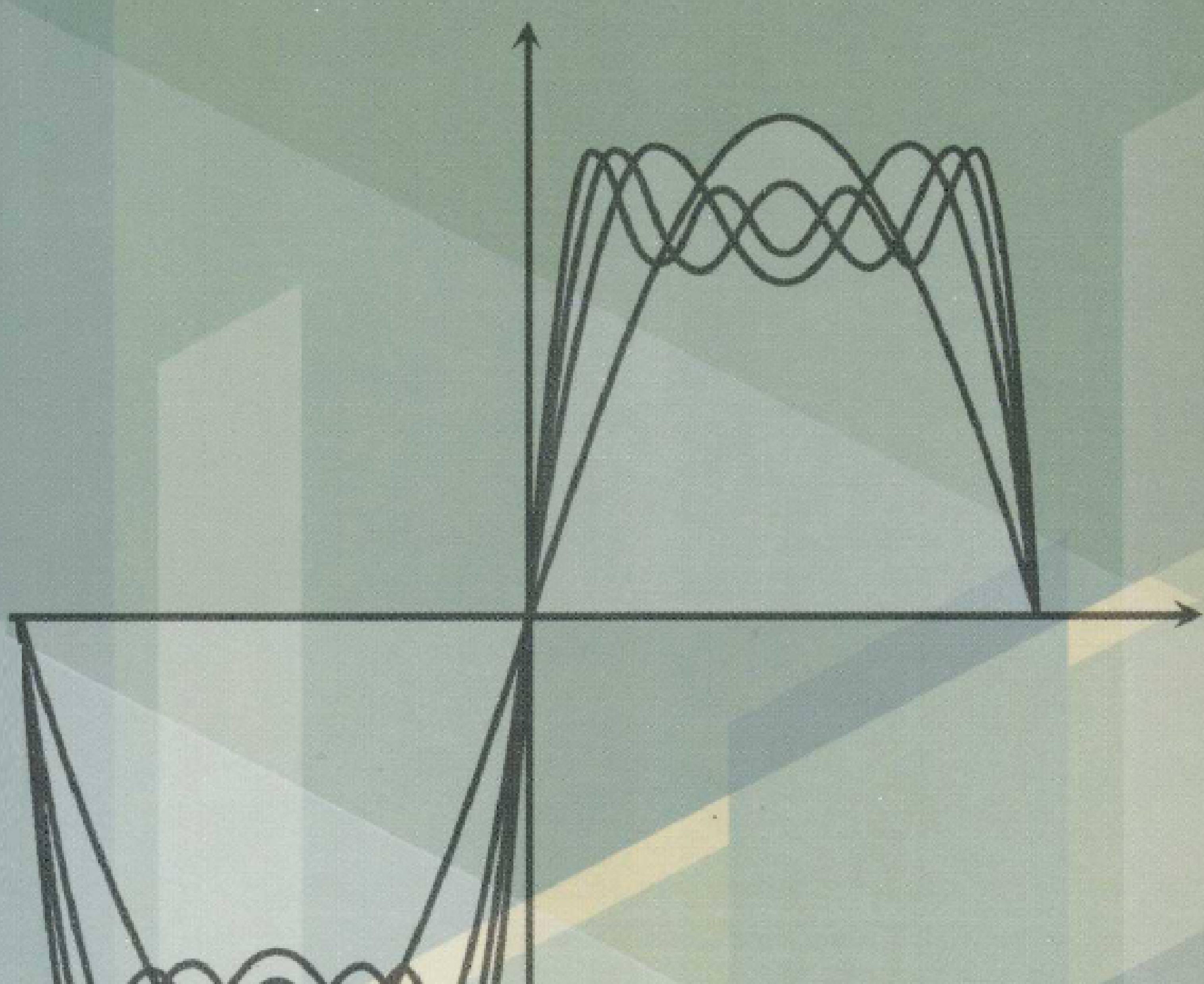
普通高等教育“十二五”规划教材

数学分析教程

（中册）

崔尚斌　编著



科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

数学分析教程

(中册)

崔尚斌 编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是供综合性大学和师范院校数学类各专业本科一、二年级学生学习数学分析课程的一部教材，分上、中、下三册. 本册为中册，讲授一元函数的积分学和级数理论，内容包括一元函数的定积分及其应用、广义积分、无穷级数、函数序列和函数级数、幂级数和傅里叶级数等.

本书对传统数学分析教材的编排做了一些与时俱进的改革，内容做了适当缩减和增补，除了如传统教材一样重视对基础知识和基本技巧的传授外，也增加了一些分析学的新内容. 本书讲解十分清晰、浅显易懂，配有充足的例题和习题，并对数学分析各个组成部分的来龙去脉和历史发展有清楚并且引人入胜的介绍，不仅适合教师课堂讲授，也很适合学生自学使用.

图书在版编目（CIP）数据

数学分析教程. 中册/崔尚斌编著. —北京：科学出版社，2013
普通高等教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-03-036806-5
Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①崔… Ⅲ. ①数学分析-高等学校-教材 Ⅳ. ①O17
中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 037798 号

责任编辑：张中兴／责任校对：包志虹
责任印制：阎 磊／封面设计：迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

化学工业出版社印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2013 年 3 月第 一 版 开本：720×1000 B5
2013 年 3 月第一次印刷 印张：21 1/2
字数：426 000

定价：36.00 元
（如有印装质量问题，我社负责调换）

目录

第 7 章

定 积 分

许多应用问题, 如平面图形的面积、旋转体的体积、变速直线运动的路程、变力做的功、非均匀杆的质量、非均匀导线上的电荷量等, 都可作为“微小量的积累”的极限来计算. 人们由此概括出了微积分理论的另一个重要概念 —— 定积分. 本章讲述定积分理论, 包括定积分的定义、性质和计算方法, 微积分基本定理, 函数可积的达布准则等.

定积分和导数一样, 是数学分析中最重要的概念之一. 实际上, 数学分析的别名是微积分, 后一名称是微分学和积分学的合称. 而积分学, 则是指包括定积分在内的所有关于函数积分的理论. 但在关于函数的所有各种形式的积分中, 定积分是最基本和最重要的, 因为其他形式的积分都是定积分的各种推广并且都必须通过化为定积分来计算. 定积分概念是和导数概念同时形成的, 由牛顿和莱布尼茨二人各自独立地提出, 因此产生于 17 世纪后半叶. 但其思想的萌芽早在 2500 年前的古希腊时期就已经出现了. 阿基米德 (Archimedes, 公元前 287~ 公元前 212) 继承和发展欧多克索斯的“穷竭法”, 推导出了许多平面图形的面积和一些立体的体积公式. 现在来看, 阿基米德采用的正是定积分的思想. 一些研究数学史的学者说, 读了阿基米德的著作, 就不会对积分学的思想感到新奇了. 但另一方面, 正像导数的概念在牛顿和莱布尼茨那个时代并不严谨、其严格化是直到一个半世纪之后的柯西和魏尔斯特拉斯时期才完成的一样, 牛顿和莱布尼茨在最初提出定积分的概念时, 也没能给出这个概念的严格定义. 现在所采用的定积分的定义, 是他们离世一个多世纪之后的 1854 年由黎曼给出的. 由于这个原因, 定积分又叫黎曼积分.

7.1 定积分的概念和基本性质

7.1.1 定积分概念的引出

许多应用问题, 都可作为“微小量的积累”取极限来计算. 下面仅举三例来说明.

1. 平面梯形的面积

几何学的一个基本问题是求平面图形的面积和立体图形的体积. 以平面图形的面积问题为例, 如果这个平面图形是长方形、三角形、四边形或多边形这些以直线段为边的图形, 那么它的面积是很容易计算的. 但是如果这个图形有一些弯曲的边界, 如圆、椭圆、曲边三角形等, 则其面积的计算就没有那么简单了. 在第 2 章一开始已经看到, 即使是对圆这样最简单的以曲线为边界的图形, 其面积的计算都需要使用极限. 可想而知, 其他更复杂图形面积的计算, 也一定需要应用取极限的办法来解决. 下面就应用类似于计算圆面积的穷竭法的思想, 来计算曲边梯形的面积.

曲边梯形是指由四条边围成的平面图形, 其中有一条边是曲线, 其余三条边都是直线, 并且与曲线相邻的两条直边互相平行. 两条互相平行的直边叫做这个曲边梯形的腰, 第三条直边叫做它的底. 在特殊情况下, 两条腰中的一条可退化为一个点, 这时这个曲边梯形也叫做曲边三角形. 也可两条腰都退化为点.

在平面上建立直角坐标系 Oxy, 使得曲边梯形的底边位于 Ox 轴上, 曲边梯形位于上半平面. 设底边占据的区间是 $[a,b]$, 而曲线的方程是 $y=f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$, 其中 f 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数 (图 7-1-1).

把区间 $[a,b]$ 划分成一些长度非常小的小区间 $[x_0,x_1]$, $[x_1,x_2]$, $\cdots$, $[x_{n-1},x_n]$, 其中

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b.$$

这样的一个划分叫做区间 $[a,b]$ 的一个**分割**, 点 x_0, x_1, x_2, $\cdots$, x_{n-1}, x_n 叫做这个分割的**分点**. 在每个小区间 $[x_{k-1},x_k]$ 上任取一点 ξ_k $(x_{k-1}\leqslant\xi_k\leqslant x_k)$, 以 $f(\xi_k)$ 为高、$\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$ 为底边作矩形, 以这个小矩形的面积近似地代替区间 $[x_{n-1},x_1]$ 上的小曲边梯形的面积 (局部地以直代曲 —— 在区间 $[x_{k-1},x_k]$ 上, 以通过点 $(\xi_k,f(\xi_k))$ 的水平线代替该区间上小曲边梯形的弯曲的上底边, 如图 7-1-2 所示), 那么所有这些小矩形的面积之和便是曲边梯形面积 S 的近似值

$$S\approx\sigma=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}).$$

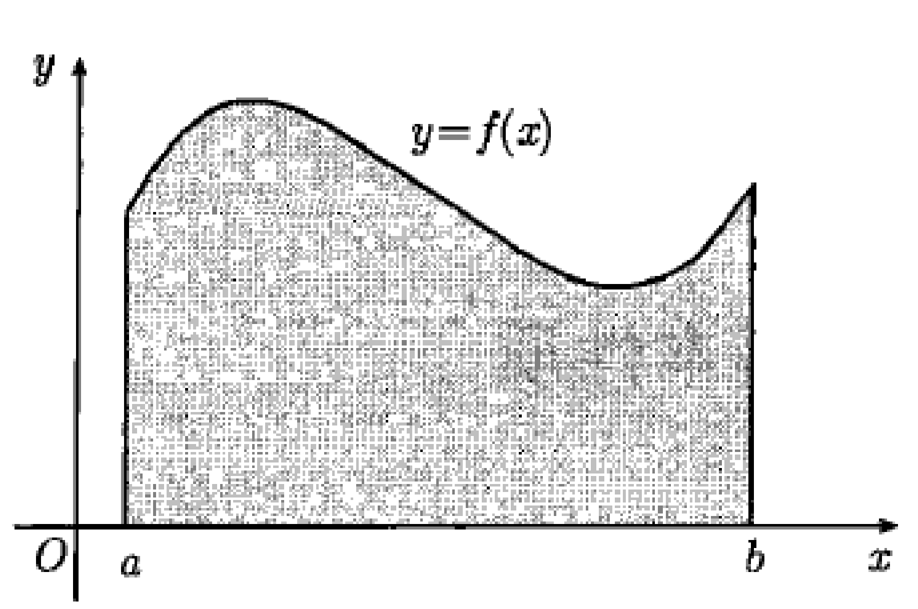


图 7-1-1 曲边梯形的面积

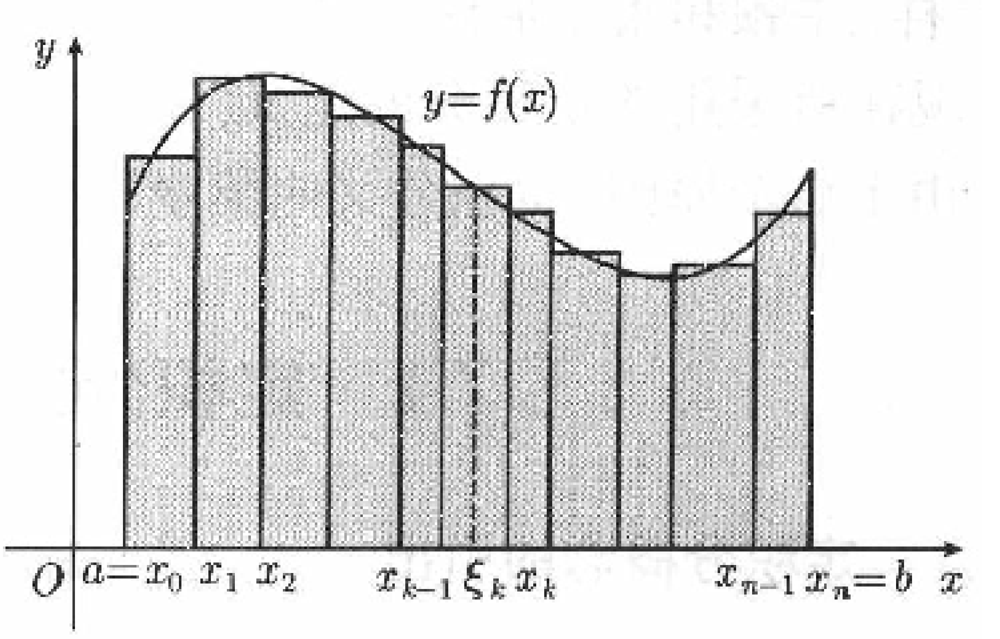


图 7-1-2 以直代曲求面积

显然, 分割作得越细, 即 $\delta=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\Delta x_k$ 越小, 则上述和 σ 越接近曲边梯形的面积 S. 换言之, 随着 $\delta\to 0$, 必有 $\sigma\to S$, 即

$$S=\lim_{\delta\to 0}\sigma=\lim_{\delta\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k.$$

上面所说分割作得细, 必须是小区间的长度都非常小, 亦即 $\delta=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\Delta x_k$ 非常小, 而不是仅分点的个数 n 很大. 如果只是 n 很大而 δ 不小, 则 σ 可能会与曲边梯形的面积 S 相差很大. 例如, 如果取 $x_1=\dfrac{1}{2}(b-a)$, 并取 $x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}$ 为区间 $\left(\dfrac{1}{2}(b-a), b\right)$ 中的点 (取 $x_n=b$), 则无论 n 多么大, 都有可能 σ 与 S 相差很大, 除非点 ξ_1 取得非常特殊, 然而这样特殊的 ξ_1 是非常难取到的.

例 1 求抛物线 $y=x^2$ 与 Oy 轴及直线 $x=a$ $(a>0)$ 所围曲边三角形的面积.

解 把区间 $[0,a]$ 作 n 等分, 则分点为 $x_k=\dfrac{ak}{n}$, $k=0,1,\cdots,n$. 在每个小区间 $[x_{k-1},x_k]$ 上, 作以此小区间为底边、以曲线 $y=x^2$ 在此小区间的左端点的值 x_{k-1}^2 为高的矩形, 然后把所有这些小矩形的面积相加, 得曲边三角形面积的近似值①

$$\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{a}{n}\left(\frac{a(k-1)}{n}\right)^2=\frac{a^3}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}k^2=\frac{a^3}{6n^3}n(n-1)(2n-1).$$

显然, 当 $n\to\infty$ 时, 该近似值趋于曲边三角形面积的精确值 S, 即

$$S=\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\frac{a^3}{3}.$$

2. 变速直线运动的路程

设质点做变速直线运动, 速度 v 关于时间 t 的依赖关系是 $v=v(t)$. 在时间段 $[0,T]$ $(T>0)$ 里, 该质点所走过的路程 s 是多少?

类似于曲边梯形面积的求法, 把时间段 $[0,T]$ 作分割, 设分点为 $0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n=T$. 对每个 $1\leqslant k\leqslant n$, 取 $\tau_k\in[t_{k-1},t_k]$, 把时间段 $[t_{k-1},t_k]$ 里质点的运动近似地看成以 $v(\tau_k)$ 为速度的匀速直线运动, 则在这个时间段里质点走过的路程近似地为 $v(\tau_k)(t_k-t_{k-1})$, 因此时间段 $[0,T]$ 里, 质点所走过的路程 s 的近似值为

$$s\approx\sum_{k=1}^{n}v(\tau_k)(t_k-t_{k-1}).$$

---

① $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\sum_{k=1}^{n}k(k-1)+\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n+1}[k(k-1)(k-2)-(k-1)(k-2)(k-3)]+\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{3}(n+1)n(n-1)+\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$

记 $\delta=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}(t_k-t_{k-1})$. 则当 $\delta\to 0$ 时, 上式的极限就是 s 的精确值, 即

$$s=\lim_{\delta\to 0}\sum_{k=1}^{n}v(\tau_k)(t_k-t_{k-1}).$$

例 2 已知自由落体运动是匀加速运动, 即加速度 g (重力加速度) 是常数, 进而速度 $v(t)=gt$. 据此求自由落体在时间段 $[0,T]$ 里所走过的路程 s.

解 把时间段 $[0,T]$ 作 n 等分, 则分点为 $t_k=\dfrac{k}{n}T$, $k=0,1,\cdots,n$. 在每个小时间段 $[t_{k-1},t_k]$ 里, 以质点在此小时间段开始时的速度 $v(t_{k-1})=gt_{k-1}=\dfrac{1}{n}(k-1)gT$ 作近似值, 求得质点在此小时间段里所走过的路程的近似值为 $v(t_{k-1})(t_k-t_{k-1})=\dfrac{1}{n}(k-1)gT\cdot\dfrac{1}{n}T=\dfrac{gT^2}{n^2}(k-1)$, 从而在时间段 $[0,T]$ 里质点所走过的总路程的近似值为

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}v(t_{k-1})(t_k-t_{k-1})=\sum_{k=1}^{n}\frac{gT^2}{n^2}(k-1)=\frac{gT^2}{n^2}\cdot\frac{1}{2}n(n-1)=\frac{gT^2}{2n}(n-1).$$

令 $n\to\infty$, 得自由落体在时间段 $[0,T]$ 里所走过的路程 s 的精确值

$$s=\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\frac{gT^2}{2n}(n-1)=\frac{1}{2}gT^2.$$

3. 河流的水流量

河流里水流量每年的变化情况, 是反映气候变化和影响工农业生产的重要信息, 国家必须对此信息有清楚的了解. 流经一条河流每年的水流量, 可以通过在这条河流里选择一些观测点设置水位标尺和流速仪, 再运用与前两例类似的方法计算获得. 设某条河流在某个观测点的横截面如图 7-1-3 所示. 已知该点处河流宽度为 a (m), 水位标尺以下部分横截面的面积为 S_0 (m^2), 测得该点处水位 h (m) 随时间 t (s) 变化的函数关系为 $h=h(t)$, 流经该点的水的流速 v (m/s) 随时间 t 变化的函数关系为 $v=v(t)$, 求在时间段 $[0,T]$ 里, 流经该观测点的总水量 Q (m^3).

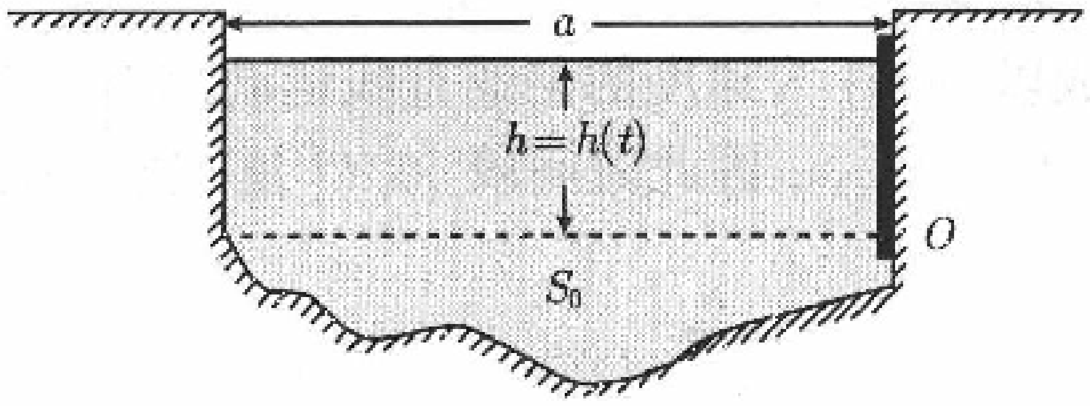


图 7-1-3 河流的横断面

由以上所列条件知, 流经该观测点的水流密度为

$$f(t)=[S_0+ah(t)]v(t)\ \ (\mathrm{m}^3/\mathrm{s})$$

对时间段 $[0,T]$ 作分割, 设分点为 $0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n=T$. 对每个 $1\leqslant k\leqslant n$, 把时间段 $[t_{k-1},t_k]$ 里水的流动近似地看成等流密度的流动, 则在这个时间段里流经该观测点的水的体积为 $f(\tau_k)(t_k-t_{k-1})$, 其中 $\tau_k\in[t_{k-1},t_k]$. 因此在时间段 $[0,T]$ 里, 流经该观测点的水的总体积 Q 的近似值为

$$Q\approx\sum_{k=1}^{n}f(\tau_k)(t_k-t_{k-1}).$$

记 $\delta=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}(t_k-t_{k-1})$. 则当 $\delta\to 0$ 时, 上式的极限就是 Q 的精确值, 即

$$\begin{aligned}Q&=\lim_{\delta\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\tau_k)(t_k-t_{k-1})\\&=\lim_{\delta\to 0}a\sum_{k=1}^{n}h(\tau_k)v(\tau_k)(t_k-t_{k-1})+\lim_{\delta\to 0}S_0\sum_{k=1}^{n}v(\tau_k)(t_k-t_{k-1}).\end{aligned}$$

7.1.2 定积分的定义

上面介绍的这些例子, 虽然问题的来源不同, 但它们的数学表现形式却都类似, 即已知定义在区间 $[a,b]$ 上的函数 f, 需要先把区间 $[a,b]$ 作分割:

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b, \tag{7.1.1}$$

并在每个小区间 $[x_{k-1},x_k]$ 上取点 ξ_k, 然后作和

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}),\quad \Delta x_k=x_k-x_{k-1}.$$

最后再使 $\delta=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\Delta x_k\to 0$ 而求上述和 σ 的极限

$$S=\lim_{\delta\to 0}\sigma=\lim_{\delta\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k.$$

由于这类问题的广泛性, 有必要把这类问题作为一个专门的课题进行研究. 这就引出了函数 f 在区间 $[a,b]$ 上的定积分的概念. 在给出定积分的定义之前, 需要先介绍几个名词和记号.

用符号 Δ 表示区间 $[a,b]$ 的任意一个分割, 即 Δ 是满足条件 (7.1.1) 的一组分点 $x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n$ 的集合

$$\Delta=\{x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n\},\qquad \text{其中 } a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b.$$

记 $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$, $k=1,2,\cdots,n$, 并令 $\|\Delta\|=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\Delta x_k$. $\|\Delta\|$ 叫做分割 Δ 的模; $\|\Delta\|$ 越小, 则称分割 Δ 越精细. 对于从这个分割所得到的每个小区间 $[x_{k-1},x_k]$, 如前

所取的点 $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ 叫做**介点**, 它们的集合记作 Ξ, 即 $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\}$, 称为从属于分割 Δ 的**介点集**, 而和

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

叫做函数 f 对应于分割 Δ 和介点集 Ξ 的**积分和**, 记作 $S(f, \Delta, \Xi)$, 即

$$S(f, \Delta, \Xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

与数列的极限和函数的极限概念类似, 引进积分和的极限的概念.

定义 7.1.1 如果存在与分割 Δ 和介点集 Ξ 无关的实数 I, 使对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 都存在相应的 $\delta > 0$, 使当 $\|\Delta\| < \delta$ 时, 都成立

$$|S(f, \Delta, \Xi) - I| < \varepsilon,$$

则称当 $\|\Delta\|$ 趋于零时, 积分和 $S(f, \Delta, \Xi)$ 以 I 为极限, 记作

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} S(f, \Delta, \Xi) = I.$$

当然也可写出积分和 $S(f, \Delta, \Xi)$ 的具体表达式而记作

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = I \quad 或 \quad \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = I.$$

现在便可给出定积分的定义.

定义 7.1.2 设 f 是定义在区间 $[a, b]$ 上的函数. 对区间 $[a, b]$ 的任意分割 Δ 和任意介点集 Ξ, 作 f 的相应的积分和 $S(f, \Delta, \Xi)$. 如果这个积分和在 $\|\Delta\| \to 0$ 时有极限 I (自然,I 应当是与分割 Δ 和介点集 Ξ 无关的实数), 则称函数 f 在区间 $[a, b]$ 上**可积**, 并称极限值 I 为函数 f 在区间 $[a, b]$ 上的**积分**, 记作

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = I.$$

因此

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

因此, 暂时不要考虑函数的可积性问题, 即认为所涉及的函数都是可积的, 那么上面举的三个例子可分别写成

(1) 由曲线 $y = f(x)$ 和 Ox 轴及两条铅直线 $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ 所围曲边梯形的面积是

$$S = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

假设 $f(x) \geqslant 0, \forall x \in [a,b]$;

(2) 速度函数是 $v = v(t)$ 的做变速直线运动的质点, 在时间段 $[0,T]$ 里所走过的路程是

$$s = \int_0^T v(t)\mathrm{d}t;$$

(3) 对于河流的流量问题, 有

$$Q = a\int_0^T h(t)v(t)\mathrm{d}t + S_0\int_0^T v(t)\mathrm{d}t.$$

在积分符号 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 中, f 叫做**被积函数**, $[a,b]$ 叫做**积分区间**, a 和 b 分别叫做定积分的**下限**和**上限**, x 叫做**积分变元**. 需要说明的是, 定积分是一个数, 而不是一个函数, 它只与被积函数 f 以及积分区间 $[a,b]$ 有关, 而与采用什么积分变元没有关系, 即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(y)\mathrm{d}y = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u = \cdots.$$

尽管例 1 和例 2 中, 分割区间的方式和选取的介点都是特殊的, 即分割区间是用等分的方法, 选取的介点都是小区间的左端点, 但这样做只是为了计算的方便. 在定义定积分的概念时, 必须要求分割区间的方式是任意的, 并且介点的选取也是任意的. 换言之, 只有对*任意的*分割 Δ 和*任意的*介点集 $\varXi$, 由 $\|\Delta\| \to 0$ 能够推得 $S(f,\Delta,\varXi) \to I$ 时, 才说函数 f 是可积的并且它的积分是 I; 如果不做这样的要求, 就不能得到一个合理的定义. 例如, 考虑定义在区间 $[0,1]$ 上的狄利克雷函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 是有理数}, \\ 0, & \text{当 } x \text{ 是无理数}, \end{cases}$$

(狄利克雷, Peter Gustav Lejeune-Dirichlet, 1805~1859, 德国人). 如果如例 1 和例 2 那样, 把区间 $[0,1]$ 作 n 等分并且取介点为小区间的左端点, 那么得到的积分和是

$$\sum_{k=1}^n D(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n 1\cdot(x_k - x_{k-1}) = x_n - x_0 = 1;$$

而如果取区间 $[0,1]$ 的分割使得除 $x_0 = 0$ 之外的其他分点都是无理数, 并取介点为小区间的左端点, 或者虽然把区间 $[0,1]n$ 等分, 但取每个小区间中的介点为该区间中的无理数, 那么得到的积分和将是

$$\sum_{k=1}^n D(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = 1\cdot(x_1 - x_0) + \sum_{k=2}^n 0\cdot(x_k - x_{k-1}) = x_1 - x_0 = x_1,$$

或者

$$\sum_{k=1}^{n} D(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} 0 \cdot (x_k - x_{k-1}) = 0.$$

显然按第一种方法作的积分和, 在分割的模 $\|\Delta\|$ 趋于零时以 1 为极限, 而按第二和第三种方法作的积分和, 在 $\|\Delta\|$ 趋于零时以 0 为极限. 因此, 如果不对分割 Δ 和介点集 Ξ 做任意性的要求, 那么对狄利克雷函数, 是该以 1 作为它在区间 $[0,1]$ 上的定积分呢, 还是以 0 作为它在该区间上的定积分? 只能把像狄利克雷函数这样出现以上现象的函数置于我们的讨论对象之外. 这样在作定积分的定义时, *要求分割 Δ 和介点集 Ξ (特别是后者) 都必须是任意的*.

