}^n$ 中拟凸域 V 上存在光滑多重次调和函数 φ, 满足对任意 $c \in \mathbb{R}$, 都有

$$\{z \in V : \varphi(z) < c\}$$

是相对 V 紧的.

Proof. *(By 清疏竞赛数学)* 这个结果源自经典多元复分析理论, 可以在多本经典教材上找到, 但是其证明大多都有细节错误 (或者细节相当缺乏), 近日在做此结果推广时忽然想起这件事情, 因此在这里写一个严格的细节详细的证明, 以供学习多复变基础知识的同学查阅.

我们把满足对任意 $c \in \mathbb{R}$, 都有

$$\{z \in V : \varphi(z) < c\}$$

是相对 V 紧的函数 φ 称为 V 上的穷竭函数, 那么根据拟凸域定义, 我们可以找到 V 上的连续多重次调和穷竭函数 η, 我们围绕 η 来进行磨光处理.

对 $j \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R}$, 我们令

$$V_c \triangleq \{z \in V : \eta(z) < c\}, \ I_j(\zeta) \triangleq \begin{cases} 1, & \zeta \in V_j \\ 0, & \zeta \notin V_j \end{cases}$$

以及

$$\eta_j(z) \triangleq \int_{|\zeta| \leqslant 1} I_{j+1}(z - \epsilon_j \zeta)\, \eta(z - \epsilon_j \zeta)\, \chi(\zeta)\, d\zeta + \epsilon_j |z|^2 \in C^\infty(\mathbb{C}^n),$$

这里 $\chi(\zeta) \in C_c^\infty(\mathbb{C}^n)$ 是最经典的磨光核, ϵ_j 是待定的充分小的正数, 使得 $z - \epsilon_j \zeta \in V_{j+\frac{1}{2}}$, $\forall |\zeta| \leqslant 1$, $z \in \overline{V_j}$. 注意只要 $t > s$, 我们这里有 V_s 是相对 V_t 紧的.

现在对 $z \in V_j$, $z - \epsilon_j \zeta \in V_{j+\frac{1}{2}}$, $\forall |\zeta| \leqslant 1$, 然后对任意 $b \in \mathbb{C}^n$, 可取 r 充分小, 使得 $z + re^{i\theta} b - \epsilon_j \zeta \in V_{j+1}$, $\forall |\zeta| \leqslant 1$

于是我们有

$$
\begin{aligned}
\int_{|\zeta|\leqslant 1} I_{j+1}\left(z-\epsilon_j\zeta\right)\eta\left(z-\epsilon_j\zeta\right)\chi\left(\zeta\right)d\zeta &= \int_{|\zeta|\leqslant 1}\eta\left(z-\epsilon_j\zeta\right)\chi\left(\zeta\right)d\zeta \\
&\leqslant \int_{|\zeta|\leqslant 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\eta\left(z-\epsilon_j\zeta+re^{i\theta}b\right)d\theta\chi\left(\zeta\right)d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{|\zeta|\leqslant 1}\eta\left(z+re^{i\theta}b-\epsilon_j\zeta\right)\chi\left(\zeta\right)d\zeta d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{|\zeta|\leqslant 1} I_{j+1}\left(z+re^{i\theta}b-\epsilon_j\zeta\right)\eta\left(z+re^{i\theta}b-\epsilon_j\zeta\right)\chi\left(\zeta\right)d\zeta d\theta.
\end{aligned}
$$

结合 $\epsilon_j|z|^2$ 的严格多重次调和性, 这给出了 η_j 在 V_j 上是严格多重次调和的. 对 $z\in V_j$, 我我们有

$$
\begin{aligned}
\int_{|\zeta|\leqslant 1} I_{j+1}\left(z-\epsilon_j\zeta\right)\eta\left(z-\epsilon_j\zeta\right)\chi\left(\zeta\right)d\zeta &= \int_{|\zeta|\leqslant 1}\eta\left(z-\epsilon_j\zeta\right)\chi\left(\zeta\right)d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{|\zeta|\leqslant 1}\eta\left(z-\epsilon_j\zeta\right)\chi\left(\zeta\right)d\zeta d\theta \\
&= \int_{|\zeta|\leqslant 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\eta\left(z-\epsilon_j e^{i\theta}\zeta\right)\chi\left(\zeta\right)d\theta d\zeta \\
&\geqslant \int_{|\zeta|\leqslant 1}\eta\left(z\right)\chi\left(\zeta\right)d\zeta = \eta\left(z\right).
\end{aligned}
$$

因为 η 在 $\overline{V_j}$ 一致连续, 因此我们知道

$$
\lim_{\epsilon_j\to 0^+}\sup_{V_j}|\eta_j-\eta| = 0,
$$

因此可让 ϵ_j 替换更小的正数, 使得

$$
\eta\left(z\right)\leqslant\eta_j\left(z\right)<\eta\left(z\right)+1,\ \forall z\in V_j,
$$

选取 $\psi\in C^\infty\left(\mathbb{R}\right)$, 使得

$$
\psi\left(t\right)=0, t\leqslant 0,\ \psi^{(j)}\left(t\right)>0,\ \forall t>0,\ j=0,1,2
$$

于是

$$
\Psi_0\left(z\right)=\psi\left(\eta_0\left(z\right)\right)\geqslant 0\geqslant\eta\left(z\right),\ \forall z\in V_0.
$$

如果我们能找到正数 $a_1,a_2,\cdots$, 使得对任意 $k\geqslant 0$, $\Psi_k\left(z\right)=\psi\left(\eta_0\left(z\right)\right)+\sum\limits_{j=1}^{k}a_j\psi\left(\eta_j\left(z\right)+2-j\right)$ 是 V_k

上的多重次调和函数. 对任意 $s\geqslant 3$, 我们注意到

$$\eta_{j+s}\left(z\right)+2-s-j<\eta\left(z\right)+3-s-j<3-s\leqslant 0,\ \forall z\in V_j,$$

这给出了

$$\Psi_{k+s}\left(z\right)=\Psi_{k+2}\left(z\right),\ \forall z\in V_k, s\geqslant 3,$$

由于多重次调和性, 光滑性, 不等式性都是逐点的, 因此 $\Psi\left(z\right)=\lim\limits_{k\to\infty}\Psi_k\left(z\right), z\in V$ 为所求函数.
现在归纳的构造 $a_j, j=1,2,\cdots$, 假定 $a_j, j=1,2,\cdots a_k$ 已构造完毕. 注意在 V_k 上, 已有 $\Psi_k\geqslant\eta$ 且 Ψ_k 多重次调和, 取 $a_{k+1}\geqslant\frac{k+1}{\psi(1)}$, 那么我们有

$$a_{k+1}\geqslant\frac{k+1}{\psi\left(1\right)}\geqslant\frac{\eta}{\psi\left(\eta_{k+1}\left(z\right)+1-k\right)},\ \forall z\in V_{k+1}/V_k,$$

此时

$$\Psi_{k+1}\left(z\right)\geqslant\eta\left(z\right), \forall z\in V_{k+1}.$$

对 $z\in V_{k+1}/V_k$,

$$\begin{aligned}
&\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\frac{\partial^2\psi\left(\eta_{k+1}\left(z\right)+1-k\right)}{\partial z_i\partial\overline{z_j}}w_i\overline{w_j}\\
&=\psi''\left(\eta_{k+1}+1-k\right)\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\eta_{k+1}}{\partial z_i}w_i\right|^2+\psi'\left(\eta_{k+1}+1-k\right)\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\frac{\partial^2\eta_{k+1}}{\partial z_i\partial\overline{z_j}}w_i\overline{w_j}\\
&\geqslant\epsilon_{k+1}\psi'\left(1\right)>0.
\end{aligned}$$

可取

$$a_{k+1}\geqslant-\frac{\inf\limits_{z\in V_{k+1}/V_k,|w|=1}\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}\frac{\partial^2\Psi_k(z)}{\partial z_i\partial\overline{z_j}}w_i\overline{w_j}}{\epsilon_{k+1}\psi'\left(1\right)},$$

此时我们就有

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\frac{\partial^2\Psi_{k+1}\left(z\right)}{\partial z_i\partial\overline{z_j}}w_i\overline{w_j}\geqslant 0,\ \forall\left|w\right|=1, z\in V_k.$$

这给出了 ψ_{k+1} 在 V_{k+1} 多重次调和.
我们完成了证明.

Problem 300

设定义在 $A\times B$ 的实值函数 $f(x,y)$, 证明

$$\inf_{x\in A,y\in B} f\left(x,y\right)=\inf_{y\in B}\inf_{x\in A} f\left(x,y\right)=\inf_{x\in A}\inf_{y\in B} f\left(x,y\right)$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 首先有

$$\inf_{x\in A,y\in B} f\left(x,y\right)\leqslant\inf_{x\in A} f\left(x,y\right),\ \forall y\in B,$$

因此

$$\inf_{x\in A,y\in B} f\left(x,y\right)\leqslant\inf_{y\in B}\inf_{x\in A} f\left(x,y\right).$$

$\forall\epsilon>0$, 我们可以找到 $x_0\in A, y_0\in B$, 使得 $f\left(x_0,y_0\right)\leqslant\inf_{x\in A,y\in B} f\left(x,y\right)-\epsilon$, 另外一方面

$$f\left(x_0,y_0\right)\geqslant\inf_{x\in A} f\left(x,y_0\right)\geqslant\inf_{y\in B}\inf_{x\in A} f\left(x,y\right),$$

我们完成了证明.

Problem 301

$D\subset\mathbb{R}^n$ 是一具有 C^1 边界的区域, 即满足对每一个 $x_0\in\partial D$, 存在连通开邻域 $U(x_0)$ 和 $f(x)\in C^1(U(x_0))$ 使得

- $df(x)\triangleq\left(f'_{x_1}(x),f'_{x_2}(x),\cdots,f'_{x_n}(x)\right)\neq 0,\ \forall x\in U(x_0)$,
- $D\bigcap U(x_0)=\{x\in U(x_0):f(x)<0\}$.

我们称 f 为 D 在 $x_0\in\partial D$ 的邻域 $U(x_0)$ 上的 C^1 定义函数.

假若还有 g 为 D 在 $x_0\in\partial D$ 的邻域 $U(x_0)$ 上的 C^1 定义函数, 那么存在 x_0 的连通开邻域 $V(x_0)\subset U(x_0)$ 和正值函数 $h\in C(V(x_0))$, 使得

- $f(x)=h(x)g(x),\ \forall x\in V(x_0)$,
- $df(x)=h(x)dg(x),x\in\partial D\bigcap V(x_0)$.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学)

注意我们只需具体给出一个 g, 让任何 f 与 g 比较都产生一个 h 即可. 我们先证明一个引理：

如果 $\varphi,\psi=x_1$ 是区域 D 在 $0\in\partial D$ 的球形开邻域 B_r 上的 C^1 定义函数, 则存在正值函数 $\eta\in C(B_r)$, 使得 $\varphi(x)=\eta(x)\psi(x),\forall x\in B_r$.

事实上,

$$\eta(x)\triangleq\frac{\varphi(x)}{x_1}=\frac{\varphi(x)-\varphi(0,x_2,\cdots,x_n)}{x_1}=\int_0^1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(tx_1,x_2,\cdots,x_n)\,dt\in C(B_r),$$

为所求, 且在 B_r 内的 $x_1=0$ 上, 我们有

$$\eta(0,x_2,\cdots,x_n)\,d\psi=(\eta(0,x_2,\cdots,x_n),0,0,\cdots,0)=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(0,x_2,\cdots,x_n),0,\cdots,0\right)=d\varphi.$$

回到原命题, 不妨设 $\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_0)\neq 0,\ x_0=0$, 由隐函数定理和连续性, 存在 x_0 的连通开邻域 $V(x_0)\subset U(x_0)$ 和某个 0 的球形开邻域 B_r 满足

- $\{x\in V(x_0):x_1=\sigma(x_2,x_3,\cdots,x_n)\}=V(x_0)\bigcap\partial D$,
- $\{x\in V(x_0):x_1<\sigma(x_2,x_3,\cdots,x_n)\}=V(x_0)\bigcap D$,
- $\Phi:(x_1,x_2,\cdots,x_n)\to(x_1-\sigma(x_2,x_3,\cdots,x_n),x_2,\cdots,x_n)$ 是 $V(x_0)\to B_r$ 微分同胚.