如果对一个函数 f, 当分割的模 $\|\Delta\|$ 趋于零时, 积分和 $S(f,\Delta,\Xi)$ 没有极限, 就称 f **不可积**. 因此, 狄利克雷函数是不可积的函数.

定积分的概念最早是由牛顿和莱布尼茨各自独立地引进的. 但是正如他们在引进导数的概念时并没有给出导数的严格定义一样, 在引进定积分的概念时他们也没有给出这个概念的严格定义, 原因在于当时还没有极限的概念. 定积分的上述严格定义是由黎曼在 19 世纪中叶给出的. 1902 年, 法国数学家勒贝格 (Henri Lebesgue, 1875~1941) 为了解决可积函数列的极限函数的可积性等问题, 提出了一种新的积分理论. 为区别勒贝格引进的这种新的积分, 人们便把按定义 7.1.1 和定义 7.1.2 给出的定积分叫做**黎曼积分**, 相应的可积函数叫做**黎曼可积函数**; 而把由勒贝格定义的积分叫做**勒贝格积分**, 相应的可积函数叫做**勒贝格可积函数**. 本书讨论的积分都是黎曼积分, 所说的可积函数都是黎曼可积函数. 至于勒贝格积分, 将在后续课程实变函数中专门讨论.

7.1.3 定积分的基本性质

从定义 7.1.1 看到, 积分和的极限与数列的极限、函数的极限既有差别, 又很类似, 在性质上有很多相似之处. 因此, 下面推导定积分的基本性质时直接应用, 而不再重复其与数列的极限、函数的极限的相应性质完全类似的证明.

定理 7.1.1 (可积函数必有界) 如果 f 在 $[a,b]$ 上可积, 则它必在 $[a,b]$ 上有界.

证明 (反证法) 假设 f 在区间 $[a,b]$ 上无界. 我们来构作 f 的一个积分和 $S(f,\Delta,\Xi)$, 它对应分割的模 $\|\Delta\|$ 可以任意小, 但对适当选择的介点集 Ξ, $|S(f,\Delta,\Xi)|$ 却能任意大.

对任意给定的正整数 n, 把区间 $[a,b]$ n 等分, 记分点为 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. 令 $\Delta = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n\}$. 显然, $\|\Delta\| = \dfrac{b-a}{n}$, 因此, 只要 n 充分大, $\|\Delta\|$ 就充分小. 由于 f 在区间 $[a,b]$ 上无界, 所以它必在 n 个小区间 $[x_0,x_1]$, $[x_1,x_2]$, $\cdots$, $[x_{n-1},x_n]$ 中的某一个上无界, 设为 $[x_{k_0-1},x_{k_0}]$. 任意取定其他小区间 $[x_0,x_1]$, $[x_1,x_2]$, $\cdots$, $[x_{k_0-2},x_{k_0-1}]$, $[x_{k_0},x_{k_0+1}]$, $\cdots$, $[x_{n-1},x_n]$ 中的介点 ξ_1, ξ_2, $\cdots$, ξ_{k_0-1}, ξ_{k_0+1}, $\cdots$, ξ_n, 下面特别地选取小区间 $[x_{k_0-1},x_{k_0}]$ 中的介点 ξ_{k_0}, 使得积分和

$S(f,\Delta,\Xi)$ 的绝对值大于任意给定的正数 M.

事实上, 当给定 $M>0$ 后, 由于 f 在 $[x_{k_0-1},x_{k_0}]$ 上无界, 所以必存在 $\xi_{k_0}\in[x_{k_0-1},x_{k_0}]$, 使得

$$|f(\xi_{k_0})|>\frac{\left|\sum\limits_{k\neq k_0}f(\xi_k)\Delta x_k\right|+M}{\Delta x_{k_0}}.$$

这样就有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k\right|\geqslant|f(\xi_{k_0})|\Delta x_{k_0}-\left|\sum_{k\neq k_0}f(\xi_k)\Delta x_k\right|>M.$$

而这是与 $\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$ 在 $\|\Delta\|$ 趋于零时有极限相矛盾的. 因此, 如果 f 在 $[a,b]$ 上可积, 则它必在 $[a,b]$ 上有界. 证毕.

定理 7.1.2 (定积分的线性性)　如果 f 和 g 都在 $[a,b]$ 上可积, 则对任意实数 α 和 β, $\alpha f+\beta g$ 也在 $[a,b]$ 上可积, 且

$$\int_a^b\Big(\alpha f(x)+\beta g(x)\Big)\mathrm{d}x=\alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\beta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

证明　记 $I_1=\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, $I_2=\displaystyle\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$. 设 $\Delta=\{x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n\}$ 是区间 $[a,b]$ 的任意一个分割, $\Xi=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}$ 是任意一个相应的介点集. 则由 $I_1=\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 和 $I_2=\displaystyle\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 可知

$$\lim_{\|\Delta\|\to0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k=I_1,$$

$$\lim_{\|\Delta\|\to0}\sum_{k=1}^{n}g(\xi_k)\Delta x_k=I_2.$$

因此, 类似于数列极限和函数极限的线性性质, 有

$$\lim_{\|\Delta\|\to0}\sum_{k=1}^{n}\Big(\alpha f(\xi_k)+\beta g(\xi_k)\Big)\Delta x_k=\lim_{\|\Delta\|\to0}\left(\alpha\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k+\beta\sum_{k=1}^{n}g(\xi_k)\Delta x_k\right)$$
$$=\alpha\lim_{\|\Delta\|\to0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k+\beta\lim_{\|\Delta\|\to0}\sum_{k=1}^{n}g(\xi_k)\Delta x_k=\alpha I_1+\beta I_2.$$

所以函数 $\alpha f+\beta g$ 也在 $[a,b]$ 上可积, 且 $\displaystyle\int_a^b\Big(\alpha f(x)+\beta g(x)\Big)\mathrm{d}x=\alpha I_1+\beta I_2$. 证毕.

定理 7.1.3 (定积分的区间可加性)　如果 f 在 $[a,b]$ 和 $[b,c]$ 上都可积, 其中 $a<b<c$, 则 f 也在 $[a,c]$ 上可积, 且

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x.$$

证明 由定理 7.1.1 知 f 在 $[a,b]$ 和 $[b,c]$ 上都有界, 所以它也在 $[a,c]$ 上有界. 设

$$|f(x)| \leqslant M, \quad \forall x \in [a,c].$$

记 $I_1 = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, $I_2 = \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$. 由 $I_1 = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 知, 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在相应的 $\delta_1 > 0$, 使对 $[a,b]$ 的任意分割 $\Delta_1 = \{x_0^{(1)}, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \cdots, x_{l-1}^{(1)}, x_l^{(1)}\}$ 和任意相应的介点集 $\Xi_1 = \{\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \cdots, \xi_l^{(1)}\}$, 只要 $\|\Delta_1\| < \delta_1$, 就有

$$\left|\sum_{k=1}^{l} f(\xi_k^{(1)})\Delta x_k^{(1)} - I_1\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

同理, 由 $I_2 = \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$ 知, 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在相应的 $\delta_2 > 0$, 使对 $[b,c]$ 的任意分割 $\Delta_2 = \{x_0^{(2)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \cdots, x_{m-1}^{(2)}, x_m^{(2)}\}$ 和任意相应的介点集 $\Xi_2 = \{\xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}, \cdots, \xi_m^{(2)}\}$, 只要 $\|\Delta_2\| < \delta_2$, 就有

$$\left|\sum_{k=1}^{m} f(\xi_k^{(2)})\Delta x_k^{(2)} - I_2\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

现在令 $\delta = \min\left\{\delta_1, \delta_2, \frac{\varepsilon}{9M}\right\}$. 下面证明: 对区间 $[a,b]$ 的任意一个分割 $\Delta = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n\}$ 和任意一个相应的介点集 $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\}$, 只要 $\|\Delta\| < \delta$, 就有

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k - (I_1 + I_2)\right| < \varepsilon.$$

事实上, 如果 b 是一个分点, 即 $b \in \Delta$, 设 $b = x_{k_0}$, 则 $\Delta_1 = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{k_0-1}, x_{k_0}\}$ 是区间 $[a,b]$ 的一个分割, $\Delta_2 = \{x_{k_0}, x_{k_0+1}, x_{k_0+2}, \cdots, x_{n-1}, x_n\}$ 是区间 $[b,c]$ 的一个分割, 而且显然 $\|\Delta_1\| \leqslant \|\Delta\| < \delta \leqslant \delta_1$, $\|\Delta_2\| \leqslant \|\Delta\| < \delta \leqslant \delta_2$, 所以有

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k - (I_1 + I_2)\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{k_0} f(\xi_k)\Delta x_k - I_1\right| + \left|\sum_{k=k_0+1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k - I_2\right| < \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon.$$

如果 b 不是一个分点, 把 b 增加到分割 Δ 得一新的分割 Δ', 并相应地在介点集 Ξ 中增加介点得一新的介点集 Ξ'. 用 x'_0, x'_1, x'_2, $\cdots$, x'_n, x'_{n+1} 表示分割 Δ' 的全体分点, 用 $\xi'_1, \xi'_2, \cdots, \xi'_{n+1}$ 表示介点集 Ξ' 中的全部介点. 则根据已证明的结论有

$$\left|\sum_{k=1}^{n+1} f(\xi'_k)\Delta x'_k - (I_1 + I_2)\right| < \frac{2}{3}\varepsilon.$$

而因积分和 $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ 与 $\sum_{k=1}^{n+1} f(\xi'_k)\Delta x'_k$ 只有三项不同 $\left(\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k\right.$ 中一项, $\left.\sum_{k=1}^{n+1} f(\xi'_k)\Delta x'_k \text{ 中两项}\right)$, 所以

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k - \sum_{k=1}^{n+1} f(\xi'_k)\Delta x'_k\right| \leqslant 3M\|\Delta\| < 3M\delta < \frac{1}{3}\varepsilon.$$

结合起来就得到

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k - (I_1+I_2)\right| \leqslant& \left|\sum_{k=1}^{n+1} f(\xi'_k)\Delta x'_k - (I_1+I_2)\right| \\ &+ \left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k - \sum_{k=1}^{n+1} f(\xi'_k)\Delta x'_k\right| < \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon.\end{aligned}$$

这就证明

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = I_1 + I_2.$$

所以 f 在 $[a,c]$ 上可积, 且 $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = I_1 + I_2 = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$. 证毕.

定积分的几何意义 由定积分的线性性和可加性, 便可给出定积分的几何解释 (图 7-1-4). 设定义在区间 $[a,b]$ 上的函数 f 在此区间上可积, 并且在 $[a,c]$ 上 $f(x) \geqslant 0$, 而在 $[c,b]$ 上 $f(x) \leqslant 0$, 其中 $a < c < b$. 因为在区间 $[c,b]$ 上 $f(x) = -(-f(x)) = -|f(x)|$, 所以

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x - \int_c^b |f(x)|\mathrm{d}x = S_1 - S_2,$$

其中 S_1 是函数 f 在 Ox 轴上方的图形与 Ox 轴所围区域的面积, S_2 是 f 在 Ox 轴下方的图形与 Ox 轴所围区域的面积. 所以上式说明, 函数 f 在区间 $[a,b]$ 上的定积分

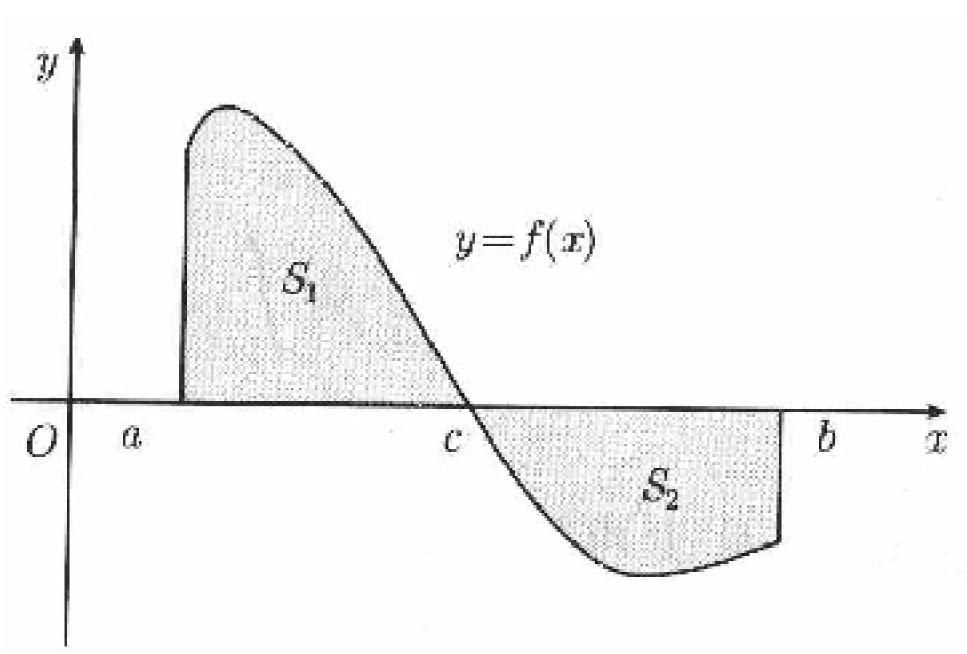


图 7-1-4 定积分的几何意义

等于它在 Ox 轴上方的图形与 Ox 轴所围区域的面积减去它在 Ox 轴下方的图形与 Ox 轴所围区域的面积. 尽管这个结论是针对函数 f 在区间 $[a,b]$ 上只变一次符号的情形证明的, 但易见这个结论对 f 多次变号的一般情形也成立.

定理 7.1.4 (定积分的保序性) 如果 f 和 g 都在 $[a,b]$ 上可积, 且 $f(x) \leqslant g(x)$, $\forall x \in [a,b]$, 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

证明 设 $\Delta = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n\}$ 是区间 $[a,b]$ 的任意一个分割, $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\}$ 是任意一个相应的介点集. 由于 $f(\xi_k) \leqslant g(\xi_k)$, $k = 1, 2, \cdots$, 所以

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^n g(\xi_k)\Delta x_k.$$

于是类似于数列极限和函数极限的保序性, 有

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k \leqslant \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{k=1}^n g(\xi_k)\Delta x_k,$$

即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

证毕.

推论 7.1.1 如果 f 在 $[a,b]$ 上可积, 且 $f(x) \geqslant 0$, $\forall x \in [a,b]$, 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

推论 7.1.2 如果 f 在 $[a,b]$ 上可积, 且 $m \leqslant f(x) \leqslant M$, $\forall x \in [a,b]$, 则

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a).$$

证明 根据定积分的定义不难证明对任意常数 c 都成立

$$\int_a^b c\mathrm{d}x = c(b-a).$$

因此, 应用定理 7.1.4 就得到

$$m(b-a) = \int_a^b m\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b M\mathrm{d}x = M(b-a).$$

证毕.

定理 7.1.5 如果 f 在 $[a,b]$ 上可积, 则 $|f|$ 也在 $[a,b]$ 上可积, 且

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

证明 关于 $|f|$ 的可积性以后再证明 (7.4 节), 这里仅证明上述不等式. 事实上, 由于恒成立

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|, \quad \forall x \in [a,b],$$

所以根据定理 7.1.4 可知

$$-\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

据此立得所证不等式. 证毕.

例 1 已知对任意自然数 m 有 $\displaystyle\int_a^b x^m\mathrm{d}x = \frac{1}{m+1}(b^{m+1} - a^{m+1})$ (本节习题第 4 题). 证明:

$$\frac{13}{42} \leqslant \int_0^1 \sin x^2\mathrm{d}x \leqslant \frac{13}{42} + \frac{1}{1320}.$$

证明 从 5.7 节例 6 可知

$$x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}, \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

因此

$$x^2 - \frac{x^6}{6} \leqslant \sin x^2 \leqslant x^2 - \frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{120}, \quad \forall x \in [0,1].$$

根据定理 7.1.4 有

$$\int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^6}{6}\right)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \sin x^2\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{120}\right)\mathrm{d}x.$$

而

$$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3\Big|_{x=0}^1 = \frac{1}{3}, \quad \int_0^1 x^6\mathrm{d}x = \frac{1}{7}x^7\Big|_{x=0}^1 = \frac{1}{7}, \quad \int_0^1 x^{10}\mathrm{d}x = \frac{1}{11}x^{11}\Big|_{x=0}^1 = \frac{1}{11},$$

所以

$$\int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^6}{6}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2\mathrm{d}x - \frac{1}{6}\int_0^1 x^6\mathrm{d}x = \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{7} = \frac{13}{42},$$

$$\int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{120}\right)\mathrm{d}x = \frac{13}{42} + \frac{1}{120}\int_0^1 x^{10}\mathrm{d}x = \frac{13}{42} + \frac{1}{120}\cdot\frac{1}{11} = \frac{13}{42} + \frac{1}{1320}.$$

把这些结果代入前面得到的不等式, 就得到了需要证明的不等式.

例 2 设 α 是给定的正常数. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 (1+x^n)^\alpha\mathrm{d}x = 1.$$

证明 对任意 $0 < \delta < 1$, 根据定积分的区间可加性有

$$1 \leqslant \int_0^1 (1+x^n)^\alpha\mathrm{d}x = \int_0^{1-\delta} (1+x^n)^\alpha\mathrm{d}x + \int_{1-\delta}^1 (1+x^n)^\alpha\mathrm{d}x.$$

对于等号右端的第一个积分, 因为当 $0 \leqslant x \leqslant 1-\delta$ 时, $(1+x^n)^\alpha \leqslant [1+(1-\delta)^n]^\alpha$, 所以

$$\int_0^{1-\delta}(1+x^n)^\alpha \mathrm{d}x \leqslant [1+(1-\delta)^n]^\alpha \cdot (1-\delta) < [1+(1-\delta)^n]^\alpha.$$

对于等式右端的第二个积分, 因为当 $1-\delta \leqslant x \leqslant 1$ 时, $(1+x^n)^\alpha \leqslant 2^\alpha$, 所以

$$\int_{1-\delta}^1 (1+x^n)^\alpha \mathrm{d}x \leqslant 2^\alpha[1-(1-\delta)] = 2^\alpha\delta.$$

因此

$$1 \leqslant \int_0^1 (1+x^n)^\alpha \mathrm{d}x \leqslant [1+(1-\delta)^n]^\alpha + 2^\alpha\delta.$$

现在对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 先取 $0 < \delta < 1$ 充分小使得 $2^\alpha\delta \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ $\left(如取\ \delta = \frac{\varepsilon}{2^{1+\alpha}}\right)$; 取定这样的 δ 之后, 再取 N 充分大使当 $n > N$ 时有 $[1+(1-\delta)^n]^\alpha < 1+\frac{\varepsilon}{2}$. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\delta)^n = 0$, 进而 $\lim\limits_{n\to\infty}[1+(1-\delta)^n]^\alpha = 1$, 所以这样的 N 是存在的. 则当 $n > N$ 时就有

$$1 \leqslant \int_0^1 (1+x^n)^\alpha \mathrm{d}x < 1+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = 1+\varepsilon.$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 (1+x^n)^\alpha \mathrm{d}x = 1$. 证毕.

习 题 7.1

1. 按以下步骤证明函数 $f(x) = x$ 在任意区间 $[a,b]$ 上黎曼可积且 $\int_a^b x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$.

(1) 设 $\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 是区间 $[a,b]$ 的任意一个分割. 证明:

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2 = 0,$$

其中, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, $\|\Delta\| = \max\limits_{1\leqslant x_i\leqslant n}\Delta x_i$ (下同);

(2) 设 $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\}$ 是从属于分割 Δ 的任意一组介点. 证明:

$$\frac{1}{2}(b^2-a^2) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n(\Delta x_i)^2 \leqslant \sum_{i=1}^n \xi_i\Delta x_i \leqslant \frac{1}{2}(b^2-a^2) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n(\Delta x_i)^2,$$

进而 $\lim\limits_{\|\Delta\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^n \xi_i\Delta x_i = \frac{1}{2}(b^2-a^2)$.

2. 按以下步骤证明 $\cos x$ 在任意区间 $[a,b]$ 上黎曼可积且 $\int_a^b \cos x\mathrm{d}x = \sin b - \sin a$:

(1) 设 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 是区间 $[a,b]$ 的一个分割, $\varXi=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}$ 和 $H=\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n\}$ 是从属于分割 Δ 的任意两组介点. 证明:

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}|\cos\xi_i-\cos\eta_i|\Delta x_i=0;$$

(2) 对每个 $1\leqslant i\leqslant n$, 取 η_i 是使得等式 $\sin x_i-\sin x_{i-1}=\cos\eta_i(x_i-x_{i-1})$ 成立的介点. 因为 $(\sin x)'=\cos x$, 根据微分中值定理这样的 η_i 是存在的. 证明:

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\cos\xi_i\Delta x_i-(\sin b-\sin a)\right|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|\cos\xi_i-\cos\eta_i|\Delta x_i,$$

进而 $\displaystyle\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\cos\xi_i\Delta x_i=\sin b-\sin a.$

3. 设 $0\leqslant a<b$. 按以下步骤证明函数 x^2 在 $[a,b]$ 上黎曼可积且 $\displaystyle\int_a^b x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}(b^3-a^3)$:

(1) 设 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 是区间 $[a,b]$ 的任意一个分割. 证明:

$$0\leqslant\sum_{i=1}^{n}x_i^2\Delta x_i-\sum_{i=1}^{n}x_{i-1}^2\Delta x_i\leqslant 2b\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2,$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2\Delta x_i+\sum_{i=1}^{n}x_{i-1}x_i\Delta x_i+\sum_{i=1}^{n}x_{i-1}^2\Delta x_i=b^3-a^3;$$

(2) 设 $\varXi=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}$ 是任意一组从属于分割 Δ 的介点. 证明:

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\Delta x_i-\frac{1}{3}(b^3-a^3)\right|\leqslant\frac{4}{3}b(b-a)\|\Delta\|,$$

进而 $\displaystyle\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\Delta x_i=\frac{1}{3}(b^3-a^3).$

4. 设 $0\leqslant a<b$, m 是正整数. 运用 3 题的方法或你自己认为更好的其他方法证明:

$$\int_a^b x^m\mathrm{d}x=\frac{1}{m+1}(b^{m+1}-a^{m+1}).$$

5. 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上赫尔德连续, 即存在常数 $0<\mu\leqslant 1$ 和 $C>0$ 使成立

$$|f(x)-f(y)|\leqslant C|x-y|^{\mu},\quad\forall x,y\in[a,b].$$

又设存在在 $[a,b]$ 上连续、在 (a,b) 上可微的函数 F 使 $F'(x)=f(x)$, $\forall x\in(a,b)$. 证明: f 在 $[a,b]$ 上可积, 且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a).$$

6. (1) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. 证明：$f(x-c)$ 在 $[a+c,b+c]$ 上可积，且

$$\int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x;$$

(2) 设 f 是以 $T>0$ 为周期的周期函数，且在 $[0,T]$ 上可积. 证明：对任意实数 $a<b$, f 也在 $[a,b]$ 上可积，且当 $b-a=nT+c$, 其中 n 是非负整数而 $0\leqslant c<T$ 时，有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=n\int_0^T f(x)\mathrm{d}x+\int_a^{a+c} f(x)\mathrm{d}x.$$

特别地，

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$

7. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且积分值为 I. 在 $[a,b]$ 上任意有限个点处改变函数 $f(x)$ 的值，得到一个新的函数为 $f^*(x)$. 证明 $f^*(x)$ 也在 $[a,b]$ 上可积，且积分值仍为 I.

8. (1) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 的任意有限子区间上可积，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=c$. 证明：

$$\lim_{a\to+\infty}\frac{1}{a}\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=c;$$

(2) 设 f 是以 $T>0$ 为周期的周期函数，且在 $[0,T]$ 上可积. 证明：

$$\lim_{a\to+\infty}\frac{1}{a}\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$

9.比较下列积分的大小：

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\mathrm{d}x$ 和 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 和 $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{x}\ln x\mathrm{d}x$ 和 $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt[3]{x}\ln x\mathrm{d}x$.

10.证明下列估计式：

(1) $\displaystyle\sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}}\leqslant\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\leqslant\sqrt{2}$;　　(2) $\displaystyle 1\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\leqslant\frac{\pi}{2}$;

(3) $\displaystyle\frac{1+\ln 2}{2}\leqslant\int_{\mathrm{e}}^{2\mathrm{e}}\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x\leqslant 1$;　　(4) $\displaystyle\sqrt{2}\leqslant\int_2^3\sqrt[x]{x}\mathrm{d}x\leqslant\sqrt[\mathrm{e}]{\mathrm{e}}$.

11.根据第 4 题，对任意自然数 m 有 $\displaystyle\int_a^b x^m\mathrm{d}x=\frac{1}{m+1}(b^{m+1}-a^{m+1})$. 证明：

(1) $\displaystyle 1.086<\int_0^1\sqrt{1+x^4}\mathrm{d}x<1.097$;　　(2) $\displaystyle\frac{156}{210}<\int_0^1\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x<\frac{157}{210}$.