现在对任何一个定义函数 f, 因为 $f\left(\Phi^{-1}\left(x\right)\right)$ 是区域 $\Phi\left(V\left(x_0\right)\bigcap D\right)$ 在 $0\in\Phi\left(V\left(x_0\right)\bigcap\partial D\right)=\partial\left(\Phi\left(V\left(x_0\right)\bigcap D\right)\right)$ 的球形开邻域 B_r 上的 C^1 定义函数, 因此根据引理，存在正值函数 $\eta\in C\left(B_r\right)$, 满足

- $f\left(\Phi^{-1}\left(x\right)\right)=\eta\left(x\right)x_1,\ \forall x\in B_r,$
- $df\left(\Phi^{-1}\left(x\right)\right)=\eta\left(x\right)dx_1,\ \forall x\in\Phi\left(V\left(x_0\right)\bigcap\partial D\right).$

因此
$$\frac{\partial f\left(\Phi^{-1}\left(x\right)\right)}{\partial x_1}=\eta\left(x\right),\frac{\partial f\left(\Phi^{-1}\left(x\right)\right)}{\partial x_j}=0,j\geqslant 2,\ \forall x\in\Phi\left(V\left(x_0\right)\bigcap\partial D\right),$$
恰好就是
$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=\eta\left(\Phi\right),\frac{\partial f}{\partial x_j}=-\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial\sigma}{\partial x_j}=-\eta\left(\Phi\right)\frac{\partial\sigma}{\partial x_j},j\geqslant 2.$$
于是我们有

- $f\left(x\right)=\eta\left(\Phi\left(x\right)\right)\left(x_1-\sigma\left(x_2,\cdots,x_n\right)\right),x\in V\left(x_0\right)\bigcap D,$
- $df\left(x\right)=\eta\left(\Phi\left(x\right)\right)\left(1,-\frac{\partial\sigma}{\partial x_2},\cdots,-\frac{\partial\sigma}{\partial x_n}\right)=\eta\left(\Phi\left(x\right)\right)d\left(x_1-\sigma\left(x_2,\cdots,x_n\right)\right),\ \forall x\in V\left(x_0\right)\bigcap\partial D.$

$h=\eta\left(\Phi\right)$ 即为所求.

Problem 302

设 $f(x) \in R[a,b]$, 证明：对任意 $\varepsilon > 0$, 我们可以找到 $g(x), h(x) \in C[a,b]$, 使得：

- $h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x), \forall x \in [a,b]$,
- $\int_a^b g(x)\,dx - \varepsilon \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b h(x)\,dx + \varepsilon$,

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 无妨设 $a = 0, b = 1$, 对任意 $\varepsilon, c > 0$, 无妨设 $\varepsilon \in (0,1)$, 现在存在一组划分 $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = 1$, 使得 $\sum\limits_{i=1}^{n} w_i \Delta x_i < \varepsilon$, 这里

$$\Delta x_i \triangleq x_i - x_{i-1}, w_i \triangleq M_i - m_i, M_i \triangleq \sup_{[x_{i-1},x_i]} |f|, m_i \triangleq \inf_{[x_{i-1},x_i]} |f|, i = 1, 2, \cdots, n.$$

我们仅构造 g, h 是类似的.

对于

Problem 303

$f(x) \in C^2[a,b]$, $f(a)=f(b)$, 证明

$$\int_a^b |f'(x)|\,dx \leqslant (b-a)\int_a^b |f''(x)|\,dx.$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 因为 $f(a)=f(b)=0$, 选取

$$|f'(\theta)| = \min_{x\in[a,b]} |f'(x)| = 0.$$

于是我们有

$$|f'(x)| \leqslant |f'(x)-f'(\theta)| \leqslant \left|\int_\theta^x |f''(y)|\,dy\right| \leqslant \int_a^b |f''(y)|\,dy.$$

两边积分即有

$$\int_a^b |f'(x)|\,dx \leqslant (b-a)\int_a^b |f''(x)|\,dx.$$

Problem 304

计算

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x\left|\cos t^2\right|dt.$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学)

我们有

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x\left|\cos t^2\right|dt &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}\int_0^{x^2}\frac{1}{\sqrt{t}}\left|\cos t\right|dt \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{u}}\left|\cos\left(x^2u\right)\right|dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{u}}du\int_0^{\pi}\left|\cos u\right|du = \frac{2}{\pi}
\end{aligned} \tag{129}$$

Problem 305

设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (0,+\infty)$, 满足 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, 计算

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}+a_n\right).$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 一方面

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}+a_n\right) &\leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} \ln\left(\frac{x}{n}+a_n\right) dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int_{1}^{n+1} \ln\left(\frac{x}{n}+a_n\right) dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{1+\frac{1}{n}} \ln\left(x+a_n\right) dx \\ &= \lim_{n\to\infty} -1+\left(a_n+1+\frac{1}{n}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}+a_n\right)+\left(a_n+\frac{1}{n}\right)\ln\left(a_n+\frac{1}{n}\right) = -1,\end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}+a_n\right) &\geqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} \ln\left(\frac{x}{n}+a_n\right) dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int_{0}^{n} \ln\left(\frac{x}{n}+a_n\right) dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{0}^{1} \ln\left(x+a_n\right) dx \\ &= \int_{0}^{1} \ln x dx = -1.\end{aligned}$$

因此我们证明了

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}+a_n\right) = -1.$$

Problem 306

证明

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{1}{i+j}-(2n+1)\ln 2+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)=-\frac{1}{2}.$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 我们证明更强的结果, 显然

$$\begin{aligned}
x_n &= \sum_{i,j=1}^{n}\frac{1}{i+j}\\
&= -2\left(n+1\right)\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}+(2n+1)\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{k}+1\\
&= 2\ln 2\cdot n-\ln n-\gamma-\frac{1}{2}+\ln 2-\frac{5}{8n}+\frac{7}{48n^2}-\frac{1}{64n^3}-\frac{31}{1920n^4}+\frac{1}{128n^5}+O\left(\frac{1}{n^6}\right).
\end{aligned}$$

显然有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{1}{i+j}-(2n+1)\ln 2+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)=-\frac{1}{2}.$$

Problem 307

设有界函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 有原函数, 且 $g(x) \in C[a,b]$, 证明 $f(x)g(x)$ 有原函数.

Proof. (By 清疏竞赛数学) 设 $F(x) \in D[a,b]$, 使得 $F'(x) = f(x)$, 因此 $f(x)$ 有界的, 所以 F 绝对连续, 所以 $F(x) = (L)\int_a^x f(y)\,dy + F(a)$, 令

$$H(x) \triangleq (L)\int_a^x g(y) f(y)\,dy,$$

于是我们有 (不妨设 $h>0$)

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\left|\frac{H(x+h)-H(x)}{h} - f(x)g(x)\right| &= \lim_{h\to 0}\left|\frac{1}{h}(L)\int_x^{x+h}[g(y)-g(x)]f(y)\,dy\right| \\ &\leqslant \lim_{h\to 0}\frac{\sup\limits_{y\in[x,x+h]}|g(y)-g(x)|}{|h|}\int_x^{x+h}|f(y)|\,dy \\ &\leqslant \sup_{z\in[a,b]}|f(z)| \cdot \lim_{h\to 0}\sup_{y\in[x,x+h]}|g(y)-g(x)| = 0.\end{aligned}$$

因此 $H'(x) = f(x)g(x)$, 我们完成了证明.

Problem 308

设 $x_1, x_2, \cdots$ 依次为方程 $2020\tan x = 2021x$ 的所有正根, 试计算

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n^2}.$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 考虑整函数

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} - \frac{2021}{2020} \cdot \cos z,\ z \in \mathbb{C}.$$

我们需要严格研究其零点分布 (事实上绝大部分解答都没有这个至关重要的环节).

当 $\cos(2x) + \cosh(2y), x^2 + y^2 \neq 0$, 即 $x + iy \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{N},\ x + iy \neq 0$, 我们有

$$\frac{\tan(x+iy)}{x+iy} = \frac{x\sin(2x) + y\sinh(2y)}{(x^2+y^2)(\cos(2x)+\cosh(2y))} + i\frac{x\sinh(2y) - y\sin(2x)}{(x^2+y^2)(\cos(2x)+\cosh(2y))},$$

现在考虑

$$\frac{x\sin(2x) + y\sinh(2y)}{(x^2+y^2)(\cos(2x)+\cosh(2y))} + i\frac{x\sinh(2y) - y\sin(2x)}{(x^2+y^2)(\cos(2x)+\cosh(2y))} = \frac{2021}{2020},$$

即

$$\frac{x\sin(2x) + y\sinh(2y)}{(x^2+y^2)(\cos(2x)+\cosh(2y))} = \frac{2021}{2020},\ x\sinh(2y) = y\sin(2x),$$

因此由 $2 \geqslant \frac{\sin(2x)}{x} = \frac{\sinh(2y)}{y} \geqslant 2$, 我们知道只能有 $x = y = 0$.

如果 $x = 0, y \neq 0$, 我们有 $\frac{\sinh(2y)}{y(1+\cosh(2y))} = \frac{2021}{2020}$, 初等数学知 $\frac{\sinh(2y)}{y(1+\cosh(2y))} \leqslant 1, \forall y \in \mathbb{R}$, 所以这种情况不可能发生, 因此 $f(z)$ 只有实根.

这样我们就容易知道 $f(z)$ 只有实根, 且根关于原点对称分布, 我们还要研究根的重数, 事实上考虑 $f'(x) = f(x) = 0, x \in \mathbb{R}$, 由高中数学, 容易发现这个方程只有唯一的 $x = 0$ 解, 又 $f'''(0) \neq 0$, 所以 0 是二重根, 其余根都是一重的.

为了使用复分析中的无穷积展开, 我们还要验证 $f(z)$ 的确满足定理的使用条件, 事实上取以原点为中心的正方形围道, 其边长为 $(2n-1)\pi, n \in \mathbb{N}_+$, 我们将证明在这上面, $\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|$ 是有与 n 无关的上界, 事实上

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| &= \left|\frac{(2020 - 2021z^2)\sin z - 2020z\cos z}{z(2021z\cos z - 2020\sin z)}\right| \\
&\leqslant \left|\frac{(2020 - 2021z^2)\sin z}{z(2021z\cos z - 2020\sin z)}\right| + \left|\frac{2020\cos z}{2021z\cos z - 2020\sin z}\right| \\
&\leqslant \left|\frac{\sin z}{z}\right|\left|\frac{2020 - 2021z^2}{2021z\cos z - 2020\sin z}\right| + \left|\frac{2020}{2021z - 2020\tan z}\right|.
\end{aligned}$$

Problem 309

计算

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k+1}}.$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 如果我们证明了

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k}}\left(\frac{1}{\sqrt{n-k}}-\frac{1}{\sqrt{n-k+1}}\right)=0,$$

那么

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k+1}}&=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n}}+\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n-1}\left[\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)}}-\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}}-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{k}{n}}}\right]+\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=2}^{n-1}\left[\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{n-k}}\right]\\&=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}-\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{1-x}}dx+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=2}^{n-1}\left[\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{n-k}}\right]\\&=\pi-4+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n}}\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k}}=\pi.\end{aligned}$$

最后一个等号来自 Stolz 定理.

现在, 我们有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k}}\left(\frac{1}{\sqrt{n-k}}-\frac{1}{\sqrt{n-k+1}}\right)&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{\sqrt{n-k}}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{\sqrt{n-k}}\frac{1}{\left(\sqrt{k}+\sqrt{k+1}\right)\sqrt{k}\sqrt{k+1}}\\&\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{1\leqslant k<\frac{n}{2}}\frac{1}{\sqrt{n-k}}\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}+\lim_{n\to\infty}\sum_{\frac{n}{2}\leqslant k\leqslant n-2}\frac{1}{\sqrt{n-k}}\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}\\&\leqslant\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2}{n}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}+\lim_{n\to\infty}\frac{2^{\frac{3}{2}}}{n^{\frac{3}{2}}}\sum_{1\leqslant k\leqslant n-1}\frac{1}{\sqrt{n-k}}\\&\leqslant\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2}{n}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}+\lim_{n\to\infty}\frac{2^{\frac{3}{2}}}{n^{\frac{3}{2}}}\sum_{1\leqslant k\leqslant n-1}\frac{1}{\sqrt{k}}=0,\end{aligned}$$

最后一个不等号来自于 Stolz 定理, 我们完成了计算.

Problem 310

设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n^{p-1}}<\infty$, $p>1$, 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^p p_n}{S_n^p}<\infty,$$

这里 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}p_k$.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 约定 $S_0=0$, 我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}\frac{n^p p_n}{S_n^p}&=\sum_{n=1}^{N}\frac{n^p\left(S_n-S_{n-1}\right)}{S_n^p}\\
&=c+\sum_{n=2}^{N}n^p\int_{S_{n-1}}^{S_n}\frac{1}{S_n^p}dx\\
&\leqslant c+\sum_{n=2}^{N}n^p\int_{S_{n-1}}^{S_n}\frac{1}{x^p}dx\\
&=c+\frac{1}{p-1}\sum_{n=2}^{N}n^p\left(\frac{1}{S_{n-1}^{p-1}}-\frac{1}{S_n^{p-1}}\right)\\
&=c+\frac{1}{p-1}\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{n^p}{S_{n-1}^{p-1}}-\frac{(n+1)^p}{S_n^{p-1}}\right)+\frac{1}{p-1}\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{(n+1)^p-n^p}{S_n^{p-1}}\right)\\
&\leqslant c_2+\frac{1}{p-1}\sum_{n=2}^{N}n^p\left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^p-1}{S_n^{p-1}}\right)\\
&\leqslant c_2+c_3\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{n}{S_n}\right)^{p-1}\\
&=c_2+c_3\sum_{n=2}^{N}\frac{n^{p-1}p_n^{\frac{p-1}{p}}}{S_n^{p-1}}\frac{1}{p_n^{\frac{p-1}{p}}}\\
&\leqslant c_2+c_3\Big(\sum_{n=2}^{N}\frac{n^p p_n}{S_n^p}\Big)^{1-\frac{1}{p}}\Big(\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{p_n^{p-1}}\Big)^{\frac{1}{p}}\\
&\leqslant c_2+c_4\Big(\sum_{n=2}^{N}\frac{n^p p_n}{S_n^p}\Big)^{1-\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

注意到不等式

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{n^p p_n}{S_n^p}\leqslant c_2+c_4\Big(\sum_{n=2}^{N}\frac{n^p p_n}{S_n^p}\Big)^{1-\frac{1}{p}},$$

左边的阶大于右边的阶, 所以这只能有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^p p_n}{S_n^p}<\infty$, 我们完成了证明.

Problem 311

设 $x\in(0,1)$,

- 寻求 $\sqrt[j]{\sum\limits_{m=0}^{\infty} m^j x^m}$, $j\to+\infty$ 等价无穷大.
- 寻求 $\sqrt[j]{\sum\limits_{m=0}^{\infty} (m+j)^j x^m}$, $j\to+\infty$ 等价量

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 先来看第一个.

注意到函数 y^jx^y 在 $y\geqslant\frac{j}{|\ln x|}$ 递减, $0\leqslant y\leqslant\frac{j}{|\ln x|}$ 递增, 因此

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{\infty} m^jx^m &= \sum_{m=0}^{\left[\frac{j}{|\ln x|}\right]} m^jx^m+\sum_{m=\left[\frac{j}{|\ln x|}\right]+1}^{\infty} m^jx^m\\
&\geqslant \sum_{m=0}^{\left[\frac{j}{|\ln x|}\right]} m^jx^m+\sum_{m=\left[\frac{j}{|\ln x|}\right]+1}^{\infty} \int_m^{m+1} y^jx^y dy\\
&\geqslant \frac{j!}{|\ln x|^{j+1}}+\sum_{m=1}^{\left[\frac{j}{|\ln x|}\right]}\int_{m-1}^{m} y^jx^y dy-\int_0^{\left[\frac{j}{|\ln x|}\right]+1} y^jx^y dy\\
&= \frac{j!}{|\ln x|^{j+1}}-\int_{\left[\frac{j}{|\ln x|}\right]}^{\left[\frac{j}{|\ln x|}\right]+1} y^jx^y dy\\
&= \frac{j!}{|\ln x|^{j+1}}-\left(1+\frac{j}{|\ln x|}\right)^j x^{\left[\frac{j}{|\ln x|}\right]}\int_0^1 x^y dy\\
&= \frac{j!}{|\ln x|^{j+1}}-\left(1+\frac{j}{|\ln x|}\right)^j x^{\left[\frac{j}{|\ln x|}\right]}\frac{1-x}{|\ln x|}\\
&\geqslant \frac{j!}{|\ln x|^{j+1}}-\frac{j^j}{|\ln x|^j}x^{\left[\frac{j}{|\ln x|}\right]}\frac{1-x}{x\,|\ln x|}\\
&\geqslant \frac{j!}{|\ln x|^{j+1}}-\frac{j^j}{|\ln x|^j}x^{\frac{j}{|\ln x|}}\frac{1-x}{x^2\,|\ln x|}\\
&= \frac{j!}{|\ln x|^{j+1}}-\frac{j^j}{|\ln x|^j}e^{-j}\frac{1-x}{x^2\,|\ln x|}.
\end{aligned}$$

于是我们有

$$\begin{aligned}
\sqrt[j]{\frac{1}{j^j}\sum_{m=0}^{\infty} m^jx^m} &\geqslant \sqrt[j]{\frac{j!}{|\ln x|^{j+1}j^j}}\sqrt[j]{1-\frac{j^j}{j!e^j}\frac{1-x}{x^2\,|\ln x|}}\\
&= \sqrt[j]{\frac{j!}{|\ln x|^{j+1}j^j}}\sqrt[j]{1-O\left(\frac{1}{\sqrt{j}}\right)}\\
&= \frac{1}{e\,|\ln x|}+o\left(1\right).
\end{aligned}$$

反之

$$
\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{\infty} m^j x^m &= \left[\frac{j}{|\ln x|}\right]^j x^{\left[\frac{j}{|\ln x|}\right]} + \left(1+\left[\frac{j}{|\ln x|}\right]\right)^j x^{\left[\frac{j}{|\ln x|}\right]+1} + \sum_{m=0}^{\left[\frac{j}{|\ln x|}\right]-1} m^j x^m + \sum_{m=\left[\frac{j}{|\ln x|}\right]+2}^{\infty} m^j x^m \\
&\leqslant \left[\frac{j}{|\ln x|}\right]^j x^{\left[\frac{j}{|\ln x|}\right]} + \left(1+\left[\frac{j}{|\ln x|}\right]\right)^j x^{\left[\frac{j}{|\ln x|}\right]+1} + \sum_{m=0}^{\left[\frac{j}{|\ln x|}\right]-1} \int_m^{m+1} y^j x^y dy + \sum_{m=\left[\frac{j}{|\ln x|}\right]+2}^{\infty} \int_{m-1}^{m} y^j x^y dy \\
&= \left[\frac{j}{|\ln x|}\right]^j x^{\left[\frac{j}{|\ln x|}\right]} + \left(1+\left[\frac{j}{|\ln x|}\right]\right)^j x^{\left[\frac{j}{|\ln x|}\right]+1} + \int_0^{\left[\frac{j}{|\ln x|}\right]} y^j x^y dy + \int_{\left[\frac{j}{|\ln x|}\right]+1}^{\infty} y^j x^y dy \\
&= \left[\frac{j}{|\ln x|}\right]^j x^{\left[\frac{j}{|\ln x|}\right]} + \left(1+\left[\frac{j}{|\ln x|}\right]\right)^j x^{\left[\frac{j}{|\ln x|}\right]+1} + \frac{j!}{|\ln x|^{j+1}} - \int_{\left[\frac{j}{|\ln x|}\right]}^{\left[\frac{j}{|\ln x|}\right]+1} y^j x^y dy \\
&\leqslant \frac{j^j}{x\,|\ln x|^j} x^{\frac{j}{|\ln x|}} + \left(1+\frac{j}{|\ln x|}\right)^j x^{\frac{j}{|\ln x|}} + \frac{j!}{|\ln x|^{j+1}} \\
&\leqslant \frac{j^j e^{-j}}{x\,|\ln x|^j} + \frac{j^j e^{-j}}{x\,|\ln x|^j} + \frac{j!}{|\ln x|^{j+1}} \\
&= \frac{2j^j e^{-j}}{x\,|\ln x|^j} + \frac{j!}{|\ln x|^{j+1}}.
\end{aligned}
$$

于是我们有

$$
\begin{aligned}
\sqrt[j]{\frac{1}{j^j}\sum_{m=0}^{\infty} m^j x^m} &\leqslant \sqrt[j]{\frac{2e^{-j}}{x\,|\ln x|^j} + \frac{j!}{j^j\,|\ln x|^{j+1}}} \\
&= \sqrt[j]{\frac{j!}{j^j\,|\ln x|^{j+1}}}\sqrt[j]{2\frac{j^j e^{-j}\,|\ln x|}{j!x}+1} \\
&= \sqrt[j]{\frac{j!}{j^j\,|\ln x|^{j+1}}}\sqrt[j]{1+O\left(\frac{1}{\sqrt{j}}\right)} \\
&= \frac{1}{e\,|\ln x|} + o(1).
\end{aligned}
$$

因此我们证明了

$$
\sqrt[j]{\sum_{m=0}^{\infty} m^j x^m !} \sim \frac{j}{e\,|\ln x|}, j \to \infty.
$$

再来看第二个, 事实上 $(y+j)^j x^y$ 在 $y \geqslant \frac{j}{|\ln x|} - j$ 递减, 在 $0 \leqslant y \leqslant \frac{j}{|\ln x|} - j$ 递增, 于是当 $x \in (0, \frac{1}{e}], 0 < \frac{1}{|\ln x|} \leqslant 1$, 我们有

$$
\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{\infty} (m+j)^j x^m &\leqslant j^j + \sum_{m=1}^{\infty} \int_{m-1}^{m} (y+j)^j x^y dy \\
&\leqslant j^j + x^{-j}\int_0^{\infty} y^j x^y dy - j^{j+1} \qquad (130) \\
&\leqslant \frac{j!}{x^j\,|\ln x|^{j+1}}
\end{aligned}
$$

当 $x\in(\frac{1}{e},1)$, $\frac{1}{|\ln x|}\geqslant 1$

$$
\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{\infty}(m+j)^j x^m \leqslant & \left[\frac{j}{|\ln x|}\right]^j x^{\left[\frac{j}{|\ln x|}-j\right]}+\left(1+\left[\frac{j}{|\ln x|}\right]\right)^j x^{\left[\frac{j}{|\ln x|}-j\right]+1}\\
&+\sum_{m=0}^{\left[\frac{j}{|\ln x|}-j\right]-1}\int_m^{m+1}(y+j)^j x^y dy+\sum_{m=\left[\frac{j}{|\ln x|}-j\right]+2}^{\infty}\int_{m-1}^{m}(y+j)^j x^y dy\\
&\leqslant \left(\frac{j}{|\ln x|}\right)^j x^{\frac{j}{|\ln x|}-j-1}+\left(1+\frac{j}{|\ln x|}\right)^j x^{\frac{j}{|\ln x|}-j}\\
&+\int_0^{\left[\frac{j}{|\ln x|}-j\right]}(y+j)^j x^y dy+\int_{\left[\frac{j}{|\ln x|}-j\right]+1}^{\infty}(y+j)^j x^y dy\\
&\leqslant \frac{2}{x^{j+1}}\left(\frac{j}{e|\ln x|}\right)^j+\int_0^{\infty}(y+j)^j x^y dy-\int_{\left[\frac{j}{|\ln x|}-j\right]}^{\left[\frac{j}{|\ln x|}-j\right]+1}(y+j)^j x^y dy\\
&= \frac{2}{x^{j+1}}\left(\frac{j}{e|\ln x|}\right)^j+x^{-j}\int_j^{\infty}y^j x^y dy-x^{-j}\int_{\left[\frac{j}{|\ln x|}\right]}^{\left[\frac{j}{|\ln x|}\right]+1}y^j x^y dy\\
&= \frac{2}{x^{j+1}}\left(\frac{j}{e|\ln x|}\right)^j+\frac{j!}{x^j|\ln x|^{j+1}}-x^{-j}\int_0^j y^j x^y dy-x^{-j}\int_{\left[\frac{j}{|\ln x|}\right]}^{\left[\frac{j}{|\ln x|}\right]+1}y^j x^y dy\\
&\leqslant \frac{2}{x^{j+1}}\left(\frac{j}{e|\ln x|}\right)^j+\frac{j!}{x^j|\ln x|^{j+1}}-x^{-j}\int_0^j y^j x^y dy-\left[\frac{j}{|\ln x|}\right]^j x^{\left[\frac{j}{|\ln x|}-j\right]+1}\\
&\leqslant \frac{2}{x^{j+1}}\left(\frac{j}{e|\ln x|}\right)^j+\frac{j!}{x^j|\ln x|^{j+1}}-x^{-j}\int_0^j y^j x^y dy-\left(1-\frac{|\ln x|}{j}\right)^j\frac{j^j}{e^j x^{j-1}|\ln x|^j}\\
&= \frac{2}{x^{j+1}}\left(\frac{j}{e|\ln x|}\right)^j+\frac{j!}{x^j|\ln x|^{j+1}}-\frac{1}{x^j|\ln x|^{j+1}}\int_0^{j|\ln x|}y^j e^{-y}dy-\left(1-\frac{|\ln x|}{j}\right)^j\frac{j^j}{e^j x^{j-1}|\ln x|^j}\\
&\leqslant \frac{j!}{x^j|\ln x|^{j+1}}\cdot\left(1+\frac{2|\ln x|\,j^j}{x\cdot j!}\right).
\end{aligned}
$$

Problem 312

设 $g''(x) \in R[a,b]$, 且 $g(x)$ 不是一次函数, 证明

- $\int_a^b |g''(x)|\,dx > 0$,
- $\left|\frac{g(b)-g(a)}{b-a} - g'(a)\right| < \int_a^b |g''(x)|\,dx$,
- $\left|\frac{g(b)-g(a)}{b-a} - g'(b)\right| < \int_a^b |g''(x)|\,dx$.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 对于第一个要证的, 事实上, 因为 $g''(x) \in R[a,b]$, 因此 g' 绝对连续, 若 $\int_a^b |g''(x)|\,dx = 0$, 我们知道 $g''(x) = 0,\ a.e$, 这给出了

$$g'(x) = g'(a) + (L)\int_a^x g''(y)\,dy = g'(a)\,,\ \forall x \in [a,b]\,,$$

这和 $g(x)$ 不是线性函数矛盾.