12. 已知当 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上可积时, 它们的乘积 $f(x)g(x)$ 也在 $[a,b]$ 上可积. 据此证明不等式

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^2\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b |g(x)|^2\mathrm{d}x\right).$$

13. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上可积, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递减, $g(x)$ 满足 $0 \leqslant g(x) \leqslant 1$, $\forall x \in [0,1]$. 令 $\theta = \displaystyle\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$. 证明:

(1) $\displaystyle\int_{b-\theta}^b [1-g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^{b-\theta} g(x)\mathrm{d}x, \quad \int_a^{a+\theta}[1-g(x)]\mathrm{d}x = \int_{a+\theta}^b g(x)\mathrm{d}x;$

(2) $\displaystyle\int_{b-\theta}^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^{a+\theta} f(x)\mathrm{d}x.$

14. 证明:

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x = 0;$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \ln(1+x^n)\mathrm{d}x = 0;$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin x)^n\mathrm{d}x = 0;$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 (1-x^n)^\alpha\mathrm{d}x = 1 \ (\alpha \neq 0).$

7.2 定积分的计算

本节讨论定积分的计算问题, 最重要的是微积分基本定理. 在此基础上建立定积分的换元积分公式和分部积分公式.

7.2.1 微积分基本定理

定理 7.2.1 (微积分基本定理) 设 f 在 $[a,b]$ 上可积, 并在 (a,b) 上有原函数 F, 即 $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in (a,b)$. 又设原函数 F 在 $[a,b]$ 上连续. 则成立

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a). \tag{7.2.1}$$

证明 设 $\Delta = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n\}$ 是区间 $[a,b]$ 的任意一个分割. 对每个 $1 \leqslant k \leqslant n$, 对 F 在区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 上应用微分中值定理, 便得到一个点 $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$ 使成立

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = f(\xi_k)\Delta x_k, \quad k = 1, 2, \cdots, n.$$

取介点集 $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\}$. 则函数 f 关于分割 Δ 和这个介点集 Ξ 的积分和为

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^n (F(x_k) - F(x_{k-1})) = F(b) - F(a).$$

另一方面，由 f 在 $[a,b]$ 上可积知，上式最左端的表达式当 $\|\Delta\|\to 0$ 时又趋于 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. 因此必有等式 (7.2.1) 成立. 证毕.

公式 (7.2.1) 也叫做**牛顿–莱布尼茨公式**. 人们常用 $F(x)\big|_a^b$ 表示差 $F(b)-F(a)$, 因此, 牛顿–莱布尼茨公式也可写成

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b,$$

其中 F 是 f 在 $[a,b]$ 上的一个原函数, 即 $F'(x)=f(x)$, $\forall x\in[a,b]$.

微积分基本定理说明, 对于一个可积函数, 如果知道了它的原函数, 就能够很容易地求出它的定积分了. 第 6 章学习了求初等函数的原函数的方法. 于是, 如果那里的函数都是可积函数, 就可对它们应用公式 (7.2.1) 来计算定积分了. 问题在于：什么样的函数是可积函数? 下面的定理 7.2.2 表明, 闭区间 $[a,b]$ 上的所有连续函数都是可积函数.

定理 7.2.2 设函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则它在此区间上可积且有原函数.

这个定理的证明留在 7.3 节给出. 由于初等函数都在其定义域中连续, 所以根据这个定理, 初等函数在其定义域中的任何有限闭区间上都是可积的. 因此, 结合第 6 章学习的求不定积分的方法和牛顿–莱布尼茨公式, 就可以计算很多初等函数的定积分了. 具体地, 对于闭区间 $[a,b]$ 上的一个初等函数 f, 如果 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$, 那么

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b.$$

例 1 求 $\int_a^b x^n\mathrm{d}x$, 其中 n 为正整数.

解 由于

$$\int x^n\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1}+C,$$

所以

$$\int_a^b x^n\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1}\Big|_a^b = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}.$$

例 2 求 $\int_0^1 x^2\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x$.

解 由 6.2 节中例 15 知

$$\int x^2\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left(x^2\mathrm{e}^{3x}-\frac{2}{3}x\mathrm{e}^{3x}+\frac{2}{9}\mathrm{e}^{3x}\right)+C.$$

所以

$$\int_0^1 x^2\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left(x^2\mathrm{e}^{3x}-\frac{2}{3}x\mathrm{e}^{3x}+\frac{2}{9}\mathrm{e}^{3x}\right)\Big|_0^1 = \frac{5\mathrm{e}^3-2}{27}.$$

例 3　求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的面积, $a>0, b>0$.

解　椭圆在第一象限的部分的方程是 $y=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, $0\leqslant x\leqslant a$. 因此, 由椭圆的对称性可知它的面积等于

$$S=4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{4b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x.$$

从 6.2 节中例 9 知

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C,$$

所以

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right)\bigg|_0^a=\frac{1}{4}\pi a^2.$$

因此椭圆的面积为

$$S=\frac{4b}{a}\cdot\frac{1}{4}\pi a^2=\pi ab.$$

在使用牛顿–莱布尼茨公式计算定积分的时候, 必须牢记这个公式成立的条件. 按照定理 7.2.1, 牛顿–莱布尼茨公式成立的条件是

(1) 被积函数 f 在 $[a,b]$ 上可积;

(2) f 在 (a,b) 上有原函数 F, 即 F 在 (a,b) 上可微, 且 $F'(x)=f(x), \forall x\in(a,b)$;

(3) 原函数 F 在 $[a,b]$ 上连续.

显然条件 (1) 是必不可少的, 否则积分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 就没有意义. 以后将会看到, 条件 (2) 在一定程度上可以减弱, 即不必要求对所有 $x\in(a,b)$ 都成立等式 $F'(x)=f(x)$. 至于这个条件具体能够减弱到何种程度, 以后再讨论. 这里必须特别强调的是: **条件 (3) 是不能减弱的, 即原函数 F 必须在闭区间 $[a,b]$ 上处处连续.** 如果不牢记这一条件, 就可能导致错误的计算结果. 由于在第 6 章计算不定积分时, 没有特别强调被积函数和原函数的定义域问题, 而仅着眼于如何把不定积分算出来, 所以初学者往往会因此而忽视牛顿–莱布尼茨公式成立的条件, 导致对这个公式的错误使用. 下面就是这方面的一个例子.

例 4　求 $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

解　这个题目的正确解法是

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan x+C,$$

所以应用牛顿–莱布尼茨公式得

$$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan x\bigg|_{-1}^1=\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

但是如果按下面的方法计算, 则就导致了错误的结果: 由于

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\left[1+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2\right]} = -\int \frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{x}\right)}{1+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2} = -\arctan\frac{1}{x} + C,$$

说明 $-\arctan\dfrac{1}{x}$ 是 $\dfrac{1}{1+x^2}$ 的一个原函数, 所以

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = -\arctan\frac{1}{x}\bigg|_{-1}^{1} = -\left[\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = -\frac{\pi}{2}.$$

之所以发生这样的错误, 是因为严格地讲, 函数 $-\arctan\dfrac{1}{x}$ 并不是在包含原点的区间上 $\dfrac{1}{1+x^2}$ 的原函数, 而仅是它在不包含原点的区间上的原函数. 特别地, 由于函数 $-\arctan\dfrac{1}{x}$ 在每个包含原点的区间上都是不连续的, 所以在包含原点的区间上都不能对它应用牛顿–莱布尼茨公式. 因此, 凡是在包含原点的区间上把 $-\arctan\dfrac{1}{x}$ 当作 $\dfrac{1}{1+x^2}$ 的原函数来应用牛顿–莱布尼茨公式进行的计算, 都是错误的; 而如果在不包含原点的区间上这样做, 则是正确的. 例如,

$$\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x\bigg|_{1}^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12},$$

$$\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = -\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\bigg|_{1}^{\sqrt{3}} = -\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{12}.$$

7.2.2 定积分的换元积分法和分部积分法

应用牛顿–莱布尼茨公式和第 6 章学习的求不定积分的各种技巧, 便可实际地计算出许多初等函数的定积分, 办法是先运用第 6 章学习的各种方法, 算出被积函数的不定积分, 然后运用牛顿–莱布尼茨公式算出定积分的值. 但是在实际计算时, 这样按部就班的做法往往会导致非常烦琐的计算. 其实, 可以把求不定积分的各种技巧与牛顿–莱布尼茨公式结合起来进行计算, 即在使用第 6 章学习的各种方法求积分的过程中, 随时应用牛顿–莱布尼茨公式, 而不是直到算出被积函数的原函数之后, 才使用这个公式. 这样做将简化许多计算. 定理 7.2.3~ 定理 7.2.5 就是为这种求定积分的方法提供理论上的保证.

定理 7.2.3 (第一换元积分法) 设 f 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数, 且它可以表示成 $f(x)=g(\varphi(x))\varphi'(x)$, 其中 g 是 $[\alpha,\beta]$ 上的连续函数, φ 是 $[a,b]$ 上的连续可微函数, 且 $\varphi(a)=\alpha$, $\varphi(b)=\beta$. 则成立

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta g(u)\mathrm{d}u. \tag{7.2.2}$$

证明　因为 g 是 $[\alpha,\beta]$ 上的连续函数, 根据定理 7.2.2, g 在 $[\alpha,\beta]$ 上有原函数. 设 G 是 g 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上的一个原函数. 则由牛顿–莱布尼茨公式得

$$\int_\alpha^\beta g(u)\mathrm{d}u = G(\beta) - G(\alpha).$$

令 $F(x) = G(\varphi(x))$. 由 G 是 g 的原函数知 $G'(u) = g(u)$, $\forall u \in [\alpha,\beta]$, 从而

$$F'(x) = G'(\varphi(x))\varphi'(x) = g(\varphi(x))\varphi'(x) = f(x).$$

这说明 F 是 f 在区间 $[a,b]$ 上的一个原函数. 因此再次应用牛顿–莱布尼茨公式得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = G(\varphi(b)) - G(\varphi(a)) = G(\beta) - G(\alpha) = \int_\alpha^\beta g(u)\mathrm{d}u.$$

证毕.

定理 7.2.3 是用函数 g 在 $[\alpha,\beta]$ 上的定积分来计算函数 $f(x) = g(\varphi(x))\varphi'(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分. 公式 (7.2.2) 也可写成下列形式:

$$\int_a^b g(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(\varphi(x))\mathrm{d}\varphi(x) \xlongequal{\text{令}\varphi(x)=u} \int_\alpha^\beta g(u)\mathrm{d}u.$$

注意这里只要求 φ 在 $[a,b]$ 上连续可微, 而不要求它是从 $[a,b]$ 到 $[\alpha,\beta]$ 的可逆映射. 此外, 定理 7.2.3 假定了 $\varphi(a) < \varphi(b)$, 即 $\alpha < \beta$. 规定: 当 $\alpha > \beta$ 时,

$$\int_\alpha^\beta g(u)\mathrm{d}u = -\int_\beta^\alpha g(u)\mathrm{d}u,$$

以及

$$\int_\alpha^\alpha g(u)\mathrm{d}u = 0.$$

则不难验证, 公式 (7.2.2) 在 $\varphi(a) \geqslant \varphi(b)$, 即 $\alpha \geqslant \beta$ 的情况下也是成立的.

例 5　求 $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{9-2x^2}}$.

解

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{9-2x^2}} &= -\frac{1}{4}\int_{-1}^2 \frac{\mathrm{d}(9-2x^2)}{\sqrt{9-2x^2}} \\ &\xlongequal{\text{令}\,9-2x^2=u} -\frac{1}{4}\int_7^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{2}\sqrt{u}\Big|_7^1 = \frac{1}{2}(\sqrt{7}-1).\end{aligned}$$

例 6　求 $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \frac{x\sin 2x^2}{1+\sin x^2}\mathrm{d}x$.

解

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\frac{x\sin 2x^2}{1+\sin x^2}\mathrm{d}x&=\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\frac{2x\sin x^2\cos x^2}{1+\sin x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\frac{\sin x^2}{1+\sin x^2}\mathrm{d}(\sin x^2)\\&\xlongequal{令\ \sin x^2=u}\int_0^1\frac{u}{1+u}\mathrm{d}u=\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+u}\right)\mathrm{d}u\\&=1-\ln(1+u)\bigg|_0^1=1-\ln 2.\end{aligned}$$

定理 7.2.4 (第二换元积分法)　设 f 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数. 又设 $\psi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ 满足下列条件:

(1) ψ 是区间 $[\alpha,\beta]$ 上的连续可微函数;

(2) $\psi'(t)\neq 0,\ \forall t\in[\alpha,\beta]$;

(3) $\psi(\alpha)=a,\ \psi(\beta)=b$.

则成立

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\psi(t))\psi'(t)\mathrm{d}t. \tag{7.2.3}$$

证明　因为 $f(\psi(t))\psi'(t)$ 是 $[\alpha,\beta]$ 上的连续函数, 根据定理 7.2.2, 它在 $[\alpha,\beta]$ 上有原函数. 设 G 是它的一个原函数. 则由牛顿–莱布尼茨公式得

$$\int_\alpha^\beta f(\psi(t))\psi'(t)\mathrm{d}t=G(\beta)-G(\alpha).$$

令 $F(x)=G(\psi^{-1}(x))$. 由 G 是 $f(\psi(t))\psi'(t)$ 的原函数知 $G'(t)=f(\psi(t))\psi'(t),\ \forall t\in[\alpha,\beta]$, 从而

$$F'(x)=G'(\psi^{-1}(x))(\psi^{-1}(x))'=f(\psi(t))\psi'(t)\bigg|_{t=\psi^{-1}(x)}\cdot\frac{1}{\psi'(\psi^{-1}(x))}=f(x).$$

这说明 F 是 f 在区间 $[a,b]$ 上的一个原函数. 因此再次应用牛顿–莱布尼茨公式得

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x&=F(b)-F(a)=G(\psi^{-1}(b))-G(\psi^{-1}(a))=G(\beta)-G(\alpha)\\&=\int_\alpha^\beta f(\psi(t))\psi'(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

证毕.

公式 (7.2.3) 是用函数 $f(\psi(t))\psi'(t)$ 的定积分来计算函数 $f(x)$ 的定积分, 它可写成下列形式:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\xlongequal{令\ x=\psi(t)}\int_\alpha^\beta f(\psi(t))\psi'(t)\mathrm{d}t.$$

例 7　求 $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$.

解

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x \xlongequal{\text{令}x=\sin t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos t\cdot\cos t\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^2 t\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\mathrm{d}t=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)\mathrm{d}t=\frac{1}{8}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{16}.$$

例 8　求 $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

解　对于这个定积分, 相应的不定积分是无法求出来的, 因而就不能采用先计算不定积分、再应用牛顿–莱布尼茨公式的方法来计算这个定积分. 但是, 应用换元积分法, 却能够算出这个定积分的值. 事实上,

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x.$$

对于等式右端第二个积分, 作变元变换得

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x\xlongequal{\text{令}x=\pi-t}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)}{1+\cos^2(\pi-t)}\mathrm{d}t$$
$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t$$

代入原式, 就得到

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x+\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t$$
$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t=-\pi\arctan(\cos t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}.$$

定理 7.2.5 (分部积分公式)　设 f 和 g 都是区间 $[a,b]$ 上的连续可微函数. 则成立

$$\int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x=f(x)g(x)\Big|_a^b-\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x.$$

证明　因为 $(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$, 说明 $f(x)g(x)$ 是 $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ 的一个原函数, 因此应用牛顿–莱布尼茨公式得

$$\int_a^b\Big(f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\Big)\mathrm{d}x=f(x)g(x)\Big|_a^b,$$

进而应用定积分的线性性便得到

$$\int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x=f(x)g(x)\Big|_a^b-\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x.$$

证毕.

例 9 求 $\int_1^e x^2\ln^2 x\,dx$.

解

$$\int_1^e x^2\ln^2 x\,dx=\frac{1}{3}\int_1^e \ln^2 x\,dx^3=\frac{1}{3}\left[x^3\ln^2 x\Big|_1^e-2\int_1^e x^2\ln x\,dx\right]$$
$$=\frac{1}{3}\left[e^3-\frac{2}{3}\int_1^e \ln x\,dx^3\right]=\frac{1}{3}\left[e^3-\frac{2}{3}\left(x^3\ln x\Big|_1^e-\int_1^e x^2dx\right)\right]$$
$$=\frac{1}{3}\left[e^3-\frac{2}{3}\left(e^3-\frac{1}{3}x^3\Big|_1^e\right)\right]=\frac{5e^3-2}{27}.$$

例 10 求 $\int_0^c e^{ax}\sin(bx)dx$ 和 $\int_0^c e^{ax}\cos(bx)dx$ $(a,b\neq 0,\ c>0)$.

解

$$\int_0^c e^{ax}\sin(bx)dx=\frac{1}{a}\int_0^c \sin(bx)de^{ax}=\frac{1}{a}\left(e^{ax}\sin(bx)\Big|_0^c-\int_0^c e^{ax}d\sin(bx)\right)$$
$$=\frac{1}{a}\left(e^{ac}\sin(bc)-b\int_0^c e^{ax}\cos(bx)dx\right)$$
$$=\frac{1}{a}e^{ac}\sin(bc)-\frac{b}{a^2}\int_0^c \cos(bx)de^{ax}$$
$$=\frac{1}{a}e^{ac}\sin(bc)-\frac{b}{a^2}\left(e^{ax}\cos(bx)\Big|_0^c+b\int_0^c e^{ax}\sin(bx)dx\right)$$
$$=\frac{1}{a}e^{ac}\sin(bc)-\frac{b}{a^2}\left(e^{ac}\cos(bc)-1\right)-\frac{b^2}{a^2}\int_0^c e^{ax}\sin(bx)dx,$$

因此

$$\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)\int_0^c e^{ax}\sin(bx)dx=\frac{a\sin(bc)-b\cos(bc)}{a^2}e^{ac}+\frac{b}{a^2},$$

进而得到

$$\int_0^c e^{ax}\sin(bx)dx=\frac{a\sin(bc)-b\cos(bc)}{a^2+b^2}e^{ac}+\frac{b}{a^2+b^2}.$$

类似地可求出

$$\int_0^c e^{ax}\cos(bx)dx=\frac{b\sin(bc)+a\cos(bc)}{a^2+b^2}e^{ac}-\frac{a}{a^2+b^2}.$$

习　题　7.2

1. 计算下列定积分:

(1) $\int_0^1 (3x^2+2x+1)dx$;　　(2) $\int_1^4 \frac{(x-2)^2}{x\sqrt{x}}dx$;

(3) $\displaystyle\int_{-2}^{2}\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$;　　(4) $\displaystyle\int_{2}^{3}\frac{1+x^2}{1-x^2}\mathrm{d}x$;

(5) $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x$;　　(6) $\displaystyle\int_{2}^{3}(3^x-2^x)^3\mathrm{d}x$;

(7) $\displaystyle\int_{1}^{e}\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$;　　(8) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\mathrm{d}x$;

(9) $\displaystyle\int_{-1}^{2}x|x-1|\mathrm{d}x$;　　(10) $\displaystyle\int_{-\mathrm{e}^2}^{\mathrm{e}}\ln(1+|x|)\mathrm{d}x$;

(11) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\,\mathrm{sgn}\,(\cos 2x)\mathrm{d}x$;　　(12) $\displaystyle\int_{0}^{3}f(x)\mathrm{d}x$, 其中

$$f(x)=\begin{cases}1-x^2, & 当\ 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \mathrm{e}^x-1, & 当\ 1<x\leqslant 2,\\ \mathrm{e}^{2(x-1)}-2x+3, & 当\ 2<x\leqslant 3.\end{cases}$$

2. 求下列图形的面积:

(1) 用抛物线 $y=2x^2$ 分圆 $x^2+y^2\leqslant 8$ 所得两部分的面积;

(2) 用直线 $x=c$ 分椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1$ 所得两部分的面积, $a>c>0$, $b>0$;

(3) 用直线 $y=x+c$ 分椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1$ 所得两部分的面积, $a>0$, $b>0$, $-\sqrt{a^2+b^2}<c<\sqrt{a^2+b^2}$.

3. 把双曲线 $x^2-y^2=a^2$ 上的点 $P(x,y)$ 的坐标表示成双曲线扇形 OPP' 的面积 S 的函数, 这个扇形是由双曲线上的弧 $P'P$ 与从原点 O 发出的二射线 OP 及 OP' 所围成, 点 $P'(x,-y)$ 是点 $P(x,y)$ 关于 Ox 轴的对称点.

4. 应用变元变换计算下列定积分:

(1) $\displaystyle\int_{0}^{1}x(1-x^2)^9\mathrm{d}x$;　　(2) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x\mathrm{d}x}{x^2+x+1}$;　　(4) $\displaystyle\int_{-\ln 2}^{\ln 2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$;

(5) $\displaystyle\int_{0}^{\pi}\cos^3 x\sin 2x\mathrm{d}x$;　　(6) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^3 x}$;

(7) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$;　　(8) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{x^3\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$;

(9) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x$;　　(10) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}\mathrm{d}x$.

5. 应用分部积分结合变元变换计算下列定积分:

(1) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (x\ln x)^2\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi} x^3\sin x\mathrm{d}x$;

(4) $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2\sin x\cos 2x\mathrm{d}x$;

(5) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} x\arctan x\mathrm{d}x$;

(6) $\displaystyle\int_1^{4} \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$;

(7) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^{x}\cos 2x\mathrm{d}x$;

(8) $\displaystyle\int_0^{1} \ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x$.

6. 利用定积分求以下极限:

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$;

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{2n^2}\right)$;

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$;

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$;

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}\quad(p>0)$;

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$, f 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数.

7. 计算定积分 $\displaystyle\int_0^{\frac{4\pi}{3}}\frac{\mathrm{d}x}{3\cos^2 x+\sin^2 x}$ 如下: 因为

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{3\cos^2 x+\sin^2 x}&=\int\frac{\mathrm{d}x}{(3+\tan^2 x)\cos^2 x}=\int\frac{\mathrm{d}\tan x}{(3+\tan^2 x)}\\&=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan x\right),\end{aligned}$$

所以由牛顿–莱布尼茨公式得

$$\int_0^{\frac{4\pi}{3}}\frac{\mathrm{d}x}{3\cos^2 x+\sin^2 x}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan x\right)\bigg|_0^{\frac{4\pi}{3}}=\frac{\pi}{4\sqrt{3}}.$$

但另一方面, 由于 $3\cos^2 x+\sin^2 x=2\cos^2 x+1\leqslant 3$, 所以

$$\int_0^{\frac{4\pi}{3}}\frac{\mathrm{d}x}{3\cos^2 x+\sin^2 x}\geqslant\frac{1}{3}\cdot\frac{4\pi}{3}=\frac{4\pi}{9}>\frac{\pi}{4\sqrt{3}}.$$

问矛盾何在? 正确的计算应当如何进行?

8. 计算定积分 $\int_0^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1+\tan^2 x}{1+2\tan^2 x}\mathrm{d}x$ 的如下算法是否正确?

作变元变换 $u=\tan x$, 则因 $\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}=(1+\tan^2 x)\mathrm{d}x$, 所以

$$\int_0^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1+\tan^2 x}{1+2\tan^2 x}\mathrm{d}x=\int_0^{-1}\frac{\mathrm{d}u}{1+2u^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}u)\Big|_0^{-1}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}).$$

请给出正确的计算方式.

9. 设 f 是连续函数. 证明:

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x$;

(2) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$;

(3) $\int_0^{a} x^3 f(x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{a^2} xf(x)\mathrm{d}x \quad (a>0)$;

(4) $\int_1^{a} f\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{a^2}{x^2}\right)\mathrm{d}x=a\int_1^{a} f\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x^2} \quad (a>1)$.

10. 写出积分 $\int_0^{2\pi} f(x)\sin x\mathrm{d}x$ 经变元变换 $\sin x=t$ 后所得到的正确表达式.

11. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的凸函数. 证明下述阿达马不等式:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

12. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续、在 (a,b) 上二阶可导且二阶导函数有界. 证明:

$$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x\leqslant(b-a)\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|+\frac{1}{6}(b-a)^3\sup_{a<x<b}|f''(x)|.$$

13. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的二阶导数, 且 $f(a)=f(b)=0$. 证明:

(1) $\left|f(x)\cdot\frac{b-a}{(x-a)(b-x)}\right|\leqslant\int_a^b|f''(x)|\mathrm{d}x$;

(2) $\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|\leqslant\frac{b-a}{4}\int_a^b|f''(x)|\mathrm{d}x$.

14. (1) 证明: $\int_0^{\sqrt{2\pi}}\sin x^2\mathrm{d}x>0$;

(2) 证明: $\int_0^1\frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x>\int_0^1\frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

15. 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数, $f(0)=0$, 且 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $[0,1]$ 上可积. 证明:

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 f(x^n)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x.$$

7.3 连续函数的可积性

本节的主要任务是证明定理 7.2.2 并附带建立积分中值定理.

7.3.1 连续函数的可积性

下面先证明:

定理 7.3.1 设函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则它在此区间上可积.

证明 定理证明的关键思想是应用有限闭区间上的连续函数必一致连续这一性质. 分两步完成证明.

第一步: 找函数 f 在区间 $[a,b]$ 上可能的定积分值 I.

对每个正整数 n, 把区间 $[a,b]$ 作 2^n 等分, 记这样作出的分割为 $\Delta_n=\{x_0,x_1,\cdots,x_{2^n}\}$. 对每个 $1\leqslant k\leqslant 2^n$, 取函数 f 在小区间 $[x_{k-1},x_k]$ 上的最小值点记为 ξ_k, 并取它在该小区间上的最大值点记为 η_k, 然后作积分和

$$A_n=\sum_{k=1}^{2^n}f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}),\quad B_n=\sum_{k=1}^{2^n}f(\eta_k)(x_k-x_{k-1}),\quad n=1,2,\cdots.$$

这样就得到了两个数列 $\{A_n\}$ 和 $\{B_n\}$. 显然成立

$$A_n\leqslant B_n,\quad n=1,2,\cdots.$$

另外, 由于分割 Δ_{n+1} 是把分割 Δ_n 的每个小区间二等分得到的, 所以从介点 ξ_k 和 η_k 的取法容易看出, 成立下列关系式

$$A_n\leqslant A_{n+1},\quad B_{n+1}\leqslant B_n,\quad n=1,2,\cdots.$$

这样 $\{[A_n,B_n]\}$ 就是一个区间套. 断言: $\lim\limits_{n\to\infty}(B_n-A_n)=0$. 事实上, 由 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续知它在此区间上一致连续, 所以对任意给定的 $\varepsilon>0$, 都存在相应的 $\delta>0$, 使对任意 $x,x'\in[a,b]$, 只要它们满足 $|x-x'|<\delta$, 就成立

$$|f(x)-f(x')|<\frac{\varepsilon}{b-a}.\tag{7.3.1}$$

取正整数 N, 使当 $n>N$ 时 $\dfrac{b-a}{2^n}<\delta$, 即当 $n>N$ 时分割 Δ_n 所分每个小区间的长度都小于 δ, 从而 $|\xi_k-\eta_k|<\delta$, 这样就有 $|f(\xi_k)-f(\eta_k)|<\dfrac{\varepsilon}{b-a}$, 于是

$$\begin{aligned}|A_n-B_n|&=\left|\sum_{k=1}^{2^n}f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})-\sum_{k=1}^{2^n}f(\eta_k)(x_k-x_{k-1})\right|\\&\leqslant\sum_{k=1}^{2^n}|f(\xi_k)-f(\eta_k)|(x_k-x_{k-1})\end{aligned}$$

$$<\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{2^n}(x_k-x_{k-1})=\frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(b-a)=\varepsilon.$$

断言得证.