对于第二个要证的, 令

$$h(x) = g(x) - \frac{g(b)-g(a)}{b-a}(x-a) - g(a) \in D^2[a,b]\,,$$

只需证明 $|h'(a)| < \int_a^b |h''(x)|\,dx$, 设 $s = \inf\{x \in [a,b] : h'(x) = 0\}$, 由罗尔中值定理, 我们知道 s 是有意义的, 于是我们有

$$|h'(a)| \leqslant |h'(a) - h'(s)| \leqslant \int_a^s |h''(x)|\,dx \leqslant \int_a^b |h''(x)|\,dx.$$

如果 $|h'(a)| = \int_a^b |h''(x)|\,dx$, 无妨设 $h'(a) > 0$, 这暗示

$$\int_a^s [|h''(x)| + h''(x)]dx = \int_a^s |h''(x)|\,dx - h'(a) = 0,\ \int_s^b |h''(x)|\,dx = 0$$

因此 $|h''(x)| + h''(x) = 0,\ a.e$于 $[a,s]$, $h''(x) = 0,\ a.e$于$[s,b]$, 这给出了 $h''(x) \leqslant 0,\ a.e$于$[a,b]$, 因此

$$h'(x) = h'(y) + \int_y^x h''(x)\,dx \leqslant h'(y)\,, \forall x \geqslant y,$$

即 $h'(x)$ 递减, 故 $h(x)$ 上凸, 又在 $[s,b]$ 上, $h(x)$ 是直线, 因此 $h'(s) = h(b) = 0$, 故 $h(x) = 0,\ x \in [s,b]$, 显然 (读者可以作图) 这只能有 $h(x) = 0,\ x \in [a,b]$, 这和 f 不是直线矛盾!

因此 $|h'(a)| < \int_a^b |h''(x)|\,dx$, 第三个论点是类似的, 因此我们完成了证明.

Problem 313

设 $\{f_k\}_{k=1}^n$ 是一族非负连续上凸函数, 证明 :

对每一组 $\{p_k\}_{k=1}^n \subset (0,+\infty)$, 有不等式

$$\int_0^1 \prod_{k=1}^n f_k^{p_k}(x)\,dx \leqslant \frac{(1+p_1)(1+p_2)\cdots(1+p_n)}{1+p_1+p_2+\cdots+p_n} \prod_{k=1}^n \int_0^1 f_k^{p_k}(x)\,dx.$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 显然, 本题有区间 $[a,b]$ 上的版本

$$\int_a^b \prod_{k=1}^n f_k^{p_k}(x)\,dx \leqslant \frac{(1+p_1)(1+p_2)\cdots(1+p_n)}{(1+p_1+p_2+\cdots+p_n)(b-a)^{n-1}} \prod_{k=1}^n \int_a^b f_k^{p_k}(x)\,dx.$$

若我们对非负的上凸函数 $f_k \in C^2[a,b]$ 证明了此不等式, 我们来证明, 对一般的满足条件的 f_k, 不等式也成立.

事实上取

$$\chi(t) \triangleq \begin{cases} \frac{1}{\int_{-1}^1 e^{-\frac{1}{1-t^2}}\,dt} e^{-\frac{1}{1-t^2}}, & |t| \leqslant 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}.$$

把所有 f_k 保持上凸的延拓至 $\mathbb{R}$.

对充分小的 $\epsilon \in (0,1)$, 考虑

$$f_{k,\epsilon}(x) \triangleq \frac{1}{\epsilon}\int_{-\infty}^{\infty} f_k(t)\,\chi\left(\frac{x-t}{\epsilon}\right) dt \in C^\infty(\mathbb{R}),$$

我们有

$$\begin{aligned}\frac{f_{k,\epsilon}(x)+f_{k,\epsilon}(y)}{2} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_k(x-\epsilon t)+f_k(y-\epsilon t)}{2}\chi(t)\,dt \\ &\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} f_k\left(\frac{x+y}{2}-\epsilon t\right)\chi(t)\,dt = f_{k,\epsilon}\left(\frac{x+y}{2}\right),\end{aligned}$$

已有 $f_{k,\epsilon}$ 连续, 这已经说明了 $f_{k,\epsilon}$ 是上凸函数, 当 $x \in [a+\epsilon, b-\epsilon]$, 我们有 $\{t\in\mathbb{R} : |t-x| \leqslant \epsilon\} \subset [a,b]$, 这给出了 $f_{k,\epsilon}(x) \geqslant 0,\ x \in [a+\epsilon, b-\epsilon]$, 因此我们有

$$\int_{a+\epsilon}^{b-\epsilon} \prod_{k=1}^n f_{k,\epsilon}^{p_k}(x)\,dx \leqslant \frac{(1+p_1)(1+p_2)\cdots(1+p_n)}{(1+p_1+p_2+\cdots+p_n)(b-a-2\epsilon)^{n-1}} \prod_{k=1}^n \int_{a+\epsilon}^{b-\epsilon} f_{k,\epsilon}^{p_k}(x)\,dx.$$

又

$$|f_{k,\epsilon}(x)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f_k(x-\epsilon t)|\,|\chi(t)|\,dt \leqslant \sup_{[a-1,b+1]}|f| \int_{-\infty}^{\infty}\chi(t)\,dt = \sup_{[a-1,b+1]}|f|,\ \forall x \in [a,b],$$

我们知道 $\lim\limits_{\epsilon\to0^+} f_{k,\epsilon}(x)=f_k(x),\forall x\in[0,1]$, 结合控制收敛定理, 我们有

$$\int_a^b\prod_{k=1}^n f_k^{p_k}(x)\,dx\leqslant\frac{(1+p_1)(1+p_2)\cdots(1+p_n)}{(1+p_1+p_2+\cdots+p_n)(b-a)^{n-1}}\prod_{k=1}^n\int_a^b f_k^{p_k}(x)\,dx.$$

先假定 $f_k\in C^2[0,1],f_k(1)=f_k(0)=0,k=1,2,\cdots,n$, 令

$$k(x,t)=\begin{cases}t(1-x), & 0\leqslant t\leqslant x\leqslant1\\ x(1-t), & 0\leqslant x\leqslant t\leqslant1\end{cases},$$

显然我们有

$$f_k(x)=\int_0^1(-f_k''(t))\,k(x,t)\,dt,\ \ k=1,2,\cdots,n$$

$$\int_0^1\prod_{k=1}^n f_k^{p_k}(x)\,dx=\int_0^1\prod_{k=1}^n[\int_0^1(-f_k''(t))\,k(x,t)\,dt]^{p_k}dx \tag{131}$$

.

$$\begin{aligned}\int_0^1\prod_{k=1}^n f_k^{p_k}(x)\,dx&=\int_0^1\prod_{k=1}^n[\int_0^1(-f_k''(t))\,k(x,t)\,dt]^{p_k}dx\\&\leqslant\prod_{k=1}^n[\int_0^1[\int_0^1(-f_k''(t))\,k(x,t)\,dt]^{n_kp_k}dx]^{\frac{1}{n_k}}\\&=\prod_{k=1}^n\left|\left|\int_0^1(-f''(t))\,k(x,t)\,dt\right|\right|_{L^{p_kn_k}[0,1]}^{p_k}\\&\leqslant\prod_{k=1}^n\left(\int_0^1(-f''(t))\,||k(x,t)||_{L^{p_kn_k}[0,1]}\,dt\right)^{p_k}\\&=\prod_{k=1}^n\left(\int_0^1(-f''(t))\,\frac{t(1-t)}{(n_kp_k+1)^{\frac{1}{n_kp_k}}}dt\right)^{p_k}\\&=\prod_{k=1}^n\left(\int_0^1\frac{2f(t)}{(n_kp_k+1)^{\frac{1}{n_kp_k}}}dt\right)^{p_k}\\&\leqslant\prod_{k=1}^n\frac{2^{p_k}}{(1+p_kn_k)^{\frac{1}{n_k}}}\int_0^1 f^{p_k}(t)\,dt.\end{aligned} \tag{132}$$

Problem 314

设 $\{f_k\}_{k=1}^n$ 是一族非负上凸函数, 证明：

有不等式

$$\int_0^1 \prod_{k=1}^n f_k(x)\,dx \leqslant \frac{2^n}{1+n}\prod_{k=1}^n \int_0^1 f_k(x)\,dx.$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 先假定 $f_k \in C^2[0,1]\,, f_k(1)=f_k(0)=0, k=1,2,\cdots,n,$ 令

$$k(x,t)=\begin{cases} t(1-x)\,, & 0\leqslant t\leqslant x\leqslant 1 \\ x(1-t)\,, & 0\leqslant x\leqslant t\leqslant 1 \end{cases},$$

显然我们有

$$f_k(x)=\int_0^1 (-f_k''(t))\,k(x,t)\,dt,\ \ k=1,2,\cdots,n.$$

于是利用 Holder 不等式和闵可夫斯基不等式, 我们有

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \prod_{k=1}^n f_k(x)\,dx &= \int_0^1 \prod_{k=1}^n [\int_0^1 (-f_k''(t))\,k(x,t)\,dt]dx \\
&\leqslant \prod_{k=1}^n [\int_0^1 [\int_0^1 (-f_k''(t))\,k(x,t)\,dt]^n dx]^{\frac{1}{n}} \\
&= \prod_{k=1}^n \left|\left|\int_0^1 (-f_k''(t))\,k(x,t)\,dt\right|\right|_{L^n[0,1]} \\
&\leqslant \prod_{k=1}^n \int_0^1 (-f_k''(t))\,||k(x,t)||_{L^n[0,1]}dt \\
&= \prod_{k=1}^n \int_0^1 (-f_k''(t))\,\frac{t(1-t)}{(1+n)^{\frac{1}{n}}}dt \\
&= \prod_{k=1}^n \int_0^1 \frac{2f_k(t)}{(1+n)^{\frac{1}{n}}}dt = \frac{2^n}{1+n}\prod_{k=1}^n \int_0^1 f_k(t)\,dt.
\end{aligned}$$

考虑

Problem 315

证明 : $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的光滑映射的雅可比矩阵的秩是下半连续函数.

PROOF. (*By* 清疏竞赛数学) 注意到雅可比矩阵的所有子式都是连续的, 因此对任何一个点 $a \in \mathbb{R}^n$, 存在一个 a 的邻域, 使得在 a 处所有非 0 子式都非 0, 这给出了在这个邻域内, 雅可比矩阵的秩只可能比 a 处雅可比矩阵的秩大, 因此雅可比矩阵的秩是下半连续函数.

Problem 316

设 $f(x) \in D^2[0,1]$, $\forall x \in [0,1]$, 证明存在 $\theta \in (0,1)$, 使得

$$f(x) = f(0) + f'_+(0)\,x + \frac{f''(\theta)}{2}x^2.$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 对固定的 $x \in [0,1]$, 令

$$f(x) = f(0) + f'_+(0)\,x + \frac{k}{2}x^2,$$

以及

$$F(y) = f(y) - f(0) - f'_+(0)\,y - \frac{k}{2}y^2.$$

那么有 $F(0) = 0,\ F(x) = 0,\ F'_+(0) = 0$, 由两次罗尔中值定理, 存在 $\theta \in (0,1)$, 使得 $F''(\theta) = k$, 这恰好是

$$f(x) = f(0) + f'_+(0)\,x + \frac{f''(\theta)}{2}x^2.$$

我们完成了证明.

Problem 317

设 $V\subset\mathbb{R}^n$ 是一开集, 对 $f\in C_c^1(V), g\in C^1(V)$, 证明

$$\int_V f'_{x_1}(x)\,g(x)\,dx=-\int_V f(x)\,g'_{x_1}(x)\,dx.$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 这个非常常用的事实隐含了一个并不显然的事情, 是否存在一个 C^1 曲面 $S\subset V$, 使得 S 围成的区域包含 $suppf$, 否则将无法使用高斯公式.

首先我们考虑 $g\in C_c^1(V)$, 注意到此时 $f,g\in C^1(\mathbb{R}^n)$, 这种情况下自然存在一个开球 B, 使得 $suppf\bigcup suppg\subset B$, 那么自然有

$$\int_V f'_{x_1}(x)\,g(x)\,dx=\int_B f'_{x_1}(x)\,g(x)\,dx=-\int_B f(x)\,g'_{x_1}(x)\,dx=-\int_V f(x)\,g'_{x_1}(x)\,dx.$$

一般情形我们需要截断 g, 由单位分解, 可取截断函数 $\eta\in C_c^\infty(V)$, 使得 η 在 $suppf$ 的邻域上为 1, 那么有 $\eta g\in C_c^\infty(V)$, 于是

$$\int_V f'_{x_1}\eta g dx=-\int_V f\left(\eta g'_{x_1}+\eta'_{x_1}g\right)dx,$$

因此

$$\int_V f'_{x_1}g dx=-\int_V f g'_{x_1}dx.$$

Problem 318

设 $f(x)$ 是 (a,b) 上的实解析函数, 证明 $f(x)$ 的零点是 $\mathbb{R}$ 中的孤立点.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 如果 $f(x)$ 在任何 $(c,d) \subset (a,b)$ 上不恒为 0, 那么设 $x_0 \in (a,b)$, $f(x_0)=0$, f 在 x_0 的邻域上的幂级数不能恒为 0, 因此存在 $n_{x_0} \in \mathbb{N}$, 使得

$$f^{\left(n_{x_0}\right)}(x_0) \neq 0, f^{(j)}(x_0)=0, 0 \leqslant j \leqslant n_{x_0}-1,$$

于是令 $F(x) \triangleq \frac{f(x)}{(x-x_0)^{n_{x_0}}}$, 我们有

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = F(x_0) = \frac{f^{\left(n_{x_0}\right)}(x_0)}{n_{x_0}!} \neq 0,$$

因此 $F(x) \in C(a,b)$ 且 $F(x_0) \neq 0$, 于是存在 x_0 邻域使得 $F(x) \neq 0$, 这给出了存在 x_0 邻域使得 $f(x) \neq 0$.

假定 $f(x)$ 在某个 $(c,d) \subset (a,b)$ 上恒为 0, 记

$$c_0 = \inf\left\{c \in [a,d) : f(x) \text{在} (c,d) \text{恒为} 0\right\},$$

如果 $c_0 > a$, 那么 $f^{(j)}(c_0)=0, \forall j \geqslant 0$, 即在 c_0 邻域内, $f(x)$ 展开为恒为 0 的 taylor 级数, 从而这和 c_0 的定义矛盾! 因此必有 $c_0 = a$, 故 $f(x)=0, \forall x \in (a,d)$, 类似地考虑右侧, 我们知道

$$f(x)=0, \forall x \in (a,b).$$

因此我们完成了证明.

Problem 319

设 $A, A-B^TAB$ 都是实 n 阶正定矩阵, 证明实矩阵 B 的特征值在单位圆盘内.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 设 $\alpha \neq 0 \in \mathbb{C}^n$, 使得 $B\alpha = \lambda\alpha$, 那么 $\alpha^\star B^T = \overline{\lambda}\alpha^\star$, 现在由 $A, A-B^TAB$ 的正定性, 我们有

$$\alpha^\star A\alpha > 0,\ \alpha^\star\left(A-B^TAB\right)\alpha = \alpha^\star A\alpha - |\lambda|^2\alpha^\star A\alpha = \left(1-|\lambda|^2\right)\alpha^\star A\alpha > 0,$$

因此 $|\lambda| < 1$, 我们完成了证明.

Problem 320

设 $a' > a > 0$, 定义在 $[0, +\infty)$ 的递增函数 $\lambda(t)$ 满足 $\lambda(t) = 0, \forall t \in [0, a']$, 构建一个 $\xi(t) \in C^2(\mathbb{R})$, 使得 :

- $\xi(t) = 0,\ \forall t \in [0, a]$,
- $\xi''(t) \geqslant 0,\ \forall t \geqslant 0$,
- $\xi(t), \xi'(t) \geqslant \lambda(t), \forall t \geqslant 0$.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 取 $\{a_j\}_{j=1}^{\infty} \subset [0, +\infty)$, 使得

- $a_0 = 0, a_1 = a, a_2 = \frac{a+a'}{2}, a_3 = a'$,
- $a_j < a_{j+1}, \forall j \in \mathbb{N}_0$,
- $\lim\limits_{j \to +\infty} a_j = +\infty$.

然后对每个 $j = 1, 2, \cdots$, 记 $c_j \triangleq \sup\limits_{[0, a_j]} \lambda(t)$, 再取 $\varphi_j(x) \in C^2(\mathbb{R})$ 使得, 使得

- $\varphi_j'(t) \geqslant 0, \forall t \in \mathbb{R}$,
- $\varphi_j(t) = 0, \forall t \leqslant a_{j-1}$,
- $\varphi_j(t) = 1, \forall t \geqslant a_j$.

因此根据 $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, 取

$$\varphi(t) \triangleq c_1 + \sum_{j=1}^{\infty} (c_{j+1} - c_j) \varphi_j(t) = \sum_{j=3}^{\infty} (c_{j+1} - c_j) \varphi_j(t).$$

对 $t \leqslant a_2$, 我们有 $\varphi(t) = 0$, 对 $t \in [a_j, a_{j+1}], j = 1, 2, \cdots$, 我们有

$$\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = \cdots = \varphi_j(t) = 1,\ \varphi_{j+2}(t) = \varphi_{j+3}(t) = \cdots = 0,$$

因此

$$\varphi(t) = c_1 + \sum_{i=1}^{j+1} (c_{i+1} - c_i) \varphi_i(t) \geqslant c_1 + \sum_{i=1}^{j} (c_{i+1} - c_i) \varphi_i(t) = c_{j+1} \geqslant \lambda(t),$$

以及 $\varphi \in C^2(\mathbb{R}), \varphi'(t) \geqslant 0, \varphi(t) \geqslant \lambda(t), \forall t \geqslant 0$.

对每个 $j=1,2,\cdots,$, 取 $d_j \triangleq \sup\limits_{[0,a_j]} \max\{\varphi'(t),\lambda(t)\}$, 根据 $d_1=d_2=0$ 因此令

$$g(t) \triangleq d_1+\sum_{j=1}^{\infty}(d_{j+1}-d_j)\varphi_j(t)=\sum_{j=2}^{\infty}(d_{j+1}-d_j)\varphi_j(t),$$

类似地我们知道

$$g(t)\in C^2(\mathbb{R}),g(t)\geqslant \max\{\varphi'(t),\lambda(t)\},g'(t)\geqslant 0,\forall t\in[0,+\infty),g(t)=0,\forall t\in[0,a_1]=[0,a].$$

令 $\xi(t)\triangleq\int_0^t g(s)\,ds\in C^2(\mathbb{R})$, 并且有

$$\xi(t)\geqslant\int_0^t\varphi'(s)\,ds=\varphi(t)\geqslant\lambda(t),\xi'(t)=g(t)\geqslant\lambda(t),\xi''(t)=g'(t)\geqslant 0,\forall t\geqslant 0.$$

我们完成了证明.

Problem 321

设 A, B 是 n 阶矩阵, 满足

$$AB = A + \sum_{j=1}^{m} a_j B^j, \ \sum_{j=1}^{m} a_j \neq 0,$$

证明 : $AB = BA$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 令 $C = B - E$, 我们有

$$AC = \sum_{j=1}^{m} b_j C^j + \sum_{j=1}^{m} a_j E,$$

这给出了

$$\frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{m} a_j}[A - \sum_{j=1}^{m} b_j C^{j-1}]C = E,$$

于是

$$\frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{m} a_j}[A - \sum_{j=1}^{m} b_j C^{j-1}] = C^{-1} = f(C),$$

这里 f 是一个多项式.

因此

$$A = \sum_{j=1}^{m} b_j C^{j-1} + \sum_{j=1}^{m} a_j \cdot f(C),$$

故 $AC = CA$, 从而 $BA = AB$.

我们完成了证明.

Problem 322

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 随机的在 $(0,1)$ 中取值, 求这组数中最大数和最小数之差的期望.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 注意到期望为

$$\begin{aligned}
\int_{[0,1]^n} \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |x_i - x_j|\, dV &= n! \int_{1\geqslant x_n > x_{n-1} > \cdots > x_1 \geqslant 0} \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |x_i - x_j|\, dV \\
&= n! \int_0^1 dx_n \int_0^{x_n} dx_{n-1} \cdots \int_0^{x_2} (x_n - x_1)\, dx_1 \\
&= n! \int_0^1 dx_n \int_0^{x_n} dx_{n-1} \cdots \int_0^{x_3} \left(x_n \cdot x_2 - \frac{x_2^2}{2} \right) dx_2 \\
&= n! \int_0^1 dx_n \int_0^{x_n} dx_{n-1} \cdots \int_0^{x_4} \left(x_n \cdot \frac{x_3^2}{2} - \frac{x_3^3}{3!} \right) dx_3 \\
&= \cdots \\
&= n! \int_0^1 dx_n \int_0^{x_n} \left(x_n \cdot \frac{x_{n-1}^{n-2}}{(n-2)!} - \frac{x_{n-1}^{n-1}}{(n-1)!} \right) dx_{n-1} \\
&= n! \int_0^1 \left(\frac{x_n^n}{(n-1)!} - \frac{x_n^n}{n!} \right) dx_n \\
&= (n-1) \int_0^1 x_n^n dx_n = \frac{n-1}{n+1}.
\end{aligned}$$

Problem 323

设有界集 $A \subset \mathbb{R}^n$, 证明 A 零面积等价于 A' 零面积.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 事实上若 A 零面积, 则 $\bar{A}$ 也零面积, 作为 $\bar{A}$ 的子集, A' 自然也零面积. 反之, 若 A‘ 零面积, 则对任意 $\epsilon > 0$, 取有限个闭矩体 $\{J_i\}_{i=1}^m$, 使得

$$A' \subset \bigcup_{i=1}^m J_i, \sum_{i=1}^m |J_i| < \epsilon.$$

$A \setminus A'$ 是有界孤立点集, 因此必然是有限点集, 即

$$\{(x_i, y_i) : 1 \leqslant i \leqslant n\} = A \setminus A',$$

因此可取 n 个小矩形 $\{I\}_{i=1}^n$, 使得

$$A \setminus A' \subset \bigcup_{i=1}^n I_i, \sum_{i=1}^n |I_i| < \epsilon,$$

这给出了

$$A \subset \bigcup_{i=1}^n I_i \bigcup \bigcup_{i=1}^m J_i, \sum_{i=1}^n |I_i| + \sum_{j=1}^m |J_j| < 2\epsilon.$$

因此 A 是零面积集.

Problem 324

求

$$\iint_S x\left(z^2-y^2\right) \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z+y\left(x^2-z^2\right) \mathrm{d}z\ \mathrm{d}x+z\left(y^2-z^2\right) \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y,$$

其中 S 是 $y^2+z^2=1$ 被 $x=0, x=1, z+y=0, z-y=0$ 截取的上方部分, 取外侧.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 注意到单位外法向量为 $\left(0, \frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}\right)$, 那么

$$\begin{aligned}
&\iint_S x\left(z^2-y^2\right) \mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\left(x^2-z^2\right) \mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\left(y^2-z^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
=&\iint_{[0,1]\times\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]} y\left(x^2-z^2\right) \frac{y}{z}+z\left(y^2-z^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
=&\iint_{[0,1]\times\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]}\left(x^2+y^2-1\right) \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}+\sqrt{1-y^2}\left(2y^2-1\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
=&\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \int_0^1\left(x^2+y^2-1\right) \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}+\sqrt{1-y^2}\left(2y^2-1\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
=&\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(y^2-\frac{2}{3}\right) \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}+\sqrt{1-y^2}\left(2y^2-1\right) \mathrm{d}y \\
=&\frac{-5\pi-32}{48}.
\end{aligned}$$

Problem 325

PROOF. (*By* 清疏竞赛数学) 如果存在 $x_0 \in \mathbb{R}$, 使得 $f(x_0) = \sup_{\mathbb{R}} f$. 考虑闭集

$$M = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = f(x_0)\},$$

现在对 $x \in M$, 我们知道 $0 = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} [f(x) - f(y)]\, dy \geqslant 0$, 因此 $f(y) = f(x), \forall y \in (x-1, x+1)$, 即 M 是开集, 由 $\mathbb{R}$ 连通性, 因此 $M = \mathbb{R}$.

类似的考虑可以取到最小值, 那么仍然有 f 为常值函数, 因此我们假定 f 在 $\mathbb{R}$ 上取不最小值和最大值.

由于 $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$, 因此 $f(x) \geqslant 0$, 我们将证明 $\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to-\infty} f(x)$ 存在, 这样就类似的还有 $f(x) \leqslant 0$, 这样就完成了证明.

我们来证明 $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 存在 (另一侧类似), 构造 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, 使得

- $1 + x_n \geqslant x_{n+1} \geqslant x_n, \forall n \in \mathbb{N}_0$,
- $x_{n+1} = \max_{[x_0, 1+x_n]} f(x), \forall n \in \mathbb{N}_0$.

因为 f 取不到最大值, 所以 $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$, 那么

$$\begin{aligned}
&0 \leqslant f(x_n) - f(y_n) \\
&= \frac{1}{2}[\int_{x_n-1}^{x_n+1} f(z)\, dz - \int_{y_n-1}^{y_n+1} f(z)\, dz] \\
&= \frac{1}{2}[\int_{y_n+1}^{x_n+1} f(z)\, dz - \int_{y_n-1}^{x_n-1} f(z)\, dz] \\
&\leqslant \frac{1}{2}(x_n - y_n) f(x_{n+1})
\end{aligned} \tag{133}$$

我们完成了证明.

Problem 326

设 $V \subset \mathbb{R}^n$, $K \subset V$ 是一紧集, $s > \frac{n}{2}$, 证明：

存在常数 $C(V,K,n,s) > 0$, 使得对任意 $f \in C^\infty(V)$, 都有

$$\sup_K |f|^2 \leqslant C(V,K,n,s) \int_V [|f|^2 + \sum_{|\alpha| \leqslant s} |D_\alpha f|^2 dx.$$

这里

$$\alpha \triangleq (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n), |\alpha,| \triangleq \sum_{j=1}^n \alpha_j, D_\alpha \triangleq \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x^{\alpha_n}}, \alpha_j \in \mathbb{N}_0, j = 1, 2, \cdots, n,$$

这里 $\mathbb{N}_0$ 表示包含 0 的自然数集.