所以, 根据区间套定理知, 数列 $\{A_n\}$ 和 $\{B_n\}$ 都收敛且极限相同. 记

$$I=\lim_{n\to\infty}A_n=\lim_{n\to\infty}B_n.$$

第二步: 证明上面找到的实数 I 确为函数 f 在 $[a,b]$ 上的定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=I$.

这只需证明对任意给定的 $\varepsilon>0$, 都存在相应的 $\delta>0$, 使对函数 f 的任意一个积分和 $S(f,\Delta,\varXi)$, 只要这个积分和对应的分割 Δ 满足 $\|\Delta\|<\delta$, 就一定成立

$$|S(f,\Delta,\varXi)-I|<\varepsilon. \tag{7.3.2}$$

为证明这一点, 再次利用函数 f 在区间 $[a,b]$ 上的一致连续性, 由这一性质可知对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在相应的 $\delta>0$, 使对任意 $x,x'\in[a,b]$, 只要它们满足 $|x-x'|<\delta$, 就成立

$$|f(x)-f(x')|<\frac{\varepsilon}{3(b-a)}. \tag{7.3.3}$$

断言: 只要 $\|\Delta\|<\delta$ 时, 那么式 (7.3.2) 便成立. 为此, 对任意满足 $\|\Delta\|<\delta$ 的分割 Δ, 取正整数 n 充分大, 以使 $\frac{b-a}{2^n}<\delta$, 且使

$$|A_n-I|<\frac{1}{3}\varepsilon.$$

然后作分割 Δ 和 Δ_n 的公共加细, 即把它们两个的分点合在一起构成一个新的分割, 记作 Δ', 并任意选取相应的介点集 $\varXi'$, 构作积分和 $S(f,\Delta',\varXi')$. 由于分割 Δ' 是在分割 Δ 中增加了一些分点得到的, 所以积分和 $S(f,\Delta,\varXi)$ 中的每一项都可分解成一些项的和, 使得它与 $S(f,\Delta',\varXi')$ 有相同的项数, 且对应项的区间长度 Δx_i 部分相同, 不同的只是函数值 $f(\xi_i)$ 部分. 于是应用式 (7.3.3) 容易看出, 成立

$$|S(f,\Delta',\varXi')-S(f,\Delta,\varXi)|<\frac{\varepsilon}{3(b-a)}\cdot(b-a)=\frac{1}{3}\varepsilon.$$

类似地, 有

$$|S(f,\Delta',\varXi')-A_n|<\frac{\varepsilon}{3(b-a)}\cdot(b-a)=\frac{1}{3}\varepsilon.$$

因此有

$$\begin{aligned}|S(f,\Delta,\varXi)-I|\leqslant&|S(f,\Delta,\varXi)-S(f,\Delta',\varXi')|+|S(f,\Delta',\varXi')-A_n|+|A_n-I|\\<&\frac{1}{3}\varepsilon+\frac{1}{3}\varepsilon+\frac{1}{3}\varepsilon=\varepsilon.\end{aligned}$$

断言得证. 因此

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} S(f,\Delta,\Xi) = I,$$

表明 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = I$. 证毕.

7.3.2 积分中值定理

定理 7.3.2 (积分第一中值定理) 设函数 f 和 g 都在区间 $[a,b]$ 上连续, 且 g 在 $[a,b]$ 上不变号. 则存在 $\xi \in [a,b]$ 使成立

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x. \tag{7.3.4}$$

证明 不妨设 $g(x) \geqslant 0, \forall x \in [a,b]$. 如图 7-3-1 所示如果 $g(x) = 0, \forall x \in [a,b]$, 则式 (7.3.4) 两端的两个积分都等于零, 这时对任意 $\xi \in [a,b]$, (7.3.4) 都成立. 因此下设 $g(x) \not\equiv 0$. 则 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \neq 0$. 令 m 和 M 分别为函数 f 在区间 $[a,b]$ 上的最小值和最大值. 则有

$$m \leqslant f(x) \leqslant M, \quad \forall x \in [a,b],$$

进而

$$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x), \quad \forall x \in [a,b].$$

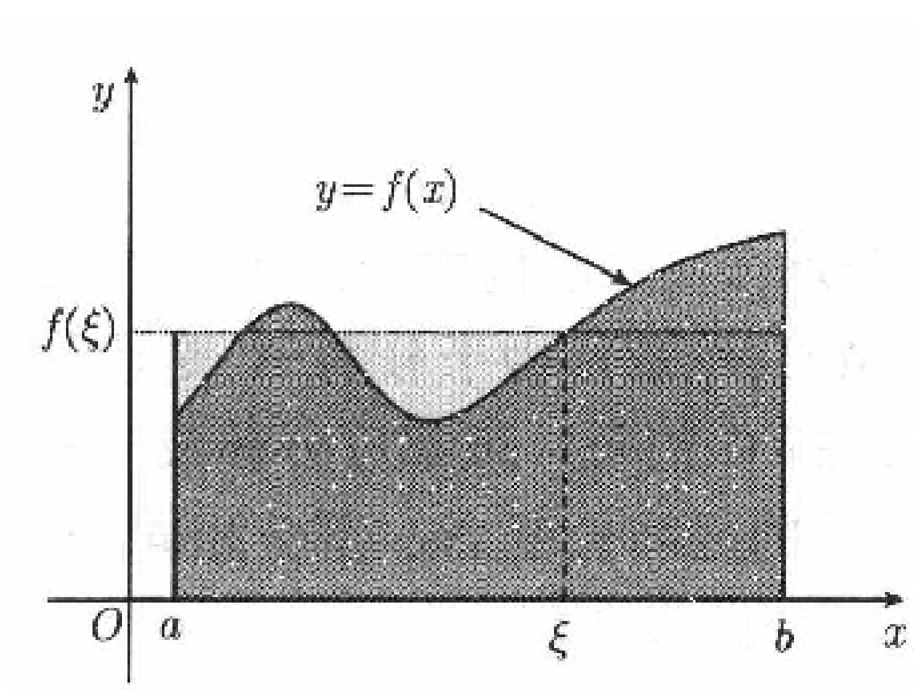


图 7-3-1 积分中值定理

由积分的保序性, 由此得到

$$m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x,$$

进而

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x} \leqslant M.$$

因为 f 在区间 $[a,b]$ 上连续, 根据介值定理, 由此推知存在 $\xi \in [a,b]$ 使成立

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}.$$

把它改写就得到了式 (7.3.4). 证毕.

积分第一中值定理和微分中值定理类似, 是处理如定积分的估计等问题时很有用的一个工具. 下面举一例说明它的应用.

例 1 设 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上可微且导函数在 $[0,2\pi]$ 上可积. 证明:

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = f(0)-f(2\pi), \tag{7.3.5}$$

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = 0. \tag{7.3.6}$$

证明 对每个自然数 n 有

$$\begin{aligned} n\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x &= \int_0^{2n\pi} f\left(\frac{x}{n}\right)\sin x\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n}\int_{2(k-1)\pi}^{2k\pi} f\left(\frac{x}{n}\right)\sin x\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left[\int_{2(k-1)\pi}^{(2k-1)\pi} f\left(\frac{x}{n}\right)\sin x\,\mathrm{d}x + \int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi} f\left(\frac{x}{n}\right)\sin x\,\mathrm{d}x\right] \\ &= \sum_{k=1}^{n}\int_{2(k-1)\pi}^{(2k-1)\pi}\left[f\left(\frac{x}{n}\right)-f\left(\frac{x+\pi}{n}\right)\right]\sin x\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

对最后这个等号右端的积分应用积分第一中值定理, 然后再应用微分中值定理, 可知存在 $2(k-1)\pi \leqslant \xi_k \leqslant (2k-1)\pi$ 和 $\dfrac{\xi_k}{n} < \eta_k < \dfrac{\xi_k+\pi}{n}$ 使得

$$\begin{aligned} n\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x &= \sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\frac{\xi_k}{n}\right)-f\left(\frac{\xi_k+\pi}{n}\right)\right]\int_{2(k-1)\pi}^{(2k-1)\pi}\sin x\,\mathrm{d}x \\ &= 2\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\frac{\xi_k}{n}\right)-f\left(\frac{\xi_k+\pi}{n}\right)\right] = -\frac{2\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} f'(\eta_k), \end{aligned}$$

由 $\dfrac{\xi_k}{n} < \eta_k < \dfrac{\xi_k+\pi}{n}$ 知 $\dfrac{2(k-1)\pi}{n} < \eta_k < \dfrac{2k\pi}{n}$, 所以最后这个表达式是 $f'(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上关于 n 等分该区间所得分割的一个积分和. 因此由 $f'(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上可积就得到

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = -\lim_{n\to\infty}\frac{2\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} f'(\eta_k) = -\int_0^{2\pi} f'(x)\,\mathrm{d}x = f(0)-f(2\pi).$$

这就证明了式 (7.3.5).

为了证明式 (7.3.6), 写

$$\begin{aligned} &n\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \\ =\ &\int_0^{2n\pi} f\left(\frac{x}{n}\right)\cos x\,\mathrm{d}x \\ =\ &\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{x}{n}\right)\cos x\,\mathrm{d}x + \int_{(2n-\frac12)\pi}^{2n\pi} f\left(\frac{x}{n}\right)\cos x\,\mathrm{d}x + \int_{(2n-\frac32)\pi}^{(2n-\frac12)\pi} f\left(\frac{x}{n}\right)\cos x\,\mathrm{d}x \\ &+\sum_{k=1}^{n-1}\int_{(2k-\frac32)\pi}^{(2k+\frac12)\pi} f\left(\frac{x}{n}\right)\cos x\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

应用积分第一中值定理容易得到

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{x}{n}\right)\cos x\,\mathrm{d}x+\int_{(2n-\frac{1}{2})\pi}^{2n\pi} f\left(\frac{x}{n}\right)\cos x\,\mathrm{d}x+\int_{(2n-\frac{3}{2})\pi}^{(2n-\frac{1}{2})\pi} f\left(\frac{x}{n}\right)\cos x\,\mathrm{d}x\right]$$
$$=f(0)+f(2\pi)-2f(2\pi)=f(0)-f(2\pi).$$

而与前面类似的推导可知

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\int_{(2k-\frac{3}{2})\pi}^{(2k+\frac{1}{2})\pi} f\left(\frac{x}{n}\right)\cos x\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty}\frac{2\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f'(\eta_k')\\ &=\int_0^{2\pi} f'(x)\,\mathrm{d}x=f(2\pi)-f(0).\end{aligned}$$

相加就得到了式 (7.3.6). 证毕.

7.3.3 连续函数原函数的存在性

第 6 章引进了函数的原函数的概念, 并研究了对一些初等函数, 如何求它们的原函数. 正如不是所有的函数都有导函数一样, 并非所有的函数都有原函数. 于是, 一个自然的问题是怎样的函数有原函数? 特别是初等函数是否都有原函数? 下面的定理 7.3.3 保证了连续函数必有原函数, 从而初等函数都有原函数.

定理 7.3.3 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上连续. 定义函数 F 如下:

$$F(x)=\int_a^x f(y)\mathrm{d}y,\quad \forall x\in[a,b].$$

则 F 在 $[a,b]$ 上连续可微, 且 $F'(x)=f(x)$, $\forall x\in[a,b]$.

证明 只需证明: 对任意 $x_0\in[a,b]$ 都成立

$$\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=f(x_0)$$

(当 x_0 是区间的端点时, 上述极限应当理解为单侧极限).

先设 $x>x_0$. 这时由定积分的区间可加性, 有

$$F(x)-F(x_0)=\int_a^x f(y)\mathrm{d}y-\int_a^{x_0} f(y)\mathrm{d}y=\int_{x_0}^x f(y)\mathrm{d}y,$$

再应用积分第一中值定理, 可知存在 $\xi_x\in[x_0,x]$ 使成立

$$\int_{x_0}^x f(y)\mathrm{d}y=f(\xi_x)(x-x_0).$$

因此

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=f(\xi_x).$$

由于 $x_0 \leqslant \xi_x \leqslant x$, 所以 $\lim\limits_{x\to x_0}\xi_x = x_0$, 这样由 f 的连续性就得到

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} f(\xi_x) = f(x_0)$$

(当 $a \leqslant x_0 < b$). 同理可证

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(x_0)$$

(当 $a < x_0 \leqslant b$). 把以上二式结合起来, 就证明了所需要的结论. 证毕.

推论 7.3.1 如果函数 f 在区间 I 上连续, 则 f 在此区间上有原函数.

把定理 7.3.1 和推论 7.3.1 合起来, 就得到了定理 7.2.2.

由于初等函数都在其定义域中连续, 所以上述推论保证了初等函数在其定义域中都有原函数.

定理 7.3.4 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上连续, 函数 u 和 v 都在区间 $[\alpha,\beta]$ 上可导, 且 $u([\alpha,\beta]) \subseteq [a,b]$, $v([\alpha,\beta]) \subseteq [a,b]$. 定义函数 F 如下:

$$F(x) = \int_{v(x)}^{u(x)} f(y)\mathrm{d}y, \quad \forall x \in [\alpha,\beta].$$

则 F 在 $[\alpha,\beta]$ 上可导, 且

$$F'(x) = f(u(x))u'(x) - f(v(x))v'(x), \quad \forall x \in [\alpha,\beta].$$

证明 令

$$G(x) = \int_a^x f(y)\mathrm{d}y, \quad \forall x \in [a,b].$$

则 G 在区间 $[a,b]$ 上可导, 且 $G'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a,b]$. 有

$$F(x) = \int_{v(x)}^{u(x)} f(y)\mathrm{d}y = \int_a^{u(x)} f(y)\mathrm{d}y - \int_a^{v(x)} f(y)\mathrm{d}y = G(u(x)) - G(v(x)).$$

由于 G 在区间 $[a,b]$ 上可导, u 和 v 都在区间 $[\alpha,\beta]$ 上可导, 且 $u([\alpha,\beta]) \subseteq [a,b]$, $v([\alpha,\beta]) \subseteq [a,b]$, 所以由上式和复合函数的求导法则可知 F 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上可导, 且

$$F'(x) = G'(u(x))u'(x) - G'(v(x))v'(x) = f(u(x))u'(x) - f(v(x))v'(x).$$

证毕.

习 题 7.3

1. 设 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的非负连续函数, 且在此区间上不恒等于零. 证明:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0.$$

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且存在在 $[a,b]$ 上连续、在 (a,b) 上可导的函数 F 使得 $F'(x)=f(x)$, $\forall x\in(a,b)$. 试不用定理 7.2.1 和定理 7.3.1 而直接证明: f 在 $[a,b]$ 上可积, 且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a).$$

3. 设 α 是正常数. 应用积分中值定理确定下列积分的正负:

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} x^\alpha \sin x\mathrm{d}x$;　　(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x^\alpha}\mathrm{d}x \quad (0<\alpha\leqslant 1)$;

(3) $\displaystyle\int_{-2}^{2} 2^x x^9\mathrm{d}x$;　　(4) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} x^\alpha \ln x\mathrm{d}x$;

(5) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-x^2}\cos x\mathrm{d}x$;　　(6) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-x^2}\sin x\mathrm{d}x$.

4. 应用积分中值定理估计下列积分:

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{3+\sin x^2}$;　　(2) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^{19}}{\sqrt[3]{1+x^6}}\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_0^{100} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+100}\mathrm{d}x$;　　(4) $\displaystyle\int_2^{3} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

5. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续. 证明: 对任意 $[\alpha,\beta]\subseteq(a,b)$ 成立

$$\lim_{h\to 0}\int_\alpha^\beta \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\mathrm{d}x = f(\beta)-f(\alpha).$$

6. 设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可微且导函数在 $[-\pi,\pi]$ 上可积. 证明:

$$\lim_{n\to\infty} n\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = (-1)^{n-1}[f(\pi)-f(-\pi)],$$

$$\lim_{n\to\infty} n\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = 0.$$

7. 设 $f(x)$ 是 $[0,2\pi]$ 上的连续函数. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x.$$

8. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微且导函数连续. 证明:

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)| \leqslant \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| + \int_a^b |f'(x)|\mathrm{d}x.$$

9. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微且导函数在 $[a,b]$ 上可积. 又设 n 为自然数, 而 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是一组满足条件

$$a+\frac{k-1}{n}(b-a)\leqslant x_k\leqslant a+\frac{k}{n}(b-a),\quad k=1,2,\cdots,n$$

的实数. 证明:

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{n}\int_a^b |f'(x)|\mathrm{d}x.$$

10. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. 令

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t, \quad \forall x \in [a,b].$$

证明以下结论:

(1) $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上利普希兹连续, 即存在常数 $C>0$ 使成立

$$|F(x)-F(y)| \leqslant C|x-y|, \qquad \forall x,y \in [a,b];$$

(2) 对任意使 $f(x)$ 存在右极限 $f(x_0^+) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 的点 $x_0 \in [a,b)$, $F(x)$ 在 x_0 点有右导数, 且 $F'_+(x_0) = f(x_0^+)$; 对任意使 $f(x)$ 存在左极限 $f(x_0^-) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 的点 $x_0 \in (a,b]$, $F(x)$ 在点 x_0 有左导数, 且 $F'_-(x_0) = f(x_0^-)$;

(3) $F(x)$ 在点 $x_0 \in (a,b)$ 可微当且仅当 $f(x)$ 在点 x_0 连续或 x_0 是 $f(x)$ 的可去间断点. 这时 $F'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. 特别当 $f(x)$ 在点 x_0 连续时有 $F'(x_0) = f(x_0)$.

11. 求下列函数的导数:

(1) $f(x) = \displaystyle\int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi t^2)\mathrm{d}t$;

(2) $f(x) = \displaystyle\int_{-\tan x}^{\tan x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}}\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$;

(3) $f(x) = \displaystyle\int_0^{\sqrt{x^2+1}} \mathrm{e}^{-(x^2+1)t^2}\mathrm{d}t$;

(4) $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^3} \ln^p(1+\sqrt{xt})\mathrm{d}t \ \ (p>0)$.

12. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\displaystyle\int_0^x \sin t^2\mathrm{d}t}{\sin^3 x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\displaystyle\int_0^x (\arctan t)^2\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2+1}}$;

(3) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x\left(\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)^2}{\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{2t^2}\mathrm{d}t}$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\displaystyle\int_{\sin x}^{\tan x} \sqrt[3]{\arctan t}\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_{\sin x}^{\tan x} \sqrt[3]{\arcsin t}\,\mathrm{d}t}$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\int_1^n \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t$;

(6) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n}\displaystyle\int_0^{\sqrt[n]{n}} \frac{t\,\mathrm{d}t}{\ln^2 t}$.

7.4 函数可积的达布准则

7.3 节证明了区间 $[a,b]$ 上的连续函数都在该区间上可积. 一个自然的问题是除了连续函数, 还有没有其他类型的函数也是可积的? 这个问题的答案是重要的, 因为在应用中往往需要考虑一些不连续函数的积分. 例如, 对于如图 7-4-1 的脉冲函数, 显然是不连续的函数; 要计算它的图像下方和 x 轴上方区域的面积, 就需要计算这个不连续函数的积分. 本节给出一个判定函数可积性的准则: 达布准则 (达布, Gaston Darboux, 1842~1917, 法国人). 应用这个准则, 便可证明许多不连续函数的可积性. 由于前面已经证明了可积函数必定有界, 所以本节总假定所考虑的函数都是有界函数.

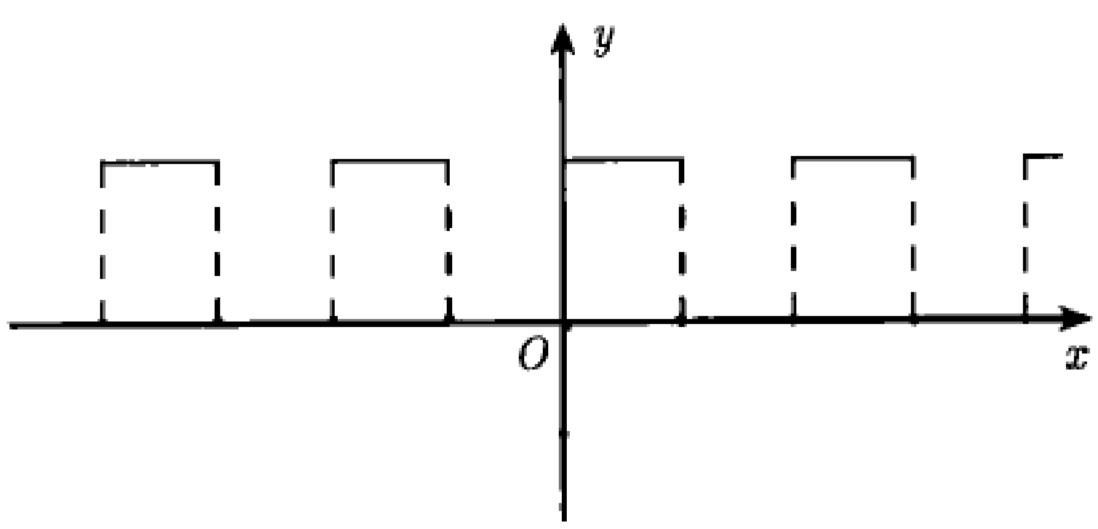


图 7-4-1 脉冲函数的图像

7.4.1 上积分和下积分

回忆对于区间 $[a,b]$ 上给定的一个函数 f, 其黎曼积分和是这样定义的: 对区间 $[a,b]$ 的任意一个分割 $\Delta=\{x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n\}$:

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

和任意一个相应于这个分割的介点集 $\varXi=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}$, 其中 $x_{k-1}\leqslant\xi_k\leqslant x_k$, $k=1,2,\cdots,n$, 函数 f 关于此分割 Δ 和介点集 $\varXi$ 的黎曼积分和 $S(f,\Delta,\varXi)$ 定义为

$$S(f,\Delta,\varXi)=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}).$$

定义 7.4.1 设 f 是区间 $[a,b]$ 上的有界函数. 对 $[a,b]$ 的任意一个分割 Δ: $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$, 记

$$m_k=\inf_{x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k}f(x),\quad M_k=\sup_{x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k}f(x).$$

分别称

$$\underline{S}(f,\Delta)=\sum_{k=1}^{n}m_k\Delta x_k \quad 和 \quad \overline{S}(f,\Delta)=\sum_{k=1}^{n}M_k\Delta x_k$$

为函数 f 关于分割 Δ 的**达布下和**与**达布上和**, 简称**下和**与**上和**.

显然成立下列结论：对 $[a,b]$ 的任意分割 Δ 和任意一个相应的介点集 $\varXi$ 都有

$$\underline{S}(f,\Delta)\leqslant S(f,\Delta,\varXi)\leqslant\overline{S}(f,\Delta).\tag{7.4.1}$$

引理 7.4.1 对于区间 $[a,b]$ 上的有界函数 f 和 $[a,b]$ 的任意一个分割 Δ, f 关于该分割的达布下和 $\underline{S}(f,\Delta)$ 和达布上和 $\overline{S}(f,\Delta)$ 分别是 f 关于这个分割的所有 (随介点集 $\varXi$ 而变的) 黎曼积分和 $S(f,\Delta,\varXi)$ 的下确界和上确界：

$$\underline{S}(f,\Delta)=\inf\{S(f,\Delta,\varXi):\varXi\ \text{是相应于分割}\ \Delta\ \text{的任意介点集}\},$$

$$\overline{S}(f,\Delta)=\sup\{S(f,\Delta,\varXi):\varXi\ \text{是相应于分割}\ \Delta\ \text{的任意介点集}\}.$$

证明 只对下和给出证明, 因为上和的情形类似. 由 (7.4.1) 知, $\underline{S}(f,\Delta)$ 是所有 $S(f,\Delta,\varXi)$ 的下界, 故只需再证明对任意给定的 $\varepsilon>0$, 必存在相应的介点集 $\varXi$, 使得 $S(f,\Delta,\varXi)<\underline{S}(f,\Delta)+\varepsilon$. 事实上, 由于 m_k 是函数 f 在区间 $[x_{k-1},x_k]$ 上的下确界, 所以对给定的 $\varepsilon>0$, 必存在相应的 $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$ 使成立

$$f(\xi_k)<m_k+\frac{\varepsilon}{b-a},\quad k=1,2,\cdots,n.$$

取介点集 $\varXi=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}$, 则相应的黎曼积分和 $S(f,\Delta,\varXi)$ 满足

$$S(f,\Delta,\varXi)=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k<\sum_{k=1}^{n}\left(m_k+\frac{\varepsilon}{b-a}\right)\Delta x_k=\underline{S}(f,\Delta)+\varepsilon.$$

证毕.

引理 7.4.2 设 Δ_1 和 Δ_2 是区间 $[a,b]$ 的两个分割, Δ_2 是 Δ_1 的加细, 即 Δ_2 是对 Δ_1 增加了一些分点所得到的分割. 则成立

$$\underline{S}(f,\Delta_1)\leqslant\underline{S}(f,\Delta_2),\qquad\overline{S}(f,\Delta_1)\geqslant\overline{S}(f,\Delta_2),$$

即随着分割加细, 下和增大而上和减小.

证明 应用数学归纳法, 问题归结为证明 Δ_2 只比 Δ_1 多一个分点的情形. 设 $\Delta_1=\{x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, 而 Δ_2 比 Δ_1 多出来的那一个分点 x' 位于 Δ_1 的第 k_0 个小区间 $[x_{k_0-1},x_{k_0}]$ 中, 即 $x_{k_0-1}<x'<x_{k_0}$. 令

$$m_k=\inf_{x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k}f(x),\quad m'_{k_0}=\inf_{x_{k_0-1}\leqslant x\leqslant x'}f(x),\quad m''_{k_0}=\inf_{x'\leqslant x\leqslant x_{k_0}}f(x).$$

则

$$\underline{S}(f,\Delta_1)=\sum_{k=1}^{n}m_k\Delta x_k,$$

$$\underline{S}(f,\Delta_2)=\sum_{k=1,k\neq k_0}^{n}m_k\Delta x_k+m'_{k_0}(x'-x_{k_0-1})+m''_{k_0}(x_{k_0}-x').$$

由于 $m_{k_0} \leqslant m'_{k_0}$ 且 $m_{k_0} \leqslant m''_{k_0}$, 所以

$$\begin{aligned}\underline{S}(f,\Delta_2)-\underline{S}(f,\Delta_1)&=m'_{k_0}(x'-x_{k_0-1})+m''_{k_0}(x_{k_0}-x')-m_{k_0}\Delta x_{k_0}\\&\geqslant m_{k_0}(x'-x_{k_0-1})+m_{k_0}(x_{k_0}-x')-m_{k_0}\Delta x_{k_0}=0.\end{aligned}$$

上和的证明类似. 证毕.