Proof. (By 清疏竞赛数学) 对 $a \in K$, 取 $B_{a,\rho} \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : ||x-a||_{\mathbb{R}^n} < \rho\}$, 使得 $\overline{B_{a,\rho}} \subset V$, 再取 $\eta \in C_c^\infty(-\rho,\rho)$, 使得 $\eta(x) = 1, \forall x \in \left(-\frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{2}\right)$, 现在对 $a \in K, x \in \partial B_{0,1}$, 反复分部积分, 我们有

$$f(a) = \frac{(-1)^s}{(s-1)!} \int_0^\rho r^{s-1} \frac{\partial^s}{\partial r^s} [\eta(r) f(a+rx)] dr.$$

因此记 Vol 表示表面积, 我们有

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{(-1)^s}{(s-1)! Vol(\partial B_{0,1})} \int_0^\rho \int_{\partial B_{0,1}} r^{s-1} \frac{\partial^s}{\partial r^s} [\eta(r) f(a+rx)] dr dS(x) \\ &= \frac{(-1)^s}{(s-1)! Vol(\partial B_{0,1})} \int_0^\rho \int_{\partial B_{a,r}} r^{s-n} \{\frac{\partial^s}{\partial r^s} [\eta(r) f(a+rx)]\}_{x=\frac{y-a}{r}} dr dS(y), \end{aligned}$$

于是就有

$$\begin{aligned} |f(a)|^2 &\leqslant \frac{1}{[(s-1)! Vol(\partial B_{0,1})]^2} \int_0^\rho \int_{\partial B_{a,r}} r^{2s-2n} dr dS(y) \cdot \int_0^\rho \int_{\partial B_{a,r}} |\{\frac{\partial^s}{\partial r^s} [\eta(r) f(a+rx)]\}_{x=\frac{y-a}{r}}|^2 dr dS(y) \\ &= \frac{1}{[(s-1)! Vol(\partial B_{0,1})]^2} \int_{B_{a,\rho}} \frac{1}{|y-a|^{2n-2s}} dV(y) \cdot \int_0^\rho \int_{\partial B_{a,r}} |\{\frac{\partial^s}{\partial r^s} [\eta(r) f(a+rx)]\}_{x=\frac{y-a}{r}}|^2 dr dS(y) \\ &= \frac{1}{[(s-1)! Vol(\partial B_{0,1})]^2} \int_{B_{0,\rho}} \frac{1}{|y|^{2n-2s}} dV(y) \cdot \int_0^\rho \int_{\partial B_{0,r}} |\{\frac{\partial^s}{\partial r^s} [\eta(r) f(rx)]\}_{x=\frac{y}{r}}|^2 dr dS(y) \\ &\leqslant C(V,K,n,s) \int_0^\rho \int_{\partial B_{0,r}} |f(y)|^2 + \sum_{|\alpha| \leqslant s} |D_\alpha f(y)|^2 dr dS(y) \\ &\leqslant C(V,K,n,s) \int_V |f|^2 + \sum_{|\alpha| \leqslant s} |D_\alpha f|^2 dx. \end{aligned}$$

这里积分收敛性, 可由 $s > \frac{n}{2}$ 得到, 由 a 任意性, 我们完成了证明.

Problem 327

设 $a>b>0>c$, 求 $f(x,y,z)=\left(ax^2+by^2+cz^2\right)e^{-x^2-y^2-z^2}$ 全部极值.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 我们有

$$\begin{cases} f_x(x,y,z)=-2xe^{-x^2-y^2-z^2}\left(ax^2-a+by^2+cz^2\right) \\ f_y(x,y,z)=-2ye^{-x^2-y^2-z^2}\left(ax^2+by^2-b+cz^2\right) \\ f_z(x,y,z)=-2ze^{-x^2-y^2-z^2}\left(ax^2+by^2+cz^2-c\right) \end{cases},$$

不妨设 $x,y,z\geqslant 0$, 这可能的极值点为

$$(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1).$$

简单观察发现, f 的 Hess 矩阵在四个点处应该是对角的, 所以我们无需计算得太复杂, 并结合轮换对称性, 只需要计算 f_{xx}, 此时就有

$$\begin{cases} f_{xx}(x,y,z)=2e^{-x^2-y^2-z^2}\left(a\left(2x^4-5x^2+1\right)+\left(2x^2-1\right)\left(by^2+cz^2\right)\right) \\ f_{yy}(x,y,z)=2e^{-x^2-y^2-z^2}\left(b\left(2y^4-5y^2+1\right)+\left(2y^2-1\right)\left(ax^2+cz^2\right)\right) \\ f_{zz}(x,y,z)=2e^{-x^2-y^2-z^2}\left(c\left(2z^4-5z^2+1\right)+\left(2z^2-1\right)\left(ax^2+by^2\right)\right) \end{cases},$$

带入即知 $(0,0,0),(0,1,0)$ 不是极值点, $(1,0,0)$ 极大值点, 极大值为 ae^{-1}, $(0,0,1)$ 极小值点, 极小值为 ce^{-1}, 我们完成了计算.

Problem 328

设 $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, 并且对任意 $x \in \mathbb{R}$, 存在 $n_x \in \mathbb{N}$(全体正自然数), 使得 $f^{(n_x)}(x) = 0$, 证明 : $f(x)$ 是多项式.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 注意对某个开区间 $(a,b), -\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, 如果对任意 $x \in (a,b)$, 存在 x 邻域, 使得 f 在此邻域上为多项式, 那么 f 在 (a,b) 实解析, 从而 f 在 (a,b) 只能是多项式.
对任何开区间 $(a,b), -\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, 考虑闭覆盖 (相对 (a,b) 的拓扑)

$$(a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x \in (a,b) : f^{(n)}(x) = 0\right\},$$

那么由 Baire, 必存在一个 $\left\{x \in (a,b) : f^{(n)}(x) = 0\right\}$ 包含区间, 因此在这个区间上 f 是多项式.
基于上述两个事实, 现在考虑开集

$$H = \{x \in \mathbb{R} : \text{存在}x\text{邻域,使得}f(x)\text{在此邻域是多项式}\},$$

现在假定 $F = \mathbb{R} \setminus H$ 是非空闭集, 因为上述事实, F 不能有内点, 即 F 无处稠密, 此外如果 F 有孤立点 a, 那么在 a 左右侧, 基于上述事实, f 将会是多项式, 把 f 在 a Taylor 展开, 即知 $a \in H$, 这是矛盾, 因此 F 无孤立点.
现在运用 $F = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left\{x \in F : f^{(n)}(x) = 0\right\}$, 注意现在是在拓扑空间 F 中考虑, 因此由 Baire, 存在有界开区间 I 和 $n \in \mathbb{N}$, 使得 $I \bigcap F$ 里每个点, n 阶导数都是 0, 因为 F 中每个点都可是 F 中点的极限, 所以 $I \bigcap F$ 中每个点都是 $I \bigcap F$ 中点的极限, 现在由导数定义, 就有

$$f^{(k)}(x) = 0, \forall x \in F \bigcap I, k \geqslant n. \tag{134}$$

注意到 $I = (F \bigcap I) \bigcup (H \bigcap I)$, 运用开集的构造, 我们有 $H \bigcap I = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$, 这里 $\{(a_n, b_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 两两不交, 因此 $a_n, b_n \in F \bigcap I$ 或者是 I 的端点, 如果 $a_n \in F \bigcap I$, 那么因为 f 在 $[a_n, b_n]$ 是多项式, 结合(134), f 在 $[a_n, b_n]$ 上为 0, 类似地可考虑 $b_n \in F \bigcap I$, 仍然有 f 在 $[a_n, b_n]$ 上为 0, 又 $(a_n, b_n) \neq I$, 因此每个 (a_n, b_n), 必有一个端点属于 $F \bigcap I$, 于是 f 在 $H \bigcap I$ 是 0, 注意由 F 的无处稠密性, $H \bigcap I$ 在 I 稠密, 由于 f 连续性, f 在 I 上为 0, 因此 $I \subset H$, 这导致 $F \bigcap I = \emptyset$, 矛盾!
我们完成了证明.

Problem 329

求极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^{\alpha}|y|^{\beta}}{\sqrt{x^4+y^2}}.$$

Proof. (By 清疏竞赛数学) 不妨设 $x, y \geqslant 0$, 令

$$x=\sqrt{r}\cos\theta, y=r\sin\theta, \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],$$

则当 $\alpha+2\beta>2$, 有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^{\alpha}|y|^{\beta}}{\sqrt{x^4+y^2}} = \lim_{r\to 0}\frac{r^{\frac{\alpha}{2}+\beta}\cos^{\alpha}\theta\sin^{\beta}\theta}{r}=0.$$

当 $\alpha+2\beta\leqslant 2$, 令 $x=k\sqrt{y}\ k>0$, 于是

$$\lim_{y\to 0^+}\frac{k^{\alpha}|y|^{\frac{\alpha}{2}+\beta}}{y\sqrt{k^4+1}} = \begin{cases} \frac{k^{\alpha}}{\sqrt{k^4+1}}, & \alpha+2\beta=2 \\ +\infty, & \alpha+2\beta<2 \end{cases},$$

因此

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^{\alpha}|y|^{\beta}}{\sqrt{x^4+y^2}}\text{不存在}.$$

我们完成了证明.

Problem 330

设 X 是 Banach 空间, $A: X \to X$ 是稠定闭算子, A 是某个强连续半群 $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}, ||T(t)|| \leqslant Me^{wt}, \forall t \geqslant 0$ 的无穷小生成元的充分必要条件是如下条件成立

- $\rho(A) \supset (w, +\infty)$,
- $\left|\left|(\lambda I - A)^{-n}\right|\right| \leqslant \frac{M}{(\lambda - w)^n}, \forall \lambda > w, n \in \mathbb{N}$.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 先说明必要性, 事实上, 如果 A 是上述条件的 $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ 的无穷小生成元, 那么对 $\lambda > w$, 我们有

$$\lambda \in \rho(A), (\lambda I - A)^{-1} y = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) y dt.$$

我们证明

$$(-1)^k k! (\lambda I - A)^{-k-1} = \frac{d^k}{d\lambda^k} (\lambda I - A)^{-1} y = \int_0^\infty (-t)^k e^{-\lambda t} T(t) y dt, \forall k \in \mathbb{N}, y \in X. \tag{135}$$

我们仅对 $k = 1$ 证明, 一般情况是类似的, 事实上, 如果 $|h| < 1$, 那么

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\int_0^\infty e^{-(\lambda+h)t} T(t) y dt - \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) y dt}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\int_0^\infty \left(e^{-ht} - 1\right) e^{-\lambda t} \cdot T(t) y dt}{h} \\
&= \int_0^\infty \lim_{h\to 0} \frac{e^{-ht} - 1}{h} e^{-\lambda t} \cdot T(t) y dt \\
&= \int_0^\infty (-t) e^{-\lambda t} \cdot T(t) y dt,
\end{aligned}$$

极限换序过程来自

$$\int_0^\infty |\frac{e^{-ht} - 1}{h} + t| e^{-\lambda t} \cdot ||T(t) y|| dt \leqslant M ||y|| \int_0^\infty |\frac{e^{-ht} - 1 + th}{h}| e^{-(\lambda - w)t} dt,$$

然后运用数学分析就有

$$\lim_{h\to 0} \int_0^\infty |\frac{e^{-ht} - 1 + th}{h}| e^{-(\lambda - w)t} dt = 0,$$

具体的, 显然

$$\lim_{h\to 0} \int_0^{\frac{1}{|h|}} |\frac{e^{-ht} - 1 + th}{ht}| t e^{-(\lambda - w)t} dt = 0,$$

另外一方面,

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{|h|}}^{\infty}|\frac{e^{-ht}-1+th}{ht}|te^{-(\lambda-w)t}dt&\leqslant\int_{\frac{1}{|h|}}^{\infty}\left|e^{-ht}-1+th\right|\cdot te^{-(\lambda-w)t}dt\\&\leqslant\int_{\frac{1}{|h|}}^{\infty}te^{-(\lambda-w-|h|)t}dt+\int_{\frac{1}{|h|}}^{\infty}te^{-(\lambda-w)t}dt+|h|\int_{0}^{\infty}t^2e^{-(\lambda-w)t}dt\\&=\frac{e^{-\frac{\lambda-w-|h|}{|h|}}(\lambda-w)}{(\lambda-w-|h|)^2|h|}\int_{\frac{1}{|h|}}^{\infty}te^{-(\lambda-w-|h|)t}dt+\int_{\frac{1}{|h|}}^{\infty}te^{-(\lambda-w)t}dt+|h|\int_{0}^{\infty}t^2e^{-(\lambda-w)t}dt.\end{aligned}$$

从预解公式, 容易得到另外一个等号的证明.