引理 7.4.3 对区间 $[a,b]$ 的任意两个分割 Δ_1 和 Δ_2 都成立

$$\underline{S}(f,\Delta_1) \leqslant \overline{S}(f,\Delta_2),$$

即任意一个下和都不大于任意一个上和.

证明 令 Δ_3 为 Δ_1 和 Δ_2 的公共加细, 即 Δ_3 是把 Δ_1 和 Δ_2 的全部分点合在一起所得到的分割. 则据引理 7.4.2, 有

$$\underline{S}(f,\Delta_1) \leqslant \underline{S}(f,\Delta_3) \leqslant \overline{S}(f,\Delta_3) \leqslant \overline{S}(f,\Delta_2).$$

证毕.

根据引理 7.4.3, 对区间 $[a,b]$ 上的任意有界函数 f, 它的全部下和组成的数集有上界 (每个上和都是这个数集的上界), 从而这个数集有上确界; 同样它的全部上和组成的数集有下界 (每个下和都是这个数集的下界), 从而这个数集有下确界. 引进下列概念:

定义 7.4.2 设 f 是区间 $[a,b]$ 上的有界函数. 令

$$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x=\sup\{\underline{S}(f,\Delta):\Delta \text{ 是区间 } [a,b] \text{ 的任意分割}\},$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x=\inf\{\overline{S}(f,\Delta):\Delta \text{ 是区间 } [a,b] \text{ 的任意分割}\}.$$

它们分别称为函数 f 在区间 $[a,b]$ 上的**下积分**和**上积分**.

根据这个定义之前的说明, 对于区间 $[a,b]$ 上的任意有界函数 f, 无论它是否可积, 其下积分和上积分都是存在的. 另外由引理 7.4.3 可知, 恒成立关系式

$$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x. \tag{7.4.2}$$

现在可以陈述和证明下述重要定理.

定理 7.4.1 (达布定理) 设 f 是区间 $[a,b]$ 上的有界函数. 则有

$$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\|\Delta\|\to 0}\underline{S}(f,\Delta), \tag{7.4.3}$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\|\Delta\|\to 0}\overline{S}(f,\Delta). \tag{7.4.4}$$

证明　以式 (7.4.3) 为例来证明, 因为式 (7.4.4) 的证明类似. 为证明式 (7.4.3), 记 $A=\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$. 需要证明对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在相应的 $\delta>0$, 使对区间 $[a,b]$ 的任意一个分割 $\Delta=\{x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, 只要它满足 $\|\Delta\|=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\Delta x_k<\delta$, 就有

$$|\underline{S}(f,\Delta)-A|<\varepsilon. \tag{7.4.5}$$

对于给定的 $\varepsilon>0$, 由于

$$A=\sup\{\underline{S}(f,\Delta):\Delta\ \text{是区间}\ [a,b]\ \text{的任意分割}\},$$

所以存在区间 $[a,b]$ 的相应分割 Δ', 使得

$$A-\frac{1}{2}\varepsilon<\underline{S}(f,\Delta')\leqslant A.$$

设 $|f(x)|\leqslant M$, $\forall x\in[a,b]$, 并令 m 为 Δ' 所含除 a 和 b 以外的其他分点的个数, 即设 Δ' 把 $[a,b]$ 分成了 $m+1$ 个小区间. 再令 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{4mM}$. 下面来证明, 当 $\|\Delta\|<\delta$ 时, 式 (7.4.5) 成立. 因为 $A\geqslant\underline{S}(f,\Delta)$, 所以只需证明 $\underline{S}(f,\Delta)-A>-\varepsilon$. 为此把 Δ' 的全部分点都添加到 Δ 中, 记所得到的新的分割为 Δ''. 我们有

$$\begin{aligned}\underline{S}(f,\Delta)-A&=[\underline{S}(f,\Delta)-\underline{S}(f,\Delta'')]+[\underline{S}(f,\Delta'')-A]\\&\geqslant[\underline{S}(f,\Delta)-\underline{S}(f,\Delta'')]+[\underline{S}(f,\Delta')-A]\\&>[\underline{S}(f,\Delta)-\underline{S}(f,\Delta'')]-\frac{1}{2}\varepsilon,\end{aligned}$$

因此只需再证明 $\underline{S}(f,\Delta)-\underline{S}(f,\Delta'')\geqslant-\dfrac{1}{2}\varepsilon$. 以 $m=1$ 的情况为例, 这时 Δ'' 最多只比 Δ 多了一个分点. 设多出来的那个分点为 x', 它位于 Δ 的第 k_0 个小区间 $[x_{k_0-1},x_{k_0}]$ 中, 即 $x_{k_0-1}<x'<x_{k_0}$. 类似于引理 7.4.2 的证明, 有

$$\begin{aligned}\underline{S}(f,\Delta)-\underline{S}(f,\Delta'')&=m_{k_0}\Delta x_{k_0}-[m'_{k_0}(x'-x_{k_0-1})+m''_{k_0}(x_{k_0}-x')]\\&\geqslant-M\Delta x_{k_0}-M[(x'-x_{k_0-1})+(x_{k_0}-x')]\\&=-2M\Delta x_{k_0}\geqslant-2M\|\Delta\|>-2M\delta=-\frac{1}{2}\varepsilon.\end{aligned}$$

对于一般的 m, 类似地有

$$\underline{S}(f,\Delta)-\underline{S}(f,\Delta'')\geqslant-m\cdot 2M\delta=-\frac{1}{2}\varepsilon.$$

因此式 (7.4.5) 得到了证明, 从而式 (7.4.3) 得证. 证毕.

7.4.2　达布准则

有了前面的准备, 便可建立本节的主要结果. 这就是

定理 7.4.2 (函数可积的达布准则 1) 设 f 是区间 $[a,b]$ 上的有界函数. 则 f 在 $[a,b]$ 上可积的充要条件是

$$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x. \tag{7.4.6}$$

当这个条件成立时, 有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x. \tag{7.4.7}$$

证明 必要性. 设 f 在 $[a,b]$ 上可积, 并记 $I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. 则对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在相应的 $\delta > 0$, 使对区间 $[a,b]$ 的任意分割 Δ 和任意相应的介点集 Ξ, 只要 $\|\Delta\| < \delta$, 就有

$$|S(f,\Delta,\Xi) - I| < \varepsilon,$$

即

$$I - \varepsilon < S(f,\Delta,\Xi) < I + \varepsilon.$$

关于所有 Ξ 分别取下、上确界, 可知只要 $\|\Delta\| < \delta$, 就有

$$I - \varepsilon \leqslant \underline{S}(f,\Delta) \leqslant \overline{S}(f,\Delta) \leqslant I + \varepsilon,$$

这蕴涵着当 $\|\Delta\| < \delta$ 时, 恒有

$$|\underline{S}(f,\Delta) - I| \leqslant \varepsilon \quad 且 \quad |\overline{S}(f,\Delta) - I| \leqslant \varepsilon.$$

因此

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \underline{S}(f,\Delta) = I \quad 且 \quad \lim_{\|\Delta\|\to 0} \overline{S}(f,\Delta) = I.$$

根据定理 7.4.1, 这意味着式 (7.4.6) 和式 (7.4.7) 成立.

充分性. 设式 (7.4.6) 成立, 我们证明 f 在 $[a,b]$ 上可积. 为此令 $I = \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$. 由于 $\lim\limits_{\|\Delta\|\to 0} \underline{S}(f,\Delta) = \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$ 且 $\lim\limits_{\|\Delta\|\to 0} \overline{S}(f,\Delta) = \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$, 所以对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在相应的 $\delta > 0$, 使对区间 $[a,b]$ 的任意分割 Δ, 只要 $\|\Delta\| < \delta$, 就有

$$|\underline{S}(f,\Delta) - I| < \varepsilon \quad 且 \quad |\overline{S}(f,\Delta) - I| < \varepsilon,$$

从而当 $\|\Delta\| < \delta$ 时, 对任意相应于 Δ 的介点集 Ξ 都有

$$I - \varepsilon < \underline{S}(f,\Delta) \leqslant S(f,\Delta,\Xi) \leqslant \overline{S}(f,\Delta) < I + \varepsilon,$$

即

$$|S(f,\Delta,\Xi) - I| < \varepsilon.$$

因此 $\lim\limits_{\|\Delta\|\to 0} S(f,\Delta,\Xi)=I$. 这说明函数 f 在 $[a,b]$ 上可积并且式 (7.4.7) 成立. 证毕.

定理 7.4.2 给出了函数可积的一个充要条件, 即达布准则. 但是在实际应用这个定理时, 由于上、下积分往往很难计算, 所以定理 7.4.2 的条件实际上是难以具体地检验的. 为了克服这个困难, 下面给出达布准则的另一比较好用的表述形式.

对区间 $[a,b]$ 上的有界函数 f 和 $[a,b]$ 的任意一个分割 $\Delta=\{x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, 记

$$\omega_k(f)=\sup_{x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k} f(x)-\inf_{x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k} f(x)=\sup_{x,y\in[x_{k-1},x_k]}|f(x)-f(y)|,$$

$(k=1,2,\cdots,n)$. $\omega_k(f)$ 叫做函数 f 在区间 $[x_{k-1},x_k]$ 上的**振幅**. 易见成立关系式

$$\sum_{k=1}^{n}\omega_k(f)\Delta x_k=\overline{S}(f,\Delta)-\underline{S}(f,\Delta).$$

因此, 根据达布定理知当 $\|\Delta\|\to 0$ 时, 上述和式有极限, 且

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}\omega_k(f)\Delta x_k=\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x-\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x. \tag{7.4.8}$$

根据这个等式, 可把定理 7.4.2 改述为以下形式.

定理 7.4.3 (函数可积的达布准则 2)　设 f 是区间 $[a,b]$ 上的有界函数. 则 f 在 $[a,b]$ 上可积的充要条件是

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}\omega_k(f)\Delta x_k=0.$$

对上述定理的产生历史做一些注记. 这个定理实际上属于黎曼. 在本章一开始提到的写于 1854 年的那篇论文中, 黎曼首先证明了这样一个定理: 有界函数 f 在 $[a,b]$ 上可积的充要条件是对 $[a,b]$ 的任意分割 Δ 和任意给定的 $\varepsilon>0$, 分割 Δ 中使得振幅 $\omega_k(f)$ 大于 ε 的那些小区间的总长度当 $\|\Delta\|\to 0$ 时趋于零. 然后他写下了上面这个定理, 但没有给出其证明. 易知, 这两个定理是等价的. 另外上和与下和, 在黎曼的论文中也已经出现了. 后来 (1875 年) 达布所证明的, 不是定理 7.4.3 而是定理 7.4.1 和定理 7.4.2. 但是显而易见, 达布引进上积分和下积分的概念把这个理论完备化了.

例 1　证明狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 是有理数},\\ 0, & \text{当 } x \text{ 是有理数},\end{cases}$$

在任意有限区间 $[a,b]$ 上不可积.

证明　显然对区间 $[a,b]$ 的任意分割 Δ: $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$ 都有

$$\omega_k(D)=1,\quad k=1,2,\cdots,n.$$

所以

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}\omega_k(D)\Delta x_k=\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k=b-a\neq 0.$$

因此 D 在 $[a,b]$ 上不可积. 证毕.

应用达布准则, 可给出连续函数可积性的一个新的证明如下: 因为 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 所以它在该区间上一致连续. 因此, 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在相应的 $\delta>0$, 使对区间 $[a,b]$ 中任意两点 x,y, 只要 $|x-y|<\delta$, 就有 $|f(x)-f(y)|<\dfrac{\varepsilon}{b-a}$. 现在设 $\Delta=\{x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 为区间 $[a,b]$ 的任意一个满足 $\|\Delta\|<\delta$ 的分割. 则有

$$\omega_k(f)=\sup_{x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k}f(x)-\inf_{x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k}f(x)<\frac{\varepsilon}{b-a},\quad k=1,2,\cdots,n.$$

因此

$$\sum_{k=1}^{n}\omega_k(f)\Delta x_k<\frac{\varepsilon}{b-a}\cdot\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k=\frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(b-a)=\varepsilon.$$

这意味着 $\lim\limits_{\|\Delta\|\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k(f)\Delta x_k=0$. 所以根据达布准则即知 f 在 $[a,b]$ 上可积. 证毕.

应用达布准则, 还可证明下列定理:

定理 7.4.4 设 f 是区间 $[a,b]$ 上的单调函数. 则 f 在 $[a,b]$ 上可积.

证明 不妨设 f 在 $[a,b]$ 上单调增加并且不是常值函数. 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 令 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$. 则当区间 $[a,b]$ 的分割 $\Delta=\{x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 满足 $\|\Delta\|<\delta$ 时, 有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\omega_k(f)\Delta x_k&<\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\cdot\sum_{k=1}^{n}\omega_k(f)\\&\leqslant\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\cdot\sum_{k=1}^{n}[f(x_k)-f(x_{k-1})]\\&=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\cdot[f(b)-f(a)]=\varepsilon.\end{aligned}$$

这意味着 $\lim\limits_{\|\Delta\|\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k(f)\Delta x_k=0$, 所以根据定理 7.4.3 即知 f 在 $[a,b]$ 上可积. 证毕.

由式 (7.4.8) 极限 $\lim\limits_{\|\Delta\|\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k(f)\Delta x_k$ 总是存在的, 所以为证明

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}\omega_k(f)\Delta x_k=0,$$

只需证明存在区间 $[a,b]$ 的一个分割的序列 Δ_m:

$$a=x_0^{(m)}<x_0^{(m)}<x_1^{(m)}<x_2^{(m)}<\cdots<x_{n_m}^{(m)}=b,\quad m=1,2,\cdots,$$

其中 $n_1, n_1, \cdots, n_m, \cdots$ 是一列自然数, 且 $\lim\limits_{m\to\infty} n_m = \infty$, 使得 $\lim\limits_{m\to\infty} \|\Delta_m\| = 0$, 且当令

$$\omega_k^m(f) = \sup_{x_{k-1}^{(m)} \leqslant x \leqslant x_k^{(m)}} f(x) - \inf_{x_{k-1}^{(m)} \leqslant x \leqslant x_k^{(m)}} f(x), \qquad \Delta x_k^{(m)} = x_k^{(m)} - x_{k-1}^{(m)}$$

$(k = 1, 2, \cdots, n_m)$ 时, 有

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{n_m} \omega_k^m(f) \Delta x_k^{(m)} = 0.$$

类似地, 为证明关系式 $\lim\limits_{\|\Delta\|\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} \omega_k(f)\Delta x_k = 0$ 不成立, 只需证明存在区间 $[a, b]$ 的一个分割的序列 Δ_m $(m = 1, 2, \cdots)$ 和一个正数 $\varepsilon_0 > 0$, 使 $\lim\limits_{m\to\infty} \|\Delta_m\| = 0$ 且对每个自然数 m 都有

$$\sum_{k=1}^{n_m} \omega_k^m(f) \Delta x_k^{(m)} \geqslant \varepsilon_0.$$

即有下列定理.

定理 7.4.5 设 f 是区间 $[a, b]$ 上的有界函数. 如果存在区间 $[a, b]$ 的一个分割的序列 Δ_m $(m = 1, 2, \cdots)$, 它们满足 $\lim\limits_{m\to\infty} \|\Delta_m\| = 0$, 且

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{n_m} \omega_k^m(f) \Delta x_k^{(m)} = 0,$$

则 f 在 $[a, b]$ 上可积. 而如果存在区间 $[a, b]$ 的一个分割的序列 Δ_m $(m = 1, 2, \cdots)$ 和一个正数 $\varepsilon_0 > 0$, 使 $\lim\limits_{m\to\infty} \|\Delta_m\| = 0$ 且对每个自然数 m 都有

$$\sum_{k=1}^{n_m} \omega_k^m(f) \Delta x_k^{(m)} \geqslant \varepsilon_0,$$

则 f 在 $[a, b]$ 上不可积.

对于非空数集 A 和实数 x_0, 称 x_0 是 A 的**聚点**是指它满足以下条件: 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 区间 $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ 中都含有数集 A 的无穷多个不同的点. 应用定理 7.4.5, 可以证明函数可积的下列充分条件.

定理 7.4.6 设 f 是区间 $[a, b]$ 上的有界函数, 且它在 $[a, b]$ 上的不连续点的集合或者是有限点集, 或者最多只有有限多个聚点. 则 f 在 $[a, b]$ 上可积.

证明 设 $|f(x)| \leqslant M$, $\forall x \in [a, b]$, 并设 $z_1, z_2, \cdots, z_p$ 是 f 的不连续点的集合的全部聚点. 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 令 $\delta_1 = \dfrac{\varepsilon}{12pM}$. 从区间 $[a, b]$ 中挖去以下 p 个区间:

$$(z_1 - \delta_1, z_1 + \delta_1), \ (z_2 - \delta_1, z_2 + \delta_1), \ \cdots, \ (z_p - \delta_1, z_p + \delta_1),$$

剩下的集合 S_1 中最多只含有 f 的有限多个不连续点, 设它们是 $y_1, y_2, \cdots, y_N$. 令

$\delta_2 = \dfrac{\varepsilon}{12NM}$. 从集合 S_1 中再挖去以下 N 个区间:

$$(y_1 - \delta_2, y_1 + \delta_2),\ (y_2 - \delta_2, y_2 + \delta_2),\ \cdots,\ (y_N - \delta_2, y_N + \delta_N),$$

剩下的集合 S_2 (它是有限个闭区间的并) 中不含 f 的不连续点, 即 f 在 S_2 中的每个闭区间上都是连续函数, 从而一致连续. 由于只有有限多个这样的闭区间, 所以对前述给定的 $\varepsilon > 0$, 必存在相应的 $\delta_3 > 0$, 使对任意 $x, y \in S_2$, 只要它们属于同一个闭区间且满足 $|x - y| < \delta_3$, 就有 $|f(x) - f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{3(b-a)}$. 现在根据这些结论构作区间 $[a, b]$ 的分割 Δ, 使 $z_j - \delta_1$ 和 $z_j + \delta_1$ $(j = 1, 2, \cdots, p)$ 以及 $y_k - \delta_2$ 和 $y_k + \delta_2$ $(k = 1, 2, \cdots, N)$ 都是分点, 其余分点由对 S_2 中的每个闭区间作分割得到, 使得分割出的小区间的长度都小于 δ_3. 对于这样作出的分割 Δ, 易见成立

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k(f)\Delta x_k < 2M \cdot 2p\delta_1 + 2M \cdot 2N\delta_2 + \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \cdot (b-a) = \varepsilon.$$

特别取 ε 为一列趋于零的正数, 如取 $\varepsilon_m = \dfrac{1}{m}$ $(m = 1, 2, \cdots)$, 然后令 Δ_m $(m = 1, 2, \cdots)$ 为相应地按以上方法得到的分割的序列. 则易见

$$\lim_{m\to\infty} \|\Delta_m\| = 0 \quad 且 \quad \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{n_m} \omega_k^m(f)\Delta x_k^{(m)} = 0,$$

所以 f 在 $[a, b]$ 上可积. 证毕.

7.4.3 可积函数乘积的可积性

应用达布准则, 可以证明关于两个可积函数乘积的可积性, 并且给出一个非常有用的公式, 它在以后一些涉及积分的问题中将被多次用到.

定理 7.4.7 设函数 f 和 g 都在 $[a, b]$ 上可积, 则它们的乘积 fg 也在 $[a, b]$ 上可积, 而且对区间 $[a, b]$ 的任意一个分割 Δ: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, 和任意选取的从属于这个分割的两组介点 $\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\}$ 和 $\{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n\}$, 成立

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)g(\eta_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x. \tag{7.4.9}$$

证明 先证明 fg 在 $[a, b]$ 上可积. 根据达布准则, 只需证明: 对区间 $[a, b]$ 的任意分割 Δ: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, 成立

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \omega_k(fg)\Delta x_k = 0, \tag{7.4.10}$$

其中 $\omega_k(fg) = \sup\limits_{x,y\in[x_{k-1},x_k]} |f(x)g(x) - f(y)g(y)|$, $k = 1, 2, \cdots, n$. 由于可积函数必有

界, 所以存在两个正数 A 和 B 使成立

$$|f(x)| \leqslant A, \quad |g(x)| \leqslant B, \quad \forall x \in [a, b].$$

因此对任意 $x, y \in [a, b]$ 都有

$$\begin{aligned}|f(x)g(x) - f(y)g(y)| \leqslant& |f(x)||g(x) - g(y)| + |g(y)||f(x) - f(y)| \\ \leqslant& A|g(x) - g(y)| + B|f(x) - f(y)|.\end{aligned}$$

据此立见

$$\omega_k(fg) \leqslant A\omega_k(g) + B\omega_k(f), \quad k = 1, 2, \cdots, n,$$

进而

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k(fg)\Delta x_k \leqslant A\sum_{k=1}^{n} \omega_k(g)\Delta x_k + B\sum_{k=1}^{n} \omega_k(f)\Delta x_k.$$

而由 f 和 g 都在 $[a, b]$ 上可积知 $\lim\limits_{\|\Delta\| \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} \omega_k(f)\Delta x_k = 0$ 且 $\lim\limits_{\|\Delta\| \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} \omega_k(g)\Delta x_k = 0$, 所以从上面的不等式即知式 (7.4.10) 成立, 因此 fg 在 $[a, b]$ 上可积.

再来证明式 (7.4.9). 为此写

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)g(\eta_i)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)g(\xi_i)\Delta x_k + \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[g(\eta_i) - g(\xi_k)]\Delta x_k.$$

右端第一项当 $\|\Delta\| \to 0$ 时收敛于 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$. 对于第二项, 有

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[g(\eta_k) - g(\xi_i)]\Delta x_k\right| \leqslant A\sum_{k=1}^{n} \omega_k(g)\Delta x_k \to 0 \quad (当\ \|\Delta\| \to 0).$$

所以式 (7.4.9) 成立. 证毕.

7.4.4 积分第二中值定理

定理 7.4.8 设 f 在 $[a, b]$ 上可积, g 在 $[a, b]$ 上单减, 且 $g(x) \geqslant 0$, $\forall x \in [a, b]$. 则存在 $\xi \in [a, b]$ 使成立

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x. \tag{7.4.11}$$

证明 由于 g 是单调函数, 所以由定理 7.4.5 知它在 $[a, b]$ 上可积, 于是再由定理 7.4.7 知 fg 也在 $[a, b]$ 上可积, 这样式 (7.4.11) 的左端是有意义的. 为了证明这个等式, 不妨设 $g(a) > 0$, 因为否则有 $g(x) = 0$, $\forall x \in [a, b]$, 而这时式 (7.4.11) 对任意 $\xi \in [a, b]$ 都成立. 记

$$F(x) = \int_a^x f(y)\mathrm{d}y, \quad \forall x \in [a, b].$$

则 F 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数, 而式 (7.4.11) 可改写为

$$\frac{1}{g(a)}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = F(\xi).$$

因此, 根据连续函数的介值定理, 只需证明 $\frac{1}{g(a)}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 介于函数 F 的最大和最小值之间. 为此记

$$A = \min_{a\leqslant x\leqslant b} F(x), \quad B = \max_{a\leqslant x\leqslant b} F(x).$$

先看一种特殊情况: g **是阶梯函数**, 即区间 $[a,b]$ 被分成一些小区间 $[x_0,x_1]$, $(x_1, x_2]$, $\cdots$, $(x_{n-1},x_n]$, $x_0=a$, $x_n=b$, 在每个小区间 $(x_{k-1},x_k]$ 上 g 都取常值, $g(x)=g(x_k)$, $\forall x\in(x_{k-1},x_k]$. 这时有

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x &= \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)g(x_k)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=1}^n g(x_k)[F(x_k)-F(x_{k-1})] \\
&= \sum_{k=1}^n g(x_k)F(x_k) - \sum_{k=1}^n g(x_k)F(x_{k-1}) \\
&= \sum_{k=0}^n g(x_k)F(x_k) - \sum_{k=0}^{n-1} g(x_{k+1})F(x_k) \quad (\text{因} g(x_0)F(x_0)=g(a)F(a)=0) \\
&= g(b)F(b) + \sum_{k=0}^{n-1}[g(x_k)-g(x_{k+1})]F(x_k)
\end{aligned}$$

由于 $g(b)\geqslant 0$, $F(b)\geqslant A$, 且 $g(x_k)-g(x_{k+1})\geqslant 0$, $F(x_k)\geqslant A$, $k=0,1,\cdots,n-1$, 所以从以上等式得到

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \geqslant g(b)A + \sum_{k=0}^{n-1}[g(x_k)-g(x_{k+1})]A = g(a)A.$$

同理由于 $F(b)\leqslant B$, $F(x_k)\leqslant B$, $k=0,1,\cdots,n-1$, 所以还有

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant g(b)B + \sum_{k=0}^{n-1}[g(x_k)-g(x_{k+1})]B = g(a)B.$$

因此就证明了

$$A \leqslant \frac{1}{g(a)}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant B. \tag{7.4.12}$$

再来考虑一般的情形. 设 $|f(x)|\leqslant M$, $\forall x\in[a,b]$. 由于 g 在 $[a,b]$ 上可积, 所以由达布准则知对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在相应的 $\delta>0$, 使对区间 $[a,b]$ 的任意一个分割 Δ: $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$, 只要 $\|\Delta\|=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\Delta x_k<\delta$, 就有

$$\sum_{k=1}^{n}\omega_k(g)\Delta x_k < \frac{g(a)}{M}\varepsilon.$$

这蕴涵着

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)[g(x)-g(x_k)]\mathrm{d}x\right| \leqslant M\sum_{k=1}^{n}\omega_k(g)\Delta x_k < g(a)\varepsilon.$$

注意到

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)[g(x)-g(x_k)]\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)g(x_k)\mathrm{d}x,$$

而前面已经证明了

$$A \leqslant \frac{1}{g(a)}\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)g(x_k)\mathrm{d}x \leqslant B,$$

所以结合起来就得到

$$A-\varepsilon \leqslant \frac{1}{g(a)}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant B+\varepsilon.$$

由于 ε 是任意正数, 因此式 (7.4.12) 成立. 证毕.

推论 7.4.1 如果把定理 7.4.8 中的条件 "g 在 $[a,b]$ 上单减" 改为 "g 在 $[a,b]$ 上单增", 其余条件不变, 则存在 $\xi\in[a,b]$ 使成立

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(b)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x.$$

证明 令 $[a_1,b_1]=[-b,-a]$, $f_1(x)=f(-x)$, $g_1(x)=g(-x)$, $\forall x\in[a_1,b_1]$, 则函数 f_1 和 g_1 满足定理 7.4.8 的条件, 从而应用这个定理就推出了上述结论. 证毕.

推论 7.4.2 如果把定理 7.4.8 中的条件 "g 在 $[a,b]$ 上单减" 改为 "g 在 $[a,b]$ 上单调", 并且取消条件 $g(x)\geqslant 0$, $\forall x\in[a,b]$, 其余条件不变, 则存在 $\xi\in[a,b]$ 使成立

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x + g(b)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x.$$

证明 在 g 是单调递减函数时对函数 $f(x)$ 和 $g(x)-g(b)$ 应用定理 7.4.8, 而在 g 是单调递增函数时对函数 $f(x)$ 和 $g(b)-g(x)$ 应用定理 7.4.8, 就得到了上述结论. 证毕.

定理 7.4.8 和它的两个推论合称**积分第二中值定理**, 它们在处理一些涉及振荡型函数 (函数值频繁地变号的函数) 的积分问题时十分有用. 下面仅举一例加以说明.

例 2 设 $c>0$, $p>0$, $0\leqslant a<b$, n 是自然数. 证明:

$$\left|\int_a^b \sin\left(nx-\frac{c}{x^p}\right)\mathrm{d}x\right| < \frac{2}{n},\quad \left|\int_a^b \cos\left(nx-\frac{c}{x^p}\right)\mathrm{d}x\right| < \frac{2}{n}.$$

证明 作变元变换 $t=nx-\frac{c}{x^p}$, 则

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=n+\frac{cp}{x^{p+1}}>0,$$

所以 t 是 x 的严格单调递增函数. 用 $x=x(t)$ 表示它的反函数. 则

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\left(n+\frac{cp}{x^{p+1}}\right)^{-1}>0,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\left(n+\frac{cp}{x^{p+1}}\right)^{-2}\frac{cp(p+1)}{x^{p+2}}>0.$$

后者说明 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 是单调递增函数. 记 $\alpha=na-\frac{c}{a^p}$, $\beta=nb-\frac{c}{b^p}$. 应用积分第二中值定理得

$$\int_a^b\sin\left(nx-\frac{c}{x^p}\right)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta(\sin t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t=\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_\beta\int_\xi^\beta\sin t\,\mathrm{d}t$$

$$=\left(n+\frac{cp}{b^{p+1}}\right)^{-1}(\cos\xi-\cos\beta).$$

因此

$$\left|\int_a^b\sin\left(nx-\frac{c}{x^p}\right)\mathrm{d}x\right|=\left(n+\frac{cp}{b^{p+1}}\right)^{-1}|\cos\xi-\cos\beta|<\frac{2}{n}.$$

同理可证第二个不等式.

习　题　7.4

1. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. 证明: 函数 $|f(x)|$ 也在 $[a,b]$ 上可积.
2. (1) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上可积. 证明: 函数 $h_1(x)=\max\{f(x),g(x)\}$ 和 $h_2(x)=\min\{f(x),g(x)\}$ 也都在 $[a,b]$ 上可积;

   (2) 对给定的函数 $f(x)$, 令

   $$f_+(x)=\max\{f(x),0\},\quad f_-(x)=\min\{f(x),0\},$$

   它们分别叫做 $f(x)$ 的**正部**和**负部**, 证明: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积的充要条件是 $f_+(x)$ 和 $f_-(x)$ 都在 $[a,b]$ 上可积;

   (3) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微, 且导函数 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. 证明: $f(x)$ 可以写成两个单调递增的连续函数之差.
3. 设 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 值域含于区间 $[\alpha,\beta]$. 又设 f 是 $[\alpha,\beta]$ 上的可积函数. 假设 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上最多只有限次改变增减性, 且在任何区间上都不恒取常值. 证明复合函数 $f(\varphi(x))$ 是 $[a,b]$ 上的可积函数.

   可考虑按以下步骤进行证明:

   (1) 先证明当 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调时, $f(\varphi(x))$ 在 $[a,b]$ 上可积;

(2) 再证明当 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上最多只有限次改变增减性时, $f(\varphi(x))$ 在 $[a,b]$ 上可积.

4. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上可积. 证明 $h(x)=\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}$ 也在 $[a,b]$ 上可积.

可考虑按以下步骤进行证明:

(1) 先应用不等式

$$\sqrt{a+b}\leqslant\sqrt{a}+\sqrt{b},\qquad |\sqrt{a}-\sqrt{b}|\leqslant\sqrt{|a-b|},\qquad \forall a,b\geqslant 0$$

证明对 $[a,b]$ 的任意分割 Δ: $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$ 成立不等式

$$\omega_i(h)\leqslant\sqrt{2M}\Big(\sqrt{\omega_i(f)}+\sqrt{\omega_i(g)}\Big),\qquad i=1,2,\cdots,n,$$

式中 M 是 $|f(x)|$ 和 $|g(x)|$ 在 $[a,b]$ 上的公共上界;

(2) 再应用凸性不等式 (5.5.10) 证明:

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i(h)\Delta x_i\leqslant\sqrt{2M(b-a)}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta x_i\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta x_i\right)^{\frac{1}{2}}\right];$$

(3) 最后完成命题的证明.

5. 证明: 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积的充要条件是对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在区间 $[a,b]$ 的分割 Δ: $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$, 使

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta x_i<\varepsilon.$$

6. 设 $f(x)$ 是定义在半开区间 $(a,b]$ 上的函数, 它在该区间上有界, 且对任意充分小的 $\sigma>0$, $f(x)$ 在 $[a+\sigma,b]$ 上可积. 证明: 任意补充 $f(x)$ 在区间端点 a 处的值, 所得函数 $f^*(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 且

$$\lim_{\sigma\to0^+}\int_{a+\sigma}^{b}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f^*(x)\,\mathrm{d}x.$$

7. 证明下列有无穷多个不连续点的函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积, 并求 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 的值:

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x}-\left[\dfrac{1}{x}\right]$ $(x\neq0)$, $f(0)=0$;

(2) $f(x)=\operatorname{sgn}\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$ $(x\neq0)$, $f(0)=0$.

8. 证明: 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积的充要条件是对任意给定的 $\varepsilon>0$ 和 $\varepsilon'>0$, 存在区间 $[a,b]$ 的分割 Δ: $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$, 使得振幅 $\omega_i(f)\geqslant\varepsilon$ 的那些小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 的长度总和

$$\sum_{\omega_i(f)\geqslant\varepsilon}\Delta x_i<\varepsilon'$$

9. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 值域含于区间 $[\alpha,\beta]$. 又设 g 是 $[\alpha,\beta]$ 上的连续函数. 应用 8 题的结果证明: 复合函数 $g(f(x))$ 也在 $[a,b]$ 上可积.

10. 设定义在 $[a,b]$ 上的函数 f 满足以下条件: 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $[a,b]$ 的有限个子区间, 其长度的总和小于 ε, 使 f 在 $[a,b]$ 去掉这有限个小区间之后剩下的每个区间上都连续. 证明: f 在 $[a,b]$ 上可积.

11. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. 证明: $f(x)$ 具有积分的连续性, 即对任意 $x\in[a,b]$ 成立

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b |f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x=0.$$

这里假定当 $x\notin[a,b]$ 时 $f(x)=0$.

12. 设 $f(x)$, $g(x)$ 和 $h(x)$ 是 $[a,b]$ 上的三个可积函数, Δ: $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$ 是 $[a,b]$ 的一个分割, $\varXi=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}$, $H=\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n\}$ 和 $G=\{\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n\}$ 是从属于这个分割的三组介点. 证明:

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)g(\eta_i)h(\zeta_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)g(x)h(x)\mathrm{d}x.$$

13. (1) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的两个可积函数, Δ: $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$ 是 $[a,b]$ 的一个分割, $\varXi=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}$ 和 $H=\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n\}$ 是从属于这个分割的两组介点. 证明:

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^n \sqrt{f^2(\xi_i)+g^2(\eta_i)}\Delta x_i=\int_a^b \sqrt{f^2(x)+g^2(x)}\mathrm{d}x;$$

(2) 把以上结论推广到三个函数的情形, 即设 $f(x)$, $g(x)$ 和 $h(x)$ 是 $[a,b]$ 上的三个可积函数, Δ: $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$ 是 $[a,b]$ 的一个分割, $\varXi=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}$, $H=\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n\}$ 和 $G=\{\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n\}$ 是从属于这个分割的三组介点. 证明:

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^n \sqrt{f^2(\xi_i)+g^2(\eta_i)+h^2(\zeta_i)}\Delta x_i=\int_a^b \sqrt{f^2(x)+g^2(x)+h^2(x)}\mathrm{d}x.$$

14. 设 f 和 g 都是区间 $[a,b]$ 上的可微函数, 且它们的导函数 f' 和 g' 都在 $[a,b]$ 上可积. 证明:

$$\int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x=f(x)g(x)\Big|_a^b-\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x.$$

即定理 7.2.5 中关于导函数 f' 和 g' 都在 $[a,b]$ 上连续的条件可以减弱为只要求它们在 $[a,b]$ 上可积.

15. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. 又设 ψ 是区间 $[\alpha,\beta]$ 上的连续可微函数, $\psi'(t)\neq 0$, $\forall t\in[\alpha,\beta]$, 且 $\psi(\alpha)=a$, $\psi(\beta)=b$. 证明:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\psi(t))\psi'(t)\mathrm{d}t.$$

即定理 7.2.4 中关于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续的条件可以减弱为只要求它在 $[a,b]$ 上可积.

16. 设 f 是区间 $[a,b]$ 上的可积函数, 且它可以表示成 $f(x)=g(\varphi(x))\varphi'(x)$, 其中 g 也是 $[\alpha,\beta]$ 上的可积函数, 而 φ 是 $[a,b]$ 上的连续可微函数, 且 $\varphi(a)=\alpha$, $\varphi(b)=\beta$. 再设 φ 在 $[a,b]$ 上最多只有限次改变增减性, 且在任何区间上都不恒取常值. 证明:
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta g(u)\mathrm{d}u.$$
即定理 7.2.3 中关于 f 和 g 都是连续函数的条件可以减弱为只要求它们可积.

17. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 且 $f(x)>0$, $\forall x\in[a,b]$. 证明:
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0.$$

18. 设 a,b,c,p 都是正常数且 $a<b$. 证明以下不等式:

(1) $\left|\int_a^b \mathrm{e}^{-cx}\sin x\,\mathrm{d}x\right|\leqslant 2\mathrm{e}^{-ac}$, $\quad\left|\int_a^b \mathrm{e}^{-cx}\cos x\,\mathrm{d}x\right|\leqslant 2\mathrm{e}^{-ac}$;

(2) $\left|\int_a^b \frac{\sin cx}{x^p}\mathrm{d}x\right|\leqslant \frac{2}{a^pc}$, $\quad\left|\int_a^b \frac{\cos cx}{x^p}\mathrm{d}x\right|\leqslant \frac{2}{a^pc}$;

(3) $\left|\int_a^b \sin x^2\mathrm{d}x\right|\leqslant \frac{1}{a}$, $\quad\left|\int_a^b \cos x^2\mathrm{d}x\right|\leqslant \frac{1}{a}$.

第 8 章

定积分的应用

8.1 定积分在分析学中的应用

从 7.3 节可知, 如果函数 f 在区间 $[a,b]$ 上连续, 则由变限积分

$$F(x)=\int_a^x f(y)\mathrm{d}y, \quad \forall x\in[a,b].$$

定义的函数 F 是函数 f 在此区间上的一个原函数, 即 F 在 $[a,b]$ 上连续可微且

$$F'(x)=f(x), \quad \forall x\in[a,b].$$

定积分在分析学中的应用, 主要以这个事实作为基础.

8.1.1 一阶线性微分方程

设 c 和 f 都是区间 $[a,b]$ 上的连续函数. 考察下列微分方程

$$y'(x)+c(x)y(x)=f(x), \quad \forall x\in[a,b]. \tag{8.1.1}$$

式中 y 是未知函数. 需要确定, 区间 $[a,b]$ 上怎样的函数 y 满足这个微分方程.

对方程 (8.1.1) 两端乘以 $\mathrm{e}^{\int_a^x c(t)\mathrm{d}t}$ 得到

$$y'(x)\mathrm{e}^{\int_a^x c(t)\mathrm{d}t}+y(x)\cdot c(x)\mathrm{e}^{\int_a^x c(t)\mathrm{d}t}=f(x)\mathrm{e}^{\int_a^x c(t)\mathrm{d}t}, \quad \forall x\in[a,b].$$

因为 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{e}^{\int_a^x c(t)\mathrm{d}t}\right)=\mathrm{e}^{\int_a^x c(t)\mathrm{d}t}\cdot\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\displaystyle\int_a^x c(t)\mathrm{d}t\right)=c(x)\mathrm{e}^{\int_a^x c(t)\mathrm{d}t}$, 所以上式即为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y(x)\mathrm{e}^{\int_a^x c(t)\mathrm{d}t}\right)=f(x)\mathrm{e}^{\int_a^x c(t)\mathrm{d}t}, \quad \forall x\in[a,b].$$

对任意 $u\in[a,b]$, 在区间 $[a,u]$ 上积分上式的两端, 就得到

$$y(u)\mathrm{e}^{\int_a^u c(t)\mathrm{d}t}-y(a)=\int_a^u f(x)\mathrm{e}^{\int_a^x c(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}x, \quad \forall u\in[a,b].$$

因此

$$\begin{aligned}y(u) =&y(a)\mathrm{e}^{-\int_a^u c(t)\mathrm{d}t}+\mathrm{e}^{-\int_a^u c(t)\mathrm{d}t}\int_a^u f(x)\mathrm{e}^{\int_a^x c(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}x\\ =&y(a)\mathrm{e}^{-\int_a^u c(t)\mathrm{d}t}+\int_a^u f(x)\mathrm{e}^{-\int_x^u c(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}x,\quad \forall u\in[a,b].\end{aligned}$$

这就证明了如果函数 y 在区间 $[a,b]$ 上满足微分方程 (8.1.1), 那么它必具有形式

$$y(x)=y(a)\mathrm{e}^{-\int_a^x c(t)\mathrm{d}t}+\int_a^x f(s)\mathrm{e}^{-\int_s^x c(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}s,\quad \forall x\in[a,b].\tag{8.1.2}$$

反之也很容易验证, 由式 (8.1.2) 给出的函数 y 在区间 $[a,b]$ 上连续可微且满足方程 (8.1.1). 因此证明了.

定理 8.1.1　设 c 和 f 是区间 $[a,b]$ 上给定的连续函数. 则函数 y 在此区间上满足微分方程 (8.1.1) 当且仅当它具有形式 (8.1.2).

因此, 只要知道了函数 y 在区间 $[a,b]$ 的左端点 a 处的值 $y(a)$, 代入式 (8.1.2) 就得到了函数 y 的表达式. 如果 $y(a)$ 没有给定, 把它作为一个待定的常数, 则得到方程 (8.1.1) 的解的一般表达式为

$$y(x)=C\mathrm{e}^{-\int_a^x c(t)\mathrm{d}t}+\int_a^x f(s)\mathrm{e}^{-\int_s^x c(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}s,\quad \forall x\in[a,b],$$

其中 C 为任意常数.

8.1.2　格朗沃尔引理

设 c 和 f 都是区间 $[a,b]$ 上的连续函数. 考察下列微分不等式

$$y'(x)+c(x)y(x)\leqslant f(x),\quad \forall x\in[a,b].\tag{8.1.3}$$

需要确定如果函数 y 在区间 $[a,b]$ 上满足这个微分不等式, 则 y 本身满足什么样的不等式.

对不等式 (8.1.3) 两端乘以 $\mathrm{e}^{\int_a^x c(t)\mathrm{d}t}$ 得到

$$y'(x)\mathrm{e}^{\int_a^x c(t)\mathrm{d}t}+y(x)\cdot c(x)\mathrm{e}^{\int_a^x c(t)\mathrm{d}t}\leqslant f(x)\mathrm{e}^{\int_a^x c(t)\mathrm{d}t},\quad \forall x\in[a,b].$$

同理, 据此得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y(x)\mathrm{e}^{\int_a^x c(t)\mathrm{d}t}\right)\leqslant f(x)\mathrm{e}^{\int_a^x c(t)\mathrm{d}t},\quad \forall x\in[a,b].$$

对任意 $u\in[a,b]$, 在区间 $[a,u]$ 上积分上式的两端, 就得到

$$y(u)\mathrm{e}^{\int_a^u c(t)\mathrm{d}t}-y(a)\leqslant\int_a^u f(x)\mathrm{e}^{\int_a^x c(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}x,\quad \forall u\in[a,b].$$

因此

$$y(u)\leqslant y(a)\mathrm{e}^{-\int_a^u c(t)\mathrm{d}t}+\mathrm{e}^{-\int_a^u c(t)\mathrm{d}t}\int_a^u f(x)\mathrm{e}^{\int_a^x c(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}x$$

$$=y(a)\mathrm{e}^{-\int_a^u c(t)\mathrm{d}t}+\int_a^u f(x)\mathrm{e}^{-\int_x^u c(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}x,\quad \forall u\in[a,b].$$

这样就证明了下述定理.

定理 8.1.2(格朗沃尔 (Gronwall) 引理) 设 c 和 f 是区间 $[a,b]$ 上给定的连续函数. 再设函数 y 在此区间上满足微分不等式 (8.1.3). 则成立

$$y(x)\leqslant y(a)\mathrm{e}^{-\int_a^x c(t)\mathrm{d}t}+\int_a^x f(s)\mathrm{e}^{-\int_s^x c(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}s,\quad \forall x\in[a,b].\tag{8.1.4}$$

8.1.3 积分型余项的泰勒公式

在 5.7 节学习了带有佩亚诺型余项和拉格朗日型余项的泰勒公式. 以带有拉格朗日型余项的泰勒公式为例可知, 如果函数 f 在包含点 x_0 的一个区间 (a,b) 上有 $n+1$ 阶导数, 则对任意 $x\in(a,b)$ 都存在相应的 ξ, 它位于 x 和 x_0 之间 (当 $x>x_0$ 时, $x_0<\xi<x$, 而当 $x<x_0$ 时, $x<\xi<x_0$), 使成立

$$\begin{aligned}f(x)=&f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n\\&+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}.\end{aligned}$$

这个公式有很多应用. 但是, 由于这个公式的余项中的 ξ 与 x 的关系不确定, 所以在有些应用问题中, 这个公式使用起来不很方便. 为克服这一困难, 下面的定理给出了带有另一类余项的泰勒公式, 即带有**积分型余项**的泰勒公式.

定理 8.1.3 设函数 f 在区间 (a,b) 上有 $n+1$ 阶的连续导数, 则对任意 $x,x_0\in(a,b)$ 都成立

$$\begin{aligned}f(x)=&f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n\\&+\frac{1}{n!}\int_{x_0}^x(x-t)^nf^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{8.1.5}$$

证明 (反复分部积分)

$$\begin{aligned}f(x)=&f(x_0)+\int_{x_0}^x f'(t)\mathrm{d}t=f(x_0)-\int_{x_0}^x f'(t)\mathrm{d}(x-t)\\=&f(x_0)-\left[(x-t)f'(t)\Big|_{x_0}^x-\int_{x_0}^x(x-t)f''(t)\mathrm{d}t\right]\\=&f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+\int_{x_0}^x(x-t)f''(t)\mathrm{d}t\\=&f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)-\frac{1}{2}\int_{x_0}^x f''(t)\mathrm{d}(x-t)^2\\=&f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)-\frac{1}{2}\left[(x-t)^2f''(t)\Big|_{x_0}^x-\int_{x_0}^x(x-t)^2f'''(t)\mathrm{d}t\right]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+\frac{1}{2}(x-x_0)^2f''(x_0)+\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}(x-t)^2f'''(t)\mathrm{d}t\\
&=\cdots\\
&=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+\frac{1}{2}(x-x_0)^2f''(x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n\\
&\quad+\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^nf^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

这就证明了公式 (8.1.5). 证毕.

式 (8.1.5) 中的最后一项 $\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^nf^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$ 叫做**积分型余项**, 所以公式 (8.1.5) 叫做带有积分型余项的泰勒公式. 因为 $f^{(n+1)}$ 在 (a,b) 上连续, 所以根据积分中值定理, 存在介于 x 和 x_0 之间的 ξ 使成立

$$
\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^nf^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)\int_{x_0}^{x}(x-t)^n\mathrm{d}t=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1},
$$

这就得到了带有拉格朗日型余项的泰勒公式. 但是这里的条件要强一些: 这里要求 $f^{(n+1)}$ 在 (a,b) 上连续, 而在定理 5.6.1 中, 只需要 $f^{(n+1)}$ 在 (a,b) 上存在, 不需要它在此区间上连续.

8.1.4　高阶原函数

作为上述泰勒公式的一个应用, 考虑下列问题: 给定区间 (a,b) 上的一个连续函数 g, 求函数 f 使

$$
f^{(n)}(x)=g(x),\quad \forall x\in(a,b)
$$

成立. 满足这个关系式的函数 f 叫做函数 g 的n **阶原函数**.

定理 8.1.4　设 g 是区间 (a,b) 上的连续函数, 则 (a,b) 上的函数 f 是 g 的 n 阶原函数当且仅当它具有下列形式:

$$
f(x)=P_{n-1}(x)+\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}g(t)\mathrm{d}t,\quad \forall x\in(a,b),\tag{8.1.6}
$$

其中 $P_{n-1}(x)$ 表示一个任意的阶数不超过 $n-1$ 的多项式, x_0 是 (a,b) 中的任意一点.

证明　先设成立 $f^{(n)}(x)=g(x), \forall x\in(a,b)$. 则由带有积分型余项的泰勒公式有

$$
\begin{aligned}
f(x)=&f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots\\
&+\frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0)(x-x_0)^{n-1}\\
&+\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}f^{(n)}(t)\mathrm{d}t\\
=&P_{n-1}(x)+\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}g(t)\mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

其中,

$$P_{n-1}(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0)(x-x_0)^{n-1},$$

这是一个阶数不超过 $n-1$ 的多项式. 这就证明了式 (8.1.6). 反过来设 f 由式 (8.1.6) 给出. 通过把式 (8.1.6) 右端积分中的 $(x-t)^{n-1}$ 展开得到

$$\begin{aligned}f(x)=&P_{n-1}(x)+\frac{1}{(n-1)!}\Big[x^{n-1}\int_{x_0}^{x}g(t)\mathrm{d}t-(n-1)x^{n-2}\int_{x_0}^{x}tg(t)\mathrm{d}t\\&+\frac{1}{2!}(n-1)(n-2)x^{n-3}\int_{x_0}^{x}t^2g(t)\mathrm{d}t-\cdots+(-1)^{n-2}(n-1)x\int_{x_0}^{x}t^{n-2}g(t)\mathrm{d}t\\&+(-1)^{n-1}\int_{x_0}^{x}t^{n-1}g(t)\mathrm{d}t\Big],\end{aligned}$$

求导得到

$$\begin{aligned}f'(x)=&P'_{n-1}(x)+\frac{1}{(n-1)!}\Big\{\Big[x^{n-1}g(x)+(n-1)x^{n-2}\int_{x_0}^{x}g(t)\mathrm{d}t\Big]\\&-(n-1)\Big[x^{n-1}g(x)+(n-2)x^{n-3}\int_{x_0}^{x}tg(t)\mathrm{d}t\Big]\\&+\frac{1}{2!}(n-1)(n-2)\Big[x^{n-1}g(x)+(n-3)x^{n-4}\int_{x_0}^{x}t^2g(t)\mathrm{d}t\Big]\\&-\cdots+(-1)^{n-2}(n-1)\Big[x^{n-1}g(x)+\int_{x_0}^{x}t^{n-2}g(t)\mathrm{d}t\Big]+(-1)^{n-1}x^{n-1}g(x)\Big\}\\=&P'_{n-1}(x)+\frac{1}{(n-1)!}\Big[1-(n-1)+\frac{1}{2!}(n-1)(n-2)-\cdots\\&+(-1)^{n-2}(n-1)+(-1)^{n-1}\Big]\\&+\frac{1}{(n-2)!}\Big[x^{n-2}\int_{x_0}^{x}g(t)dt-(n-2)x^{n-3}\int_{x_0}^{x}tg(t)\mathrm{d}t\\&+\frac{1}{2!}(n-2)(n-3)x^{n-4}\int_{x_0}^{x}t^2g(t)\mathrm{d}t-\cdots+(-1)^{n-2}\int_{x_0}^{x}t^{n-2}g(t)\mathrm{d}t\Big],\end{aligned}$$

由于

$$1-(n-1)+\frac{1}{2!}(n-1)(n-2)-\cdots+(-1)^{n-2}(n-1)+(-1)^{n-1}=(1-1)^{n-1}=0,$$

$$x^{n-2}-(n-2)x^{n-3}t+\frac{1}{2!}(n-2)(n-3)x^{n-4}t^2-\cdots+(-1)^{n-2}t^{n-2}=(x-t)^{n-2},$$

所以得到

$$f'(x)=P'_{n-1}(x)+\frac{1}{(n-2)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-2}g(t)\mathrm{d}t.$$

对这个等式继续按上述方法求导数, 应用归纳法一般地得到

$$f^{(k)}(x)=P_{n-1}^{(k)}(x)+\frac{1}{(n-k-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-k-1}g(t)\mathrm{d}t,\quad 1\leqslant k\leqslant n-1.$$

特别地, 取 $k=n-1$, 因为 $P_{n-1}(x)$ 是阶数不超过 $n-1$ 的多项式, 其 $n-1$ 阶导数是一常数, 就得到

$$f^{(n-1)}(x)=C+\int_{x_0}^{x} g(t)\mathrm{d}t.$$

对此式再求一次导数就得到 $f^{(n)}(x)=g(x)$. 这就证明了 f 是 g 的 n 阶原函数. 证毕.

8.1.5 斯特林公式

斯特林 (James Stirling) 公式给出了当 n 很大时, $n!$ 的一个非常精确的渐近公式. 它的具体形式为

$$n!=\sqrt{2\pi n}n^n\mathrm{e}^{-n+\frac{\theta_n}{12n}}, \tag{8.1.7}$$

其中 $0<\theta_n<1$. 这里不打算给出这个公式的证明, 因为它的完整证明是比较冗长的. 应用定积分, 可以比较容易地证明 $n!$ 的一个精确度稍微差一些的渐近公式, 它对以后的应用已经足够了.