充分性：

注意到 $\frac{d}{dt}T(t)x=AT(t)x,\ \forall x\in D(A)$, 于是形式的 $T(t)x=e^{At}x$, 但是 A 不是有界线性算子, 因此不能用 $e^{At}x$ 完全表达, 我们可以构造逼近的有界线性算子 A_n, 所以结合

$$\lim_{n\to\infty}nA(nI-A)^{-1}x=Ax,\forall x\in D(A),nA(nI-A)^{-1}=n^2(nA-I)^{-1}-nI,$$

我们记 $A_n=nA(nI-A)^{-1}$, 并令 $T(t)x=\lim\limits_{n\to\infty}e^{A_nt}x,x\in X$, 猜想这就是所构造, 我们分为几步来证明,

- $\left|\left|e^{tA_n}\right|\right|\leqslant Me^{\frac{wnt}{n-w}},\forall t\geqslant 0,n>w.$

  事实上

$$\begin{aligned}\left|\left|e^{tA_n}\right|\right|&=e^{-nt}\left|\left|e^{tn^2(nA-I)^{-1}}\right|\right|\\&\leqslant e^{-nt}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^kn^{2k}\left|\left|(nA-I)^{-k}\right|\right|}{k!}\\&\leqslant Me^{-nt}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^kn^{2k}}{k!(n-w)^k}\\&=Me^{\frac{nwt}{n-w}}.\end{aligned}$$

- 我们有

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(e^{tA_n}-e^{tA_m}\right)&=A_ne^{tA_n}-A_me^{tA_m}\\&=A_n(e^{tA_n}-e^{tA_m})+(A_n-A_m)e^{tA_m},\end{aligned}$$

解算子值微分方程, 就有

$$
\begin{aligned}
e^{tA_n}-e^{tA_m}&=(A_n-A_m)\int_0^t e^{(t-s)A_n}e^{sA_m}ds\\
&=\left(nA\left(nI-A\right)^{-1}-mA\left(mI-A\right)^{-1}\right)\int_0^t e^{(t-s)A_n}e^{sA_m}ds\\
&=A\left(A\left(nI-A\right)^{-1}-A\left(mI-A\right)^{-1}\right)\int_0^t e^{(t-s)A_n}e^{sA_m}ds\\
&=(m-n)\,A^2\left(nA-I\right)^{-1}\left(mA-I\right)^{-1}\int_0^t e^{(t-s)A_n}e^{sA_m}ds.
\end{aligned}
$$

因此对 $x\in D\left(A^2\right),m,n>2w$, 我们有

$$
\begin{aligned}
\left|\left|e^{tA_n}x-e^{tA_m}x\right|\right|&=\left|\left|(m-n)\left(nA-I\right)^{-1}\left(mA-I\right)^{-1}\int_0^t e^{(t-s)A_n}e^{sA_m}A^2xds\right|\right|\\
&\leqslant\frac{M^2\left|m-n\right|\cdot||A^2x||}{(n-w)\,(m-w)}\int_0^t\left|\left|e^{(t-s)A_n}e^{sA_m}\right|\right|ds\\
&\leqslant\frac{M^4\left|m-n\right|\cdot||A^2x||}{(n-w)\,(m-w)}\int_0^t e^{\frac{nw(t-s)}{n-w}}\cdot e^{\frac{mws}{m-w}}ds\\
&=\frac{M^4\left|e^{\frac{ntw}{n-w}}-e^{\frac{mtw}{m-w}}\right|}{w^2}\cdot\left|\left|A^2x\right|\right|\\
&\leqslant\frac{M^4\left|m-n\right|te^{2wt}}{(n-w)\,(m-w)}\cdot\left|\left|A^2x\right|\right|.
\end{aligned}
$$

- 显然 $D\left(A^2\right)$ 在 X 中稠密, 现在对固定的 $t\geqslant 0,x\in X$, 对任意 $\varepsilon>0$, 取 $y\in D\left(A^2\right)$, 使得 $||x-y||<\epsilon$, 于是

$$
\begin{aligned}
\left|\left|e^{tA_n}x-e^{tA_m}x\right|\right|&\leqslant\left|\left|e^{tA_n}\left(x-y\right)-e^{tA_m}\left(x-y\right)\right|\right|+\left|\left|e^{tA_n}y-e^{tA_m}y\right|\right|\\
&\leqslant M\left(e^{\frac{nwt}{n-w}}+e^{\frac{mwt}{m-w}}\right)\epsilon+\frac{M^4\left|m-n\right|te^{2wt}}{(n-w)\,(m-w)}\cdot\left|\left|A^2y\right|\right|\\
&\leqslant 2Me^{2wt}\epsilon+\frac{M^4\left|m-n\right|te^{2wt}}{(n-w)\,(m-w)}\cdot\left|\left|A^2y\right|\right|.
\end{aligned}
$$

注意到 $\lim\limits_{n,m\to+\infty}\frac{|m-n|}{(n-w)(m-w)}=0$, 因此 $\left\{e^{tA_n}x\right\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 列, 所以 $T\left(t\right)x\triangleq\lim\limits_{n\to\infty}e^{tA_n}x$ 存在.

- 根据 $||T\left(t\right)x||=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\left|e^{tA_n}x\right|\right|\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}Me^{\frac{nwt}{n-w}}\cdot||x||=Me^{wt}\cdot||x||$, 显然 $T\left(t\right)\in L\left(X\right),||T\left(t\right)||\leqslant Me^{wt}$, 容易知道 $\left\{T\left(t\right)\right\}_{t=0}^{\infty}$ 构成一个强连续半群.

- 需要说明 A 是 $\{T(t)\}_{t=0}^{\infty}$ 的无穷小生成元, 先设 $x \in D(A)$, 那么

$$\begin{aligned}
T(t)x &= \lim_{n\to\infty} e^{tA_n}x \\
&= x + \lim_{n\to\infty}\int_0^t e^{sA_n}A_nxds \\
&= x + \int_0^t \lim_{n\to\infty} e^{sA_n}A_nxds \\
&= x + \int_0^t T(s)Axds.
\end{aligned}$$

这里积分极限换序, 来自

$$\int_0^t ||e^{sA_n}A_nx||ds \leqslant 2M\int_0^t e^{2ws}\,||Ax||\,ds < \infty,$$

和控制收敛定理, 注意到

$$T(s)Ax = \lim_{n\to\infty} e^{sA_n}A_nx = \lim_{n\to\infty} An(nI-A)^{-1}e^{sA_n}x, \lim_{n\to\infty} n(nI-A)^{-1}e^{sA_n}x = T(s)x,$$

因为 A 是闭算子, 所以

$$T(s)x \in D(A), AT(s)x = T(s)Ax,$$

这证明了

$$\frac{d}{ds}T(s)x = AT(s)x = T(s)Ax, \forall x \in D(A).$$

设 B 是 $\{T(t)\}_{t=0}^{\infty}$ 的无穷小生成元, 那么

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}[T(t)x - x] = \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\int_0^t T(s)Axds = Ax, \forall x \in D(A),$$

从而 $x \in D(B), Bx = Ax$.

- 对 $x \in D(B)$, 我们去证明 $x \in D(A)$, 现在取 $z = (\lambda I - B)x, \lambda > w$, 于是

$$\begin{aligned}
z &= \lambda(\lambda I - A)^{-1}(\lambda I - B)x - A(\lambda I - A)^{-1}(\lambda I - B)x \\
&= \lambda(\lambda I - A)^{-1}(\lambda I - B)x - B(\lambda I - A)^{-1}(\lambda I - B)x \\
&= (\lambda I - B)(\lambda I - A)^{-1}z,
\end{aligned}$$

这给出了 $x = (\lambda I - A)^{-1}z \in D(A)$, 因此 $A = B$.

我们完成了证明.

Problem 331

设 $f(x,y)\in C^1(\mathbb{R}^2)$, 我们假设存在 $C>0$, 使得 $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|\leqslant C$, 首先证明下述微分方程有唯一的 $\mathbb{R}$ 上的解

$$y'=f(x,y(x)),y(x_0)=y_0,$$

然后假设 $f(x+1,y)=f(x,y)$, 如果上述微分方程有 $\mathbb{R}$ 上的有界解, 则上述微分方程必然有 $\mathbb{R}$ 上周期 1 的解.

Proof. *(By* 清疏竞赛数学) 第一问几乎是显然的, 因为 $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqslant C|y_1-y_2|$ 成立, 所以解当然是存在且唯一的, 我们还需要说明解能延拓至全空间, 假设在区间 (a,b) 上解存在, 且 $x_0\in(a,b)$, 注意到存在 $C_1,C_2>0$, 使得

$$\begin{aligned}|y'(x)|=|f(x,y(x))|&\leqslant|f(x,y(x))-f(x,y(x_0))|+\sup_{x\in[a,b]}|f(x,y_0)|\\&\leqslant C|y(x)-y(x_0)|+\sup_{x\in[a,b]}|f(x,y_0)|\leqslant C_1+C_2|y(x)|,\ \forall x\in(a,b),\end{aligned}$$

因此 $\int_a^b\frac{|y'(x)|}{C_1+C_2|y(x)|}dx\leqslant 1$, 从而

$$\int_{y(a^+)}^{y(b^-)}\frac{1}{C_1+C_2|x|}dx<\infty.$$

这给出了 $y(a^+),y(b^-)$ 都是存在的有限数, 从而 y 总能延拓到 $\mathbb{R}$ 上.

对于第二问, 设 y 是有界解, 若有 $x_1\in\mathbb{R}$, 使得 $y(x_1+1)=y(x_1)=y_1$, 那么 $y'=f(x,y(x)),y(x_1)=y_1$ 就有两个有界解 $y(x),y(x+1)$, 此时由解的唯一性我们知道 $y(x)=y(x+1),\forall x\in\mathbb{R}$.

现在假设 $y(x+1)\neq y(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, 不妨设 $y(x+1)>y(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, 结合有界性, 我们知道 $\lim\limits_{k\to+\infty}y(x+k)=g(x)$ 存在, 如果我们记题目中微分方程的解为 $\varphi(x,x_0,y_0)$, 我们有

$$y(x+k)=\varphi(x,x_0,y(x_0+k)),$$

由解对初值的连续依赖性, 并令 $k\to\infty$, 我们知道

$$g(x)=\varphi(x,x_0,g(x_0)),$$

显然还有 $g(x+1)=g(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, 故 g 是一个周期 1 解.

Problem 332

设 $\lambda > w$, 证明

$$\lim_{h\to 0}\int_0^{\infty}|\frac{e^{-ht}-1+th}{h}|e^{-(\lambda-w)t}dt=0.$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 利用

$$\int_0^{\frac{1}{|h|}}|\frac{e^{-ht}-1+th}{ht}|te^{-(\lambda-w)t}dt\leqslant\sup_{|x|\leqslant 1}\left|\frac{e^{-x}-1+x}{x}\right|\int_0^{\infty}te^{-(\lambda-w)t}dt<\infty,$$

和控制收敛定理, 就有

$$\lim_{h\to 0}\int_0^{\frac{1}{|h|}}|\frac{e^{-ht}-1+th}{ht}|te^{-(\lambda-w)t}dt=\int_0^{\infty}\lim_{h\to 0}|\frac{e^{-ht}-1+th}{ht}|te^{-(\lambda-w)t}dt=0,$$

然后

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{|h|}}^{\infty}|\frac{e^{-ht}-1+th}{ht}|te^{-(\lambda-w)t}dt&\leqslant\int_{\frac{1}{|h|}}^{\infty}\left|e^{-ht}-1+th\right|\cdot te^{-(\lambda-w)t}dt\\&\leqslant\int_{\frac{1}{|h|}}^{\infty}te^{-(\lambda-w-|h|)t}dt+\int_{\frac{1}{|h|}}^{\infty}te^{-(\lambda-w)t}dt+|h|\int_0^{\infty}t^2e^{-(\lambda-w)t}dt\\&=\frac{e^{-\frac{\lambda-w-|h|}{|h|}}(\lambda-w)}{(\lambda-w-|h|)^2|h|}+\int_{\frac{1}{|h|}}^{\infty}te^{-(\lambda-w)t}dt+|h|\int_0^{\infty}t^2e^{-(\lambda-w)t}dt.\end{aligned}$$

我们就有

$$\lim_{h\to 0}\int_{\frac{1}{|h|}}^{\infty}|\frac{e^{-ht}-1+th}{ht}|te^{-(\lambda-w)t}dt=0,$$

因此我们完成了证明.

Problem 333

对 $a, d \in \mathbb{N}_+$, 我们令

$$S_{a,d} = \{a + kd : k = 0, 1, 2, \cdots\},$$

我们称 d 为 $S_{a,d}$ 的公差.

证明：如果正整数集划分为有限个公差不同的 $S_{a,d}$ 的无交并, 那么这种划分只能是 $\mathbb{N}_+ = S_{1,1}$.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 首先, 对 $a, d \in \mathbb{N}_+$, 我们有

$$\sum_{n \in S_{a,d}} x^n = \sum_{k=0}^{\infty} x^{a+kd} = \frac{x^a}{1 - x^d}, \forall x \in (0, 1),$$

这里

$$S_{a,d} = \{a + kd : k = 0, 1, 2, \cdots\}.$$

如果 $\exists a_i, d_i \in \mathbb{N}_+, i = 1, 2, \cdots, m$, 使得

$$\mathbb{N}_+ = S_{1,1} = \bigcup_{i=1}^{m} S_{a_i,d_i},$$

那么有等式

$$\frac{x}{1 - x} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{n \in S_{a_i,d_i}} x^n = \sum_{i=1}^{m} \frac{x^{a_i}}{1 - x^{d_i}}, \forall x \in (0, 1),$$

即 $1 = \sum\limits_{i=1}^{m} x^{a_i - 1} \frac{1-x}{1-x^{d_i}}$.

注意到 $\sum\limits_{i=1}^{m} x^{a_i - 1} \frac{1-x}{1-x^{d_i}}$ 是亚纯的, 因此对 $x \in \mathbb{C}$, 都应该有 $1 = \sum\limits_{i=1}^{m} x^{a_i - 1} \frac{1-x}{1-x^{d_i}}$, 因此 $\sum\limits_{i=1}^{m} z^{a_i - 1} \frac{1-z}{1-z^{d_i}}$ 是全纯的, 由 d_i 互不相同, 因此对于最大的 $d_i > 1$, 一定有一个 d_i 次单位根是奇点, 所以 $m = 1 = a_1 = d_1$, 证毕!

Problem 334

设 $f(x)$ 是 $[1,+\infty)$ 上的函数, 存在 $L>l>0$, 使得

$$\ell\left|x_2-x_1\right| \leqslant \left|f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)\right| \leqslant L\left|x_2-x_1\right|, \forall x_2, x_1 \geqslant 1,$$

证明 : 存在 $X>0$, 使得 $\frac{xe^{-x}}{f(x)}$ 在 $[X,+\infty)$ 一致连续.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 显然 $\ell|x-1| \leqslant |f(x)-f(1)| \leqslant L|x-1|, \forall x \geqslant 1$, 因此

$$\lim_{x\to+\infty}|f(x)|=+\infty,$$

因此存在 $X>1$, 使得 $|f(x)| \geqslant m>0, \forall x \geqslant X$, 那么对任意 $x, y \geqslant X$, 我们有

$$\begin{aligned}\left|\frac{xe^{-x}}{f(x)}-\frac{ye^{-y}}{f(y)}\right| &\leqslant \left|\frac{xe^{-x}}{f(x)}-\frac{ye^{-y}}{f(x)}\right|+\left|\frac{ye^{-y}}{f(x)}-\frac{ye^{-y}}{f(y)}\right| \\ &\leqslant \frac{1}{m}\left|xe^{-x}-ye^{-y}\right|+\frac{1}{e}\left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(y)}\right| \\ &= \frac{|x-y|}{m}\left|(1-\theta)e^{-\theta}\right|+\frac{1}{e}\left|\frac{f(y)-f(x)}{f(x)f(y)}\right| \\ &\leqslant \frac{|x-y|}{e^2 m}+\frac{L|x-y|}{em^2}.\end{aligned}$$

因此 $\frac{xe^{-x}}{f(x)}$ 在 $[X,+\infty)$ 一致连续.

Problem 335

估计等价无穷大

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin^4 nx}{\sin^4 x} dx \,(n\to\infty)\,.$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 首先, 对任意 $\delta>0$, 我们有

$$\int_\delta^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin^4 nx}{\sin^4 x} dx = O(1)\,, n\to\infty,$$

然后

$$\frac{1}{\sin^4 x} = \frac{1}{x^4} + \frac{2}{3x^2} + O(1)\,, x\to 0,$$

因此可取固定的充分小的 $\delta>0$, 有

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin^4 nx}{\sin^4 x} dx &= \int_0^\delta \frac{x\sin^4 nx}{x^4} dx + \int_0^\delta \frac{2x\sin^4 nx}{3x^2} dx + O(1) \\
&= \int_0^\delta \frac{\sin^4 nx}{x^3} dx + \frac{2}{3}\int_0^\delta \frac{\sin^4 nx}{x} dx + O(1) \\
&= n^2 \int_0^{n\delta} \frac{\sin^4 x}{x^3} dx + \frac{2}{3}\int_0^{n\delta} \frac{\sin^4 x}{x} dx + O(1) \\
&= n^2 \int_0^{\infty} \frac{\sin^4 x}{x^3} dx - n^2 \int_{n\delta}^{\infty} \frac{\sin^4 x}{x^3} dx + \frac{2}{3}\int_0^{n\delta} \frac{\sin^4 x}{x} dx + O(1) \\
&= n^2 \ln 2 - n^2 o(1) + \frac{2}{3}\int_0^{n\delta} \frac{\sin^4 x}{x} dx + O(1) \\
&= n^2 \ln 2 + o\left(n^2\right).
\end{aligned}$$

这里注意到

$$\frac{2}{3}\int_0^{n\delta} \frac{\sin^4 x}{x} dx = \frac{2}{3}\int_1^{n\delta} \frac{\sin^4 x}{x} dx + O(1) \leqslant \frac{2}{3}\ln(n\delta) + O(1) = O(\ln n)\,,$$

于是我们证明了

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin^4 nx}{\sin^4 x} dx \sim \ln 2\cdot n^2.$$

Problem 336

设 $T>0, m>1, \alpha\in\left(\frac{1}{2m},1\right)$, $\int_0^T |f(x)|^{2m}\,dx<\infty$, 证明

$$F(t)=\int_0^t (t-\sigma)^{\alpha-1} f(\sigma)\,d\sigma\in C[0,T].$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 注意到

$$\int_0^t |(t-\sigma)^{\alpha-1} f(\sigma)|d\sigma\leqslant\left[\int_0^t (t-\sigma)^{(\alpha-1)\frac{2m}{2m-1}}\,d\sigma\right]^{1-\frac{1}{2m}}\left[\int_0^T |f(\sigma)|^{2m}\,d\sigma\right]^{\frac{1}{2m}},$$

因为 $(1-\alpha)\frac{2m}{2m-1}<\left(1-\frac{1}{2m}\right)\frac{2m}{2m-1}=1$, 所以 $F(t)$ 有意义, 由

$$\left[\int_0^t (t-\sigma)^{(\alpha-1)\frac{2m}{2m-1}}\,d\sigma\right]^{1-\frac{1}{2m}}=\left[\frac{t^{\frac{2m(\alpha-1)}{2m-1}+1}}{\frac{2m(\alpha-1)}{2m-1}+1}\right]^{1-\frac{1}{2m}}=\frac{t^{\alpha-\frac{1}{2m}}}{\left(1+\frac{2m(\alpha-1)}{2m-1}\right)^{\frac{2m-1}{2m}}},$$

F 在 $t=0$ 连续.

对 $t_0\in(0,T], 0<\epsilon<\frac{t_0}{2}$, 令

$$F_\epsilon(t)=\int_0^{t-\epsilon}(t-\sigma)^{\alpha-1} f(\sigma)\,d\sigma\in C\left[\frac{t_0}{2},T\right],$$

现在

$$\begin{aligned}|F(t)-F_\epsilon(t)|&\leqslant\int_{t-\epsilon}^t (t-\sigma)^{\alpha-1}|f(\sigma)|\,d\sigma\\&\leqslant\left[\int_{t-\epsilon}^t (t-\sigma)^{(\alpha-1)\frac{2m}{2m-1}}\,d\sigma\right]^{1-\frac{1}{2m}}\cdot\left[\int_0^T |f(\sigma)|^{2m}\,d\sigma\right]^{\frac{1}{2m}}\\&=\frac{\epsilon^{\alpha-\frac{1}{2m}}}{\left(1+\frac{2m(\alpha-1)}{2m-1}\right)^{\frac{2m-1}{2m}}}\cdot\left[\int_0^T |f(\sigma)|^{2m}\,d\sigma\right]^{\frac{1}{2m}}.\end{aligned}$$

即 $F_\epsilon(t)$ 在 $\left[\frac{t_0}{2},T\right]$ 一致收敛到 $F(t)$, 因此 $F(t)$ 在 $t=t_0$ 连续.

Problem 337

求满足 $f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$ 的所有 $\mathbb{R}$ 上的连续解.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 注意到 $f(x)f(y)\neq 1,\forall x,y\in\mathbb{R}$, $f(0)=\frac{2f(0)}{1-f^2(0)}\Rightarrow f(0)=0$, 现在 $f(x)\neq\pm 1,\forall x\in\mathbb{R}$, 由介值性, $|f(x)|<1,\forall x\in\mathbb{R}$.

令 $g(x)\triangleq\arctan f(x)\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$, 我们有

$$g(x+y)=\arctan f(x+y)=\arctan\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}=\arctan f(x)+\arctan f(y)=g(x)+g(y).$$

因此 $g(x)$ 满足 Cauchy 方程, 从而 $g(x)=cx$, 但 $g(x)$ 有界, 因此 $g(x)=0$, 因此 $f(x)=0$.

Problem 338

设 $f(x) \in C^1[1,+\infty)$ 且满足 $f''(x) + xf(x) = 0$, 证明 $f(x)$ 有界.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 首先由

$$\int_1^x f''(y) f'(y) dy + \int_1^x y f'(y) f(y) dy = 0,$$

得

$$x f^2(x) = f'(1)^2 + f^2(1) + \int_1^x f^2(y) dy - f'(x)^2 \leqslant f'(1)^2 + f^2(1) + \int_1^x \frac{1}{y} y f^2(y) dy,$$

运用 Gronwall 不等式, 我们有 $x f^2(x) \leqslant \left[f(1)^2 + f'(1)^2\right] e^{\int_1^x \frac{1}{y} dy} = \left[f(1)^2 + f'(1)^2\right] x$, 这给出了 $|f(x)| \leqslant \sqrt{|f'(1)|^2 + |f(1)|^2}, \forall x \geqslant 1$.

我们完成了证明.

Problem 339

设 $\rho(t) \in C(\mathbb{R})$ 满足

- $\rho(t) = 0, \forall |t| \geqslant 1$,
- $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(t)\, dt = 0$,
- $\int_{-\infty}^{\infty} t\rho(t)\, dt = 1$.

若 $f(x) \in D^1(\mathbb{R})$, 证明

$$\lim_{\lambda \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda^2} \rho\left(\frac{t-x}{\lambda}\right) f(t)\, dt = f'(x).$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 不妨考虑 $\lambda > 0$, 我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda^2} \rho\left(\frac{t-x}{\lambda}\right) f(t)\, dt - f'(x) = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \rho(t) f(x+\lambda t)\, dt - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \rho(t) f(x)\, dt - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \lambda t \rho(t) f'(x)\, dt \\
&= \int_{-1}^{1} \rho(t) [\frac{f(x+\lambda t) - f(x)}{\lambda} - t f'(x)] dt.
\end{aligned}$$

注意到

$$F(t, \lambda) = \begin{cases} \rho(t) [\frac{f(x+\lambda t)-f(x)}{\lambda} - t f'(x)], & |t| \leqslant 1, 0 < |\lambda| \leqslant 1 \\ 0, & |t| \leqslant 1, \lambda = 0 \end{cases} \in C^2\left([-1,1]^2\right),$$

因此

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \int_{-1}^{1} \rho(t) [\frac{f(x+\lambda t) - f(x)}{\lambda} - t f'(x)] dt = \int_{-1}^{1} \rho(t) \lim_{\lambda \to 0^+} [\frac{f(x+\lambda t) - f(x)}{\lambda} - t f'(x)] dt = 0,$$

我们完成了证明.

Problem 340

设连通开集 $D\subset\mathbb{R}^2$, 若 $f\in C^1(D)$, 且满足 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=0,\forall(x,y)\in D$, 证明 f 在 D 上为常数.

Proof. (*By* 清疏竞赛数学) 注意, 证明过程中我们尽量避免" 反复操作" 这种说不清楚的东西.

首先假设 D 是凸集, 那么对 $a,b\in D$, 考虑 $g(\lambda)=f(a+\lambda(b-a))\in C^1[0,1]$, 我们有 $g'(\lambda)=0$, 因此 $g(a)=g(b)$, 由 a,b 任意性即得.

现在对一般的开集 D, 取定 D 中的点 a, 令 $C=\{x\in D:f(x)=f(a)\}$, 显然 C 是相对 D 的闭集, 现在取 $b\in D$, 取 b 为心的小开球 B, 使得 $B\subset D$, B 当然是凸的, 因此由刚才的结果, 我们有 $f(x)=f(b),\forall x\in B$, 因此 C 是相对 D 开的, 现在 C 非空, 因此由 D 连通, 我们有 $C=D$, 证毕!

Problem 341

给定数域 K 内的数所组成的无穷序列 $a_0, a_1, a_2, \cdots$. 对于任意的非负整数 s, m, 定义

$$A_{s,m} = \begin{bmatrix} a_s & a_{s+1} & \cdots & a_{s+m} \\ a_{s+1} & a_{s+2} & \cdots & a_{s+m+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s+m} & a_{s+m+1} & \cdots & a_{s+2m} \end{bmatrix}$$

如果存在非负整数 n, k, 使当 $s \geqslant k$ 时 $|A_{s,n}| = 0$, 证明: 存在 K 内不全为 0 的数 $b_0, b_1, \cdots, b_n$ 及非负整数 S, 使得当 $s \geqslant S$ 时, 有

$$a_s b_n + a_{s+1} b_{n-1} + \cdots + a_{s+n} b_0 = 0$$

Proof. (*By* 清疏竞赛数学)