定理 8.1.5(斯特林公式) 对每个正整数 $n\geqslant 2$ 存在相应的正数 ν_n, $\dfrac{7}{8}<\nu_n<1$, 使得

$$n!=\sqrt{n}n^n\mathrm{e}^{-n+\nu_n}. \tag{8.1.8}$$

证明 因为 $\ln x$ 是凹函数, 即 $(\ln x)''=-x^{-2}<0$, $\forall x>0$, 所以对每个正整数 k, 当 $k\leqslant x\leqslant k+1$ 时, $\ln x$ 的图像位于连接其两个端点 $(k,\ln k)$ 和 $(k+1,\ln(k+1))$ 的直线段的上方, 即成立

$$\ln x\geqslant (k+1-x)\ln k+(x-k)\ln(k+1),$$

而当 $k-\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant k+\dfrac{1}{2}$ 时, $\ln x$ 的图像又位于其中点 $(k,\ln k)$ 的切线的下方, 即成立

$$\ln x\leqslant \frac{x}{k}-1+\ln k$$

(图 8-1-1). 因此, 通过用相应梯形的面积来估计 $\ln x$ 图像下方区域的面积, 得到

$$\int_1^n \ln x\mathrm{d}x>\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2}[\ln k+\ln(k+1)]=\sum_{k=1}^{n}\ln k-\frac{1}{2}\ln n=\ln(n!)-\frac{1}{2}\ln n,$$

以及

$$\begin{aligned}\int_1^n \ln x\mathrm{d}x&=\int_1^{\frac{3}{2}}\ln x\mathrm{d}x+\int_{\frac{3}{2}}^{n-\frac{1}{2}}\ln x\mathrm{d}x+\int_{n-\frac{1}{2}}^{n}\ln x\mathrm{d}x\\&<\frac{1}{8}+\sum_{k=2}^{n-1}\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\ln x\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\Big(2\ln n-\frac{1}{2n}\Big)\\&<\frac{1}{8}+\sum_{k=2}^{n-1}\ln k+\frac{1}{2}\ln n-\frac{1}{8n}\\&<\frac{1}{8}+\ln(n!)-\frac{1}{2}\ln n.\end{aligned}$$

由于
$$\int_1^n \ln x\mathrm{d}x = x\ln x\Big|_1^n - \int_1^n \mathrm{d}x = n\ln n - n + 1,$$
所以从上面这些估计式得到
$$\ln(n!) - \frac{1}{2}\ln n < n\ln n - n + 1 < \frac{1}{8} + \ln(n!) - \frac{1}{2}\ln n,$$
或等价地
$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n - n + \frac{7}{8} < \ln(n!) < \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n - n + 1.$$
因此存在正数 $\nu_n \in \left(\frac{7}{8}, 1\right)$ 使得
$$\ln(n!) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n - n + \nu_n.$$
由此即得式 (8.1.8). 证毕.

注 由于 $\ln\sqrt{2\pi} \doteq 0.918\cdots$, 所以 $\mathrm{e}^{\frac{7}{8}} < \sqrt{2\pi} < \mathrm{e}$.

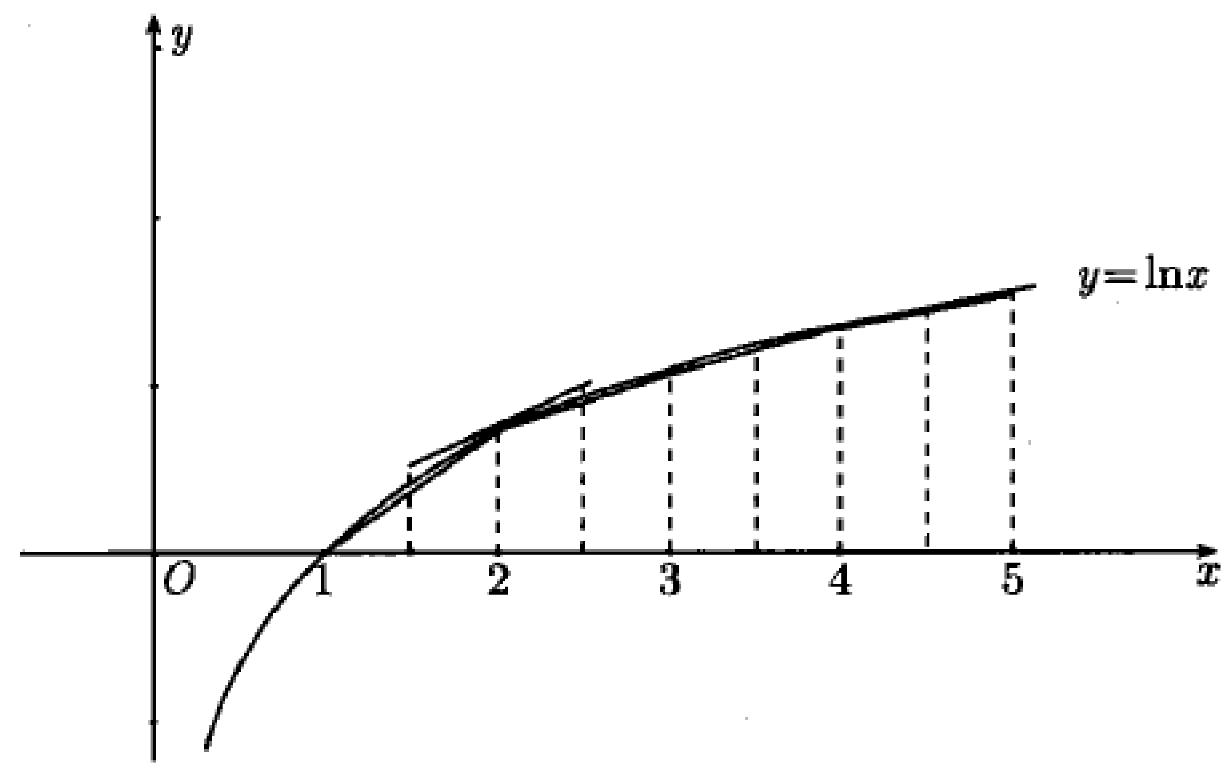


图 8-1-1 式 (8.1.8) 证明的示意图

习 题 8.1

1. 求下列微分方程的解:

(1) $y' + \dfrac{y}{x} = x^2$; (2) $y' + y\cos x = \mathrm{e}^{2x}$;

(3) $x^2y' - y = x^2\mathrm{e}^{x-\frac{1}{x}}$; (4) $yy'\sin x + \dfrac{1}{2}y^2\cos x = 1$.

2. 设 $a(x)$ 是区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数. 求方程 $y' = a(x)\cos^2 y$ 满足条件 $y(0) = y_0$ 的解, 其中 $y_0 \neq k\pi \pm \dfrac{\pi}{2}$, $k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$.

3. (1) 设 f 是区间 I 上具有连续导数的函数. 求方程 $y' + f'(x)y = f^2(x)f'(x)$ 的解;

(2) 设 φ 是定义在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上具有连续导数的函数, 且 $\varphi'(t) > 0$, $\forall t \in \mathbf{R}$. 又设 f 和 g 是区间 I 上的连续函数. 求方程 $\varphi'(y)y' + f(x)\varphi(y) = g(x)$ 的解.

4. 设 $y(x)$ 是区间 $[a,+\infty)$ 上具有连续导数的函数, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[y'(x)+y(x)]=0$. 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=0$.

5. (格朗沃尔引理的积分形式) 设 f, p, q 和 y 都是区间 $[a,b]$ 上的连续函数, 且 $p(x)\geqslant 0$, $q(x)\geqslant 0$, $\forall x\in[a,b]$. 又设

$$y(x)\leqslant f(x)+p(x)\int_a^x q(t)y(t)\mathrm{d}t,\qquad \forall x\in[a,b].$$

证明:

$$y(x)\leqslant f(x)+p(x)\int_a^x q(s)f(s)\mathrm{e}^{\int_s^x p(t)q(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}s,\qquad \forall x\in[a,b].$$

6. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的二阶导数, 且 $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=0$. 证明:

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{8}(b-a)^2\int_a^b|f''(x)|\mathrm{d}x.$$

7. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的 $n+1$ 阶导数, 且 $f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(n)}(a)=0$. 证明:

(1) $\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|\leqslant\dfrac{(b-a)^n}{n!}\displaystyle\int_a^b|f^{(n+1)}(x)|\mathrm{d}x$;

(2) 对任意 $1\leqslant p<\infty$ 成立

$$\left(\int_a^b|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\frac{(b-a)^{n+\frac{1}{p}}}{n!(np+1)^{\frac{1}{p}}}\int_a^b|f^{(n+1)}(x)|\mathrm{d}x;$$

(3) $\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|\leqslant\dfrac{(b-a)^{n+\frac{1}{2}}}{n!\sqrt{2n+1}}\left(\displaystyle\int_a^b|f^{(n+1)}(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$.

(4) 对任意 $1\leqslant p<\infty$ 成立

$$\left(\int_a^b|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\frac{2^{\frac{1}{p}}(b-a)^{n+\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}}{n!\sqrt{2n+1}(2np+p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\int_a^b|f^{(n+1)}(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

8. 运用斯特林公式求极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$;　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\mathrm{e}\sqrt[n]{n!}-n}{\mathrm{e}\ln n}$;　(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{(1^2+1)(2^2+1)\cdots(n^2+1)}}{n^2}$.

8.2　定积分在几何学中的应用

引进定积分的主要目的之一是为了计算平面图形的面积. 然而定积分在几何中的应用远不止这一点. 应用定积分, 不仅能够计算平面图形的面积, 还可计算旋转体的体积和侧面积以及曲线的弧长等. 本节介绍定积分在几何学中的这些应用.

8.2.1 平面图形的面积

从第 7 章已经知道, 由连续曲线 $y=f(x)$ $(f(x)>0,\ a\leqslant x\leqslant b)$ 和 Ox 轴以及两条直线 $x=a$ 和 $x=b$ 所围成的曲边梯形的面积为

$$S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

假如一个平面图形比较复杂, 可对它作一些分割, 把计算一个比较复杂的图形的面积的问题化归为计算若干个比较简单的图形的面积的问题. 而对这些比较简单的图形, 可通过适当的坐标轴的旋转和平移, 化归为计算由两条连续曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ $(f(x)>g(x),\ a\leqslant x\leqslant b)$ 以及两条直线 $x=a$ 和 $x=b$ 所围成的曲边梯形的面积的问题 (图 8-2-1). 显然, 这样的曲边梯形的面积为

$$S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=\int_a^b[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x. \tag{8.2.1}$$

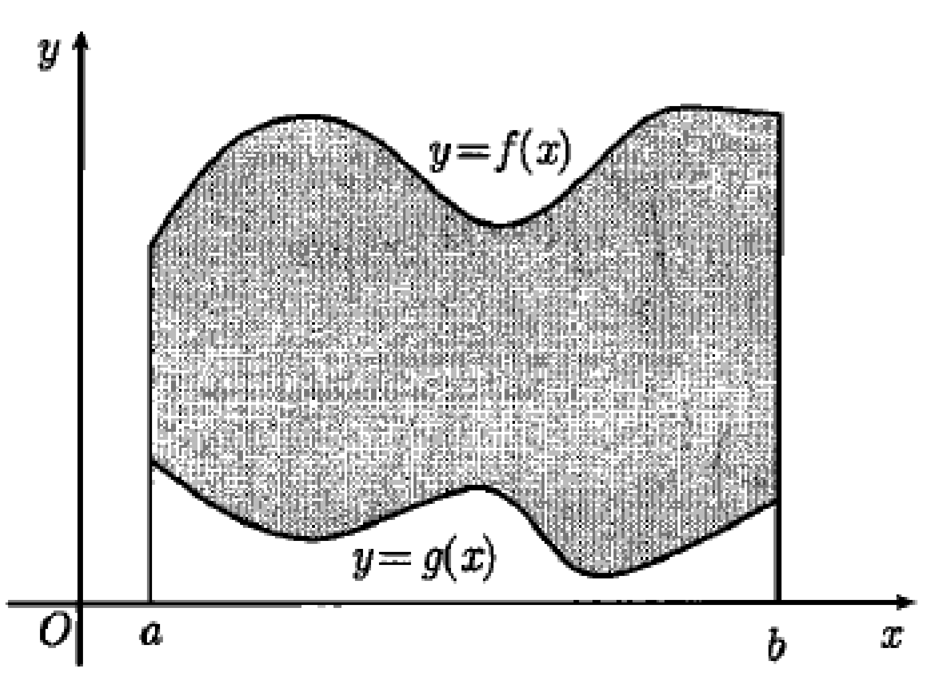


图 8-2-1 两条曲边的曲边梯形的面积

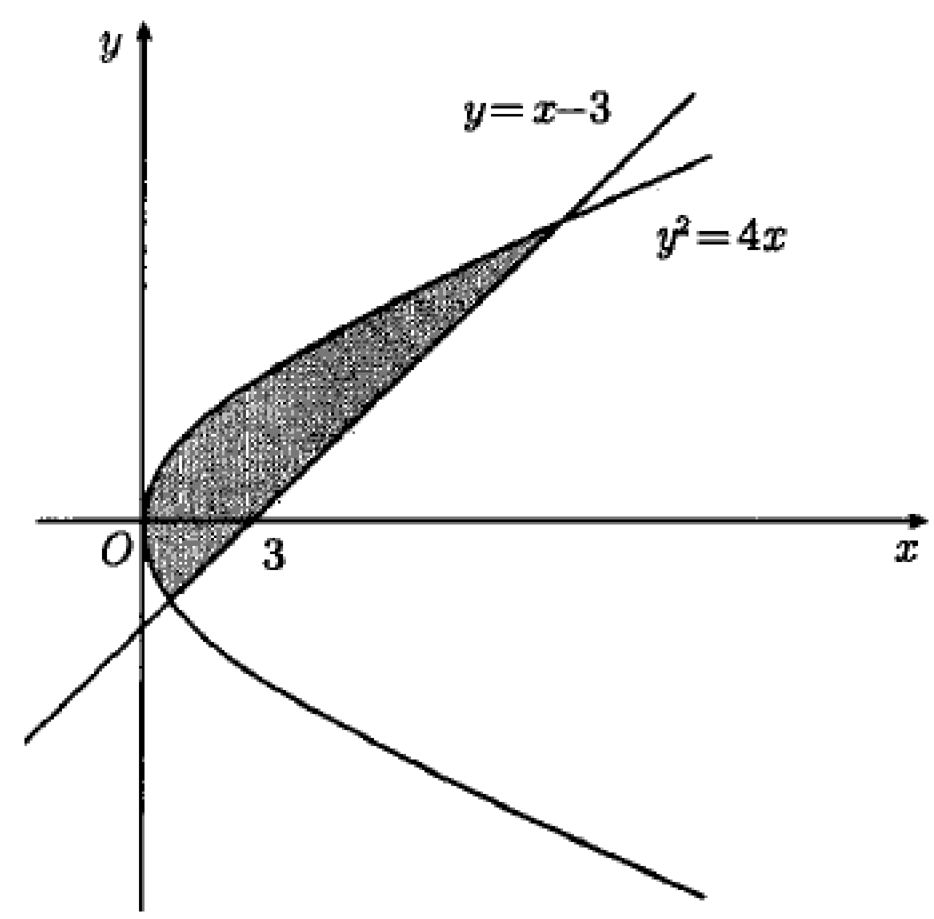


图 8-2-2 例 1 中区域的面积

例 1 求由抛物线 $y^2=4x$ 和直线 $y=x-3$ 所围成图形的面积.

解法一 抛物线 $y^2=4x$ 和直线 $y=x-3$ 的两个交点是 $(1,-2)$ 和 $(9,6)$. 把这个平面图形分成两个部分: 位于直线 $x=1$ 左侧的部分的面积记为 S_1, 位于该直线右侧的部分的面积记为 S_2(图 8-2-2). 则所求面积为

$$\begin{aligned}S=&S_1+S_2=\int_0^1[2\sqrt{x}-(-2\sqrt{x})]\mathrm{d}x+\int_1^9[2\sqrt{x}-(x-3)]\mathrm{d}x\\=&\frac{8}{3}x\sqrt{x}\Big|_0^1+\left(\frac{4}{3}x\sqrt{x}-\frac{1}{2}x^2+3x\right)\Big|_1^9=\frac{64}{3}.\end{aligned}$$

解法二 把这个平面图形看作是由曲线 $x=\dfrac{1}{4}y^2$ 和 $x=y+3$ 所围成的图形. 则

所求面积为

$$S=\int_{-2}^{6}\left[(y+3)-\frac{1}{4}y^2\right]\mathrm{d}y=\left(\frac{1}{2}y^2+3y-\frac{1}{12}y^3\right)\Big|_{-2}^{6}=\frac{64}{3}.$$

有许多平面图形, 其边界线的方程由参数方程给出. 设封闭曲线 C 的参数方程为

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad a\leqslant t\leqslant b,$$

其中 φ 和 ψ 都是区间 $[a,b]$ 上的连续可微函数且 $\varphi(a)=\varphi(b)$, $\psi(a)=\psi(b)$. 假设曲线 C 的走向 (参数 t 增加的方向) 是逆时针方向 (即沿曲线 C 的参数增加方向行走时, 它所围区域 Ω 位于左手方向), 则由此封闭曲线 C 所围区域 Ω 的面积为

$$S=-\int_a^b\psi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t=\int_a^b\varphi(t)\psi'(t)\mathrm{d}t. \tag{8.2.2}$$

证明如下: 如图 8-2-3, 用通过点 $A(\varphi(a),\psi(a))$ 的直线 $x=\varphi(a)$ 把区域 Ω 分成两个小区域 Ω_1 和 Ω_2. 则 Ω 的面积等于 Ω_1 和 Ω_2 的面积相加. 设点 B, D 和 E 所对应的参数 t 的值分别为 t_1, t_2 和 t_3, 又设在区间 $[a,t_1]$, $[t_1,t_2]$, $[t_2,t_3]$ 和 $[t_3,b]$ 上, 函数 $x=\varphi(t)$ 的反函数分别为 $t=\eta_1(x)$, $t=\eta_2(x)$, $t=\eta_3(x)$ 和 $t=\eta_4(x)$. 则曲线段 AB, BD, DE 和 EA 的方程分别为

$$y=\psi(\eta_1(x)),\ \ \varphi(t_1)\leqslant x\leqslant\varphi(a);\qquad y=\psi(\eta_2(x)),\ \ \varphi(t_1)\leqslant x\leqslant\varphi(t_2);$$

$$y=\psi(\eta_3(x)),\ \ \varphi(t_2)\leqslant x\leqslant\varphi(t_3);\qquad y=\psi(\eta_4(x)),\ \ \varphi(b)\leqslant x\leqslant\varphi(t_3).$$

由于 $\varphi(a)=\varphi(t_2)=\varphi(b)$, 所以有

$$\begin{aligned}
S&=\int_{\varphi(t_1)}^{\varphi(t_2)}[\psi(\eta_1(x))-\psi(\eta_2(x))]\mathrm{d}x+\int_{\varphi(t_2)}^{\varphi(t_3)}[\psi(\eta_4(x))-\psi(\eta_3(x))]\mathrm{d}x\\
&=\int_{\varphi(t_1)}^{\varphi(a)}\psi(\eta_1(x))\mathrm{d}x-\int_{\varphi(t_1)}^{\varphi(t_2)}\psi(\eta_2(x))\mathrm{d}x-\int_{\varphi(t_2)}^{\varphi(t_3)}\psi(\eta_3(x))\mathrm{d}x+\int_{\varphi(b)}^{\varphi(t_3)}\psi(\eta_4(x))\mathrm{d}x\\
&\overset{\text{令 } x=\varphi(t)}{=\!=\!=\!=\!=}\int_{t_1}^{a}\psi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t-\int_{t_1}^{t_2}\psi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t-\int_{t_2}^{t_3}\psi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t+\int_{b}^{t_3}\psi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t\\
&=-\int_a^{t_1}\psi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t-\int_{t_1}^{t_2}\psi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t-\int_{t_2}^{t_3}\psi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t-\int_{t_3}^{b}\psi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t\\
&=-\int_a^b\psi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

这就证明了式 (8.2.1) 中的第一个等式. 式 (8.2.1) 中的第二个等式由分部积分得到.

以上只是针对封闭曲线 C 的图形比较简单因而它所包围的区域 Ω 能够分成两个小区域 Ω_1 和 Ω_2 并且函数 $x=\varphi(t)$ 有反函数的情况给出了式 (8.2.1) 的证明. 对

于比较复杂的情形 (图 8-2-4), 公式 (8.2.1) 同样成立, 但证明比较复杂, 这里不仔细讨论.

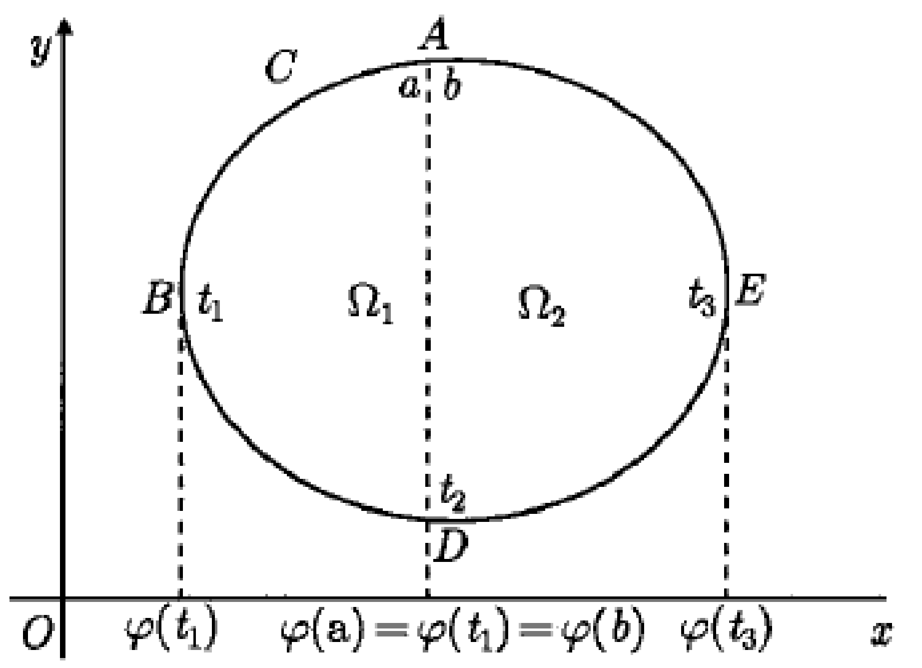


图 8-2-3 公式 (8.2.3) 证明的示意图

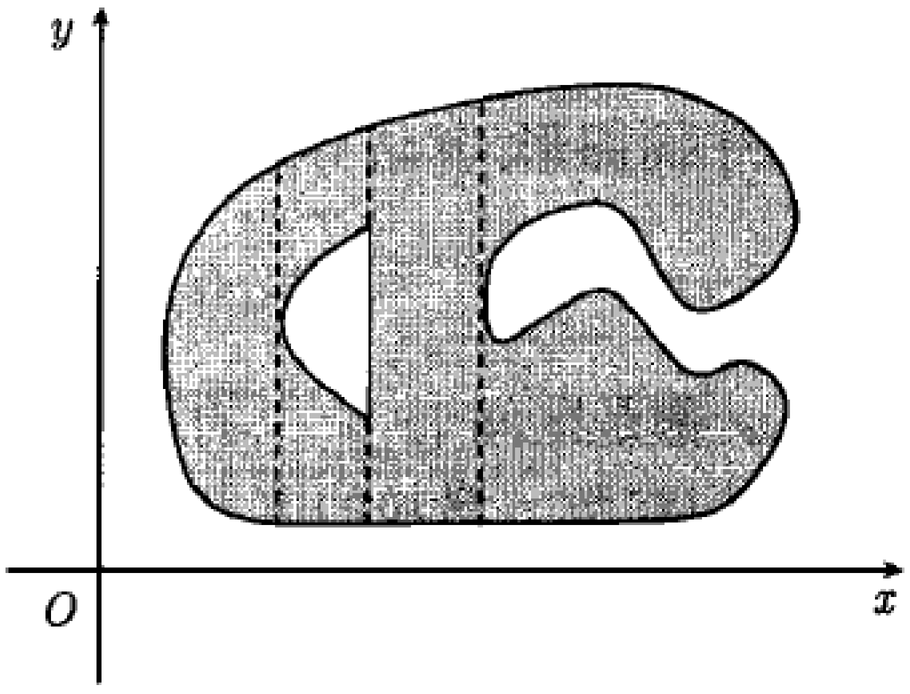


图 8-2-4 复杂区域面积的计算

如果封闭曲线 C 包围坐标原点 (图 8-2-5) 且它的极坐标方程为

$$r=r(\theta),\quad \theta_0\leqslant\theta\leqslant 2\pi+\theta_0$$

$(r(\theta_0)=r(2\pi+\theta_0))$, 则它所包围的区域 Ω 的面积为

$$S=\frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{2\pi+\theta_0} r^2(\theta)\mathrm{d}\theta. \tag{8.2.3}$$

这是因为, C 的参数方程是

$$x=r(\theta)\cos\theta,\quad y=r(\theta)\sin\theta,\quad \theta_0\leqslant\theta\leqslant 2\pi+\theta_0.$$

因此

$$\begin{aligned}
S&=-\int_{\theta_0}^{2\pi+\theta_0} r(\theta)\sin\theta\cdot[r(\theta)\cos\theta]'\mathrm{d}\theta\\
&=-\int_{\theta_0}^{2\pi+\theta_0} r(\theta)\sin\theta\cdot[r'(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta]\mathrm{d}\theta\\
&=-\int_{\theta_0}^{2\pi+\theta_0} r(\theta)r'(\theta)\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta+\int_{\theta_0}^{2\pi+\theta_0} r^2(\theta)\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\\
&=-\frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{2\pi+\theta_0} [r^2(\theta)]'\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta+\int_{\theta_0}^{2\pi+\theta_0} r^2(\theta)\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{2\pi+\theta_0} r^2(\theta)[\sin\theta\cos\theta]'\mathrm{d}\theta+\int_{\theta_0}^{2\pi+\theta_0} r^2(\theta)\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{2\pi+\theta_0} r^2(\theta)[\cos^2\theta-\sin^2\theta]\mathrm{d}\theta+\int_{\theta_0}^{2\pi+\theta_0} r^2(\theta)\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{2\pi+\theta_0} r^2(\theta)\mathrm{d}\theta.
\end{aligned}$$

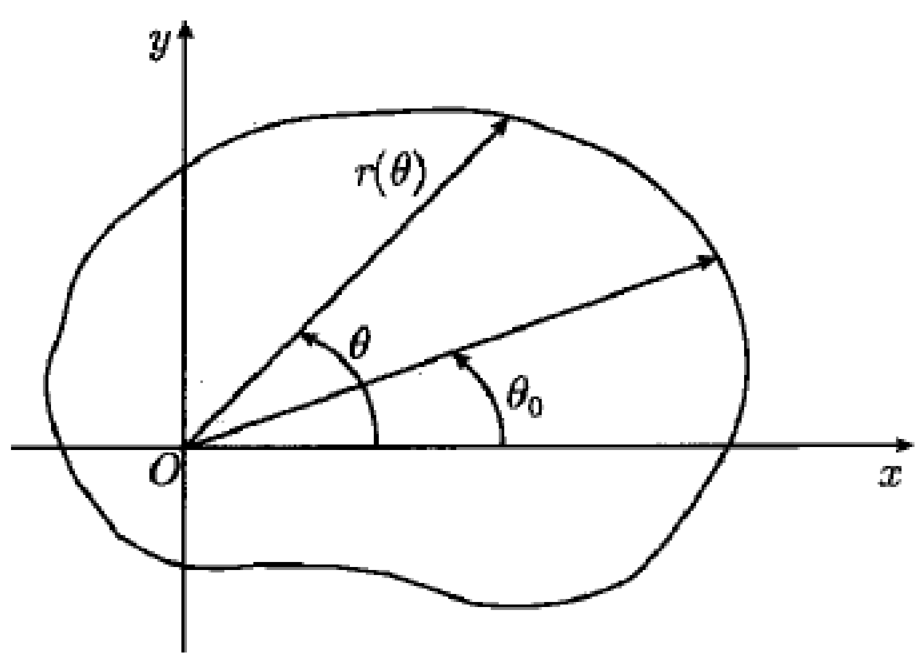


图 8-2-5　包含原点的区域

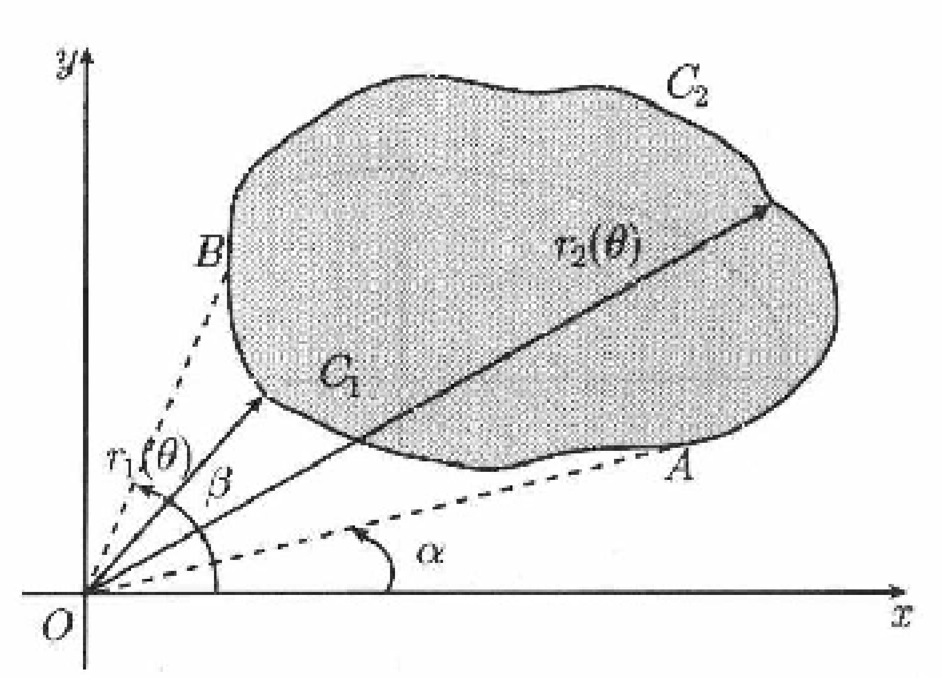


图 8-2-6　不含原点的区域

如果区域 Ω 不包含坐标原点 (图 8-2-6), 它由两条曲线 C_1 和 C_2 围成, 这两条曲线的极坐标方程分别为

$$C_1: \ r=r_1(\theta), \quad \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta; \qquad C_2: \ r=r_2(\theta), \quad \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$$

并且 $r_2(\theta)>r_1(\theta), \forall \theta \in(\alpha, \beta), r_1(\alpha)=r_2(\alpha), r_1(\beta)=r_2(\beta)$, 则区域 Ω 的面积为

$$S=\frac{1}{2} \int_\alpha^\beta\left[r_2^2(\theta)-r_1^2(\theta)\right] \mathrm{d} \theta. \tag{8.2.4}$$

这是因为, 从点 A 出发作一条辅助曲线 C_3 使其围绕坐标原点到达点 B, 则由 C_3 和 C_2 围成一个包围坐标原点的区域 Ω_2, 由 C_3 和 C_1 围成另一个包围坐标原点的区域 Ω_1. 区域 Ω 的面积等于区域 Ω_2 的面积减去区域 Ω_1 的面积. 这样应用公式 (8.2.3) 就得到了公式 (8.2.4), 因为相减时沿 C_3 的两个积分由于相等从而互相抵消了, 只剩下沿 C_2 的积分和沿 C_1 的积分相减.

例 2　求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 所包围区域的面积 (图 8-2-7).

解　椭圆的参数方程为

$$x=a \cos \theta, \quad y=b \sin \theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2 \pi,$$

所以它所包围区域的面积为

$$S=-\int_0^{2 \pi} b \sin \theta \cdot(a \cos \theta)^{\prime} \mathrm{d} \theta=a b \int_0^{2 \pi} \sin ^2 \theta \mathrm{d} \theta=\frac{1}{2} a b \int_0^{2 \pi}(1-\cos 2 \theta) \mathrm{d} \theta=\pi a b.$$

例 3　求心脏线 $r=a(1+\cos \theta)$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2 \pi$, 图 8-2-8) 所包围区域的面积.

解　根据公式 (8.2.3) 有

$$\begin{aligned} S & =\frac{1}{2} \int_0^{2 \pi} a^2(1+\cos \theta)^2 \mathrm{d} \theta=\frac{1}{2} a^2 \int_0^{2 \pi}\left(1+2 \cos \theta+\cos ^2 \theta\right) \mathrm{d} \theta \\ & =\frac{1}{2} a^2 \int_0^{2 \pi}\left(\frac{3}{2}+2 \cos \theta+\frac{1}{2} \cos 2 \theta\right) \mathrm{d} \theta=\frac{3}{2} \pi a^2. \end{aligned}$$

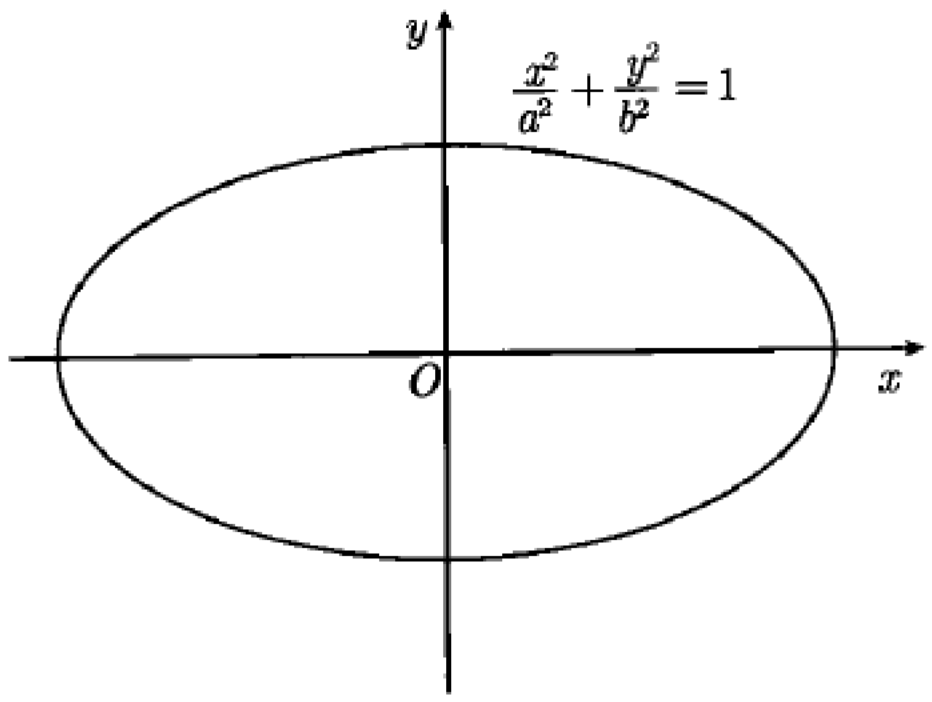


图 8-2-7 椭圆

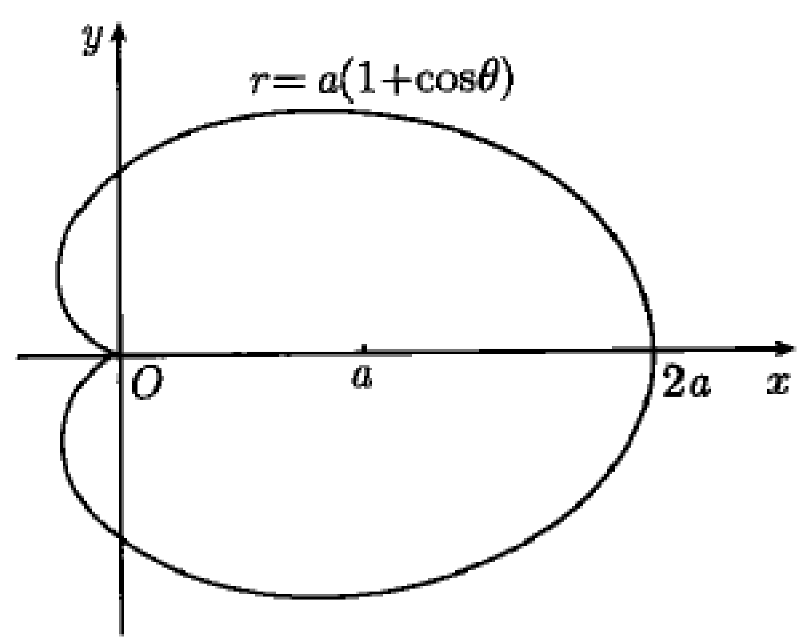


图 8-2-8 心脏线

8.2.2 旋转体的体积

设一平面曲线 C 的方程为

$$y=f(x),\quad a\leqslant x\leqslant b,$$

其中 f 是区间 $[a,b]$ 上的非负连续函数. 把这个曲线 C 绕 x 轴旋转一周得一旋转体 K(图 8-2-9), 下求这个旋转体 K 的体积 V.

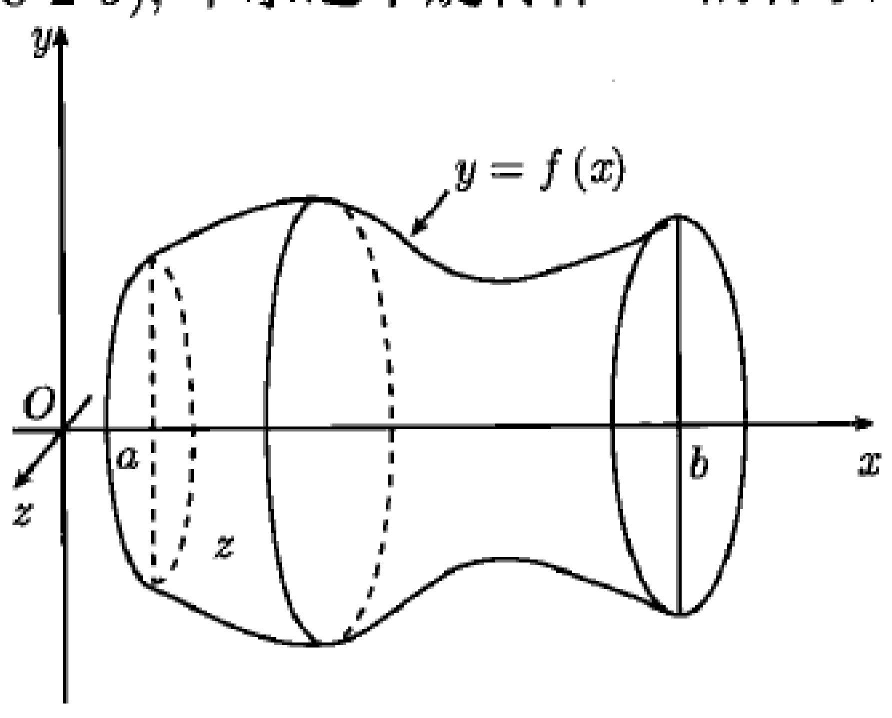


图 8-2-9 旋转体

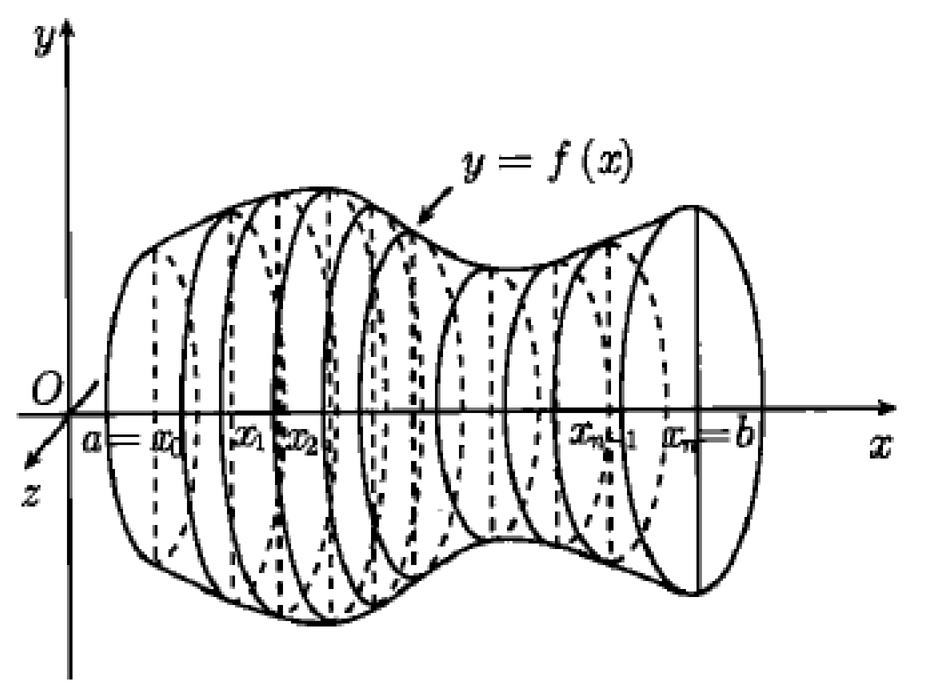


图 8-2-10 作分割求旋转体的体积

为此对区间 $[a,b]$ 作分割

$$\Delta:\ a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b.$$

这样相应地把旋转体 K 分割成为 n 个小旋转体 $K_1,\ K_2,\ \cdots,\ K_n$(图 8-2-10). 用 V_k 表示第 k 个小旋转体 K_k 的体积, $k=1,2,\cdots,n$. 则 $V=V_1+V_2+\cdots+V_n$. 设 f 在区间 $[x_{k-1},x_k]$ 上的最小值点和最大值点分别为 ξ_k 和 η_k, 则成立

$$\pi f^2(\xi_k)\Delta x_k\leqslant V_k\leqslant \pi f^2(\eta_k)\Delta x_k,\quad k=1,2,\cdots,n.$$

其中 $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$, $k=1,2,\cdots,n$. 从而

$$\sum_{k=1}^{n}\pi f^2(\xi_k)\Delta x_k\leqslant V\leqslant\sum_{k=1}^{n}\pi f^2(\eta_k)\Delta x_k.$$

由函数 f 在区间 $[a,b]$ 上连续可知

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}\pi f^2(\xi_k)\Delta x_k=\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}\pi f^2(\eta_k)\Delta x_k=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

所以令 $\|\Delta\|=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\Delta x_k\to 0$, 即知旋转体 K 的体积为

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x. \tag{8.2.5}$$

一般地, 如果一个立体 K 夹在两个平面 $x=a$ 和 $x=b$ 之间 (图 8-2-11), 这里 $a<b$, 并且已知对每个 $x\in[a,b]$, 该立体 K 的相应截面积为 $S(x)$, 并且 S 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数, 则该立体 K 的体积为

$$V=\int_a^b S(x)\mathrm{d}x. \tag{8.2.6}$$

事实上, 如前对区间 $[a,b]$ 作分割

$$\Delta:\ a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b.$$

这样相应地把立体 K 分割成为 n 个小立体 $K_1, K_2, \cdots, K_n$. 用 V_k 表示第 k 个小立体 K_k 的体积, $k=1,2,\cdots,n$. 则 $V=V_1+V_2+\cdots+V_n$. 设 S 在区间 $[x_{k-1},x_k]$ 上的最小值点和最大值点分别为 ξ_k 和 η_k, 则成立

$$S(\xi_k)\Delta x_k\leqslant V_k\leqslant S(\eta_k)\Delta x_k, k=1,2,\cdots,n.$$

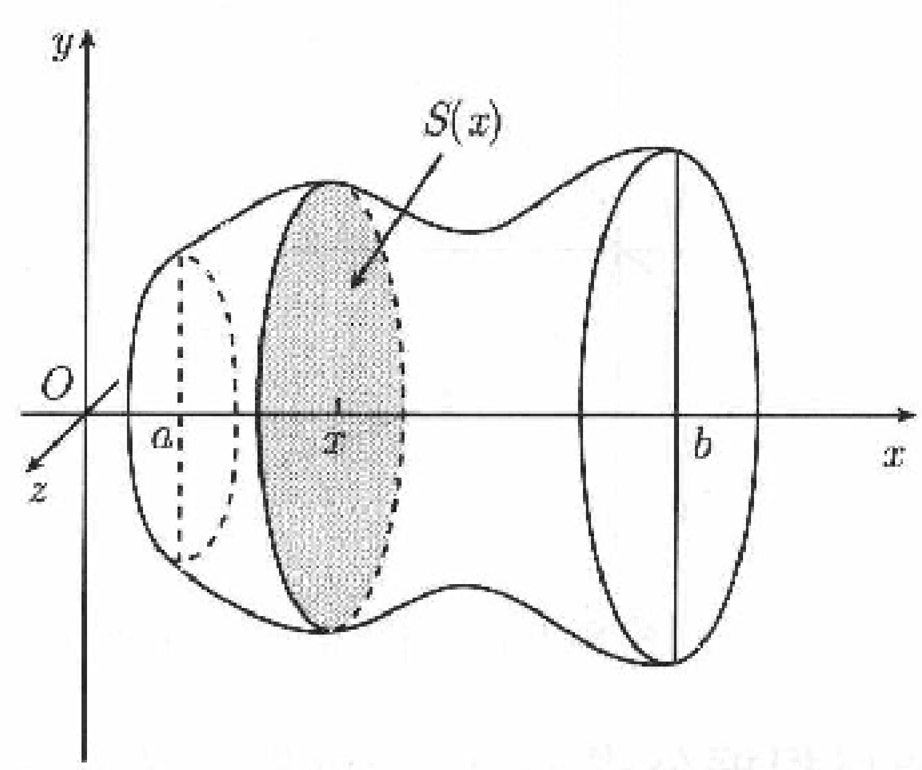


图 8-2-11 体积等于截面面积的积分

从而

$$\sum_{k=1}^{n}S(\xi_k)\Delta x_k\leqslant V\leqslant\sum_{k=1}^{n}S(\eta_k)\Delta x_k.$$

由函数 S 在区间 $[a,b]$ 上连续可知

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}S(\xi_k)\Delta x_k=\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}S(\eta_k)\Delta x_k=\int_a^b S(x)\mathrm{d}x.$$

所以令 $\|\Delta\|\to 0$, 就得到立体 K 的体积公式 (8.2.6).

例 4 求由抛物线 $y^2=2px$ 绕对称轴旋转所得旋转抛物面与平面 $x=a$ (a 和 p 为正常数) 所围成立体 (图 8-2-12) 的体积.

解 该立体是由曲线 $y=y(x)=\sqrt{2px}$ $(0\leqslant x\leqslant a)$ 绕 x 轴旋转一周所得到的旋转体. 因此根据公式 (8.2.5) 得

$$V=\pi\int_0^a y^2(x)\mathrm{d}x=\pi\int_0^a 2px\mathrm{d}x=\pi px^2\Big|_0^a=\pi pa^2.$$

例 5 求由半径为 a 的圆柱被一与底面成 θ 角而过底面直径的平面所截出的楔形体的体积.

解 把圆柱置于 $Oxyz$ 坐标系中, 使其底面位于 Oxy 平面上、对称轴与 Oz 轴重合, 并使楔形体的棱线在 Ox 轴上 (图 8-2-13). 则通过 x 轴上坐标为 x $(-a\leqslant x\leqslant a)$ 的点而与 Oyz 坐标面平行的平面与该楔形体的截面 (为一三角形) 的面积为

$$S(x)=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}\cdot\sqrt{a^2-x^2}\tan\theta=\frac{1}{2}(a^2-x^2)\tan\theta.$$

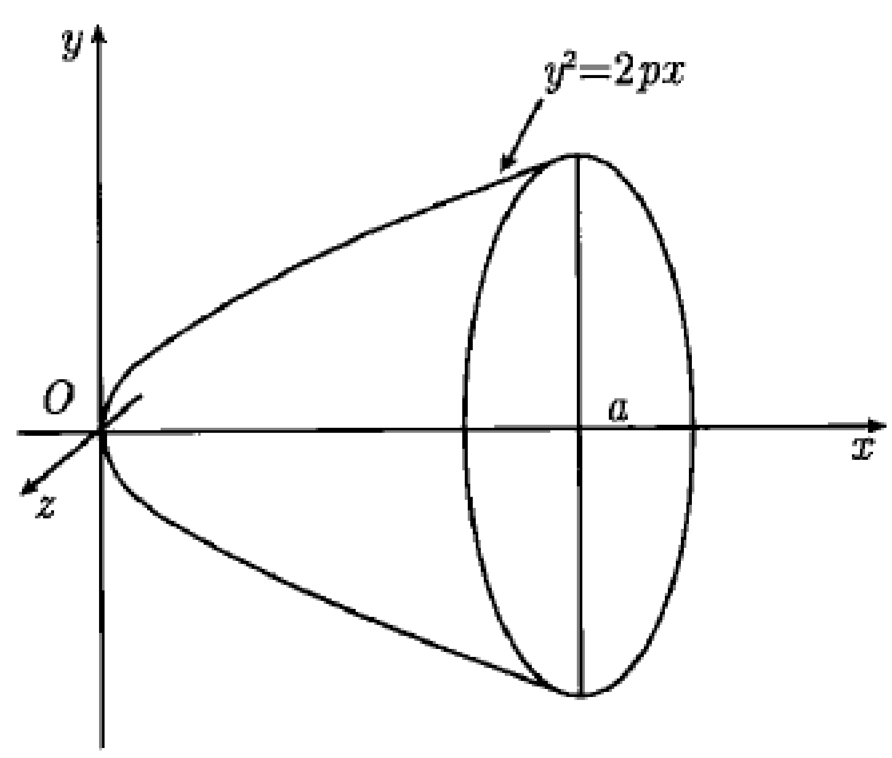


图 8-2-12 例 4 中的旋转抛物面

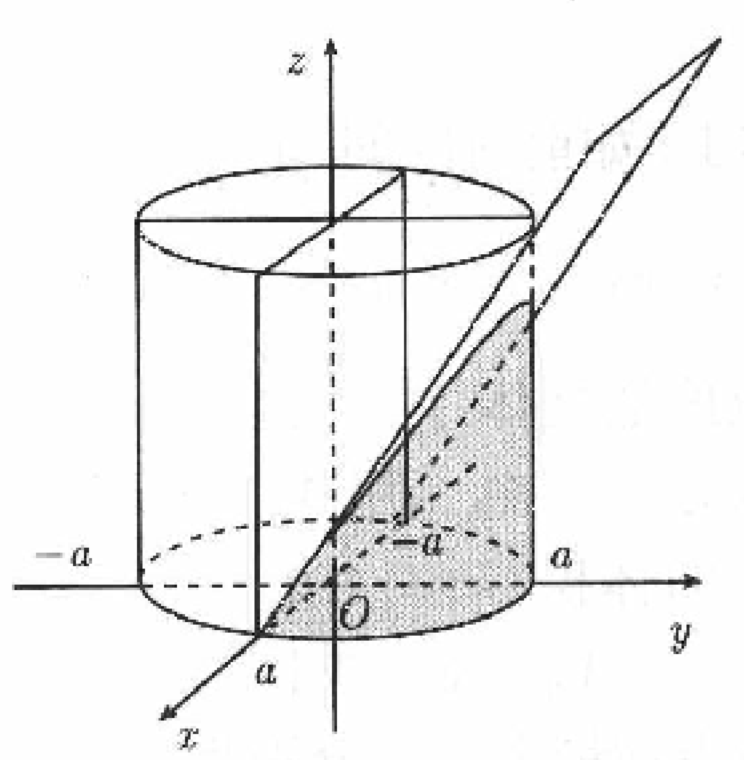


图 8-2-13 例 5 中的楔形体

所以根据公式 (8.2.6), 该楔形体的体积为

$$V=\int_{-a}^a S(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\tan\theta\int_{-a}^a(a^2-x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\tan\theta\left(a^2x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-a}^a=\frac{2}{3}a^3\tan\theta.$$

8.2.3 旋转体的侧面积

设平面曲线 C 的方程为

$$y=f(x),\quad a\leqslant x\leqslant b,$$

其中 f 是区间 $[a,b]$ 上的非负连续可微函数. 把这个曲线 C 绕 x 轴旋转一周得一旋转体 K(图 8-2-9), 下求这个旋转体 K 的侧面积 S.

先来计算圆台的侧面积 S. 设圆台的上、下底面的半径分别为 r 和 R $(r<R)$, 高为 h. 则它的侧面积为

$$S=\pi(r+R)\sqrt{h^2+(R-r)^2}.\tag{8.2.7}$$

事实上, 用若干个边线与圆台的中心线相重合而垂直于圆台底面的半平面截割此圆台, 就把圆台的侧面截割成一些近似于梯形的小曲面 (图 8-2-14); 截割越密, 小曲面与梯形的近似程度就越高. 设这些半平面与圆台底面的交线与其中一条交线的夹角依次为

$$0=\theta_0<\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_{n-1}<\theta_n=2\pi.$$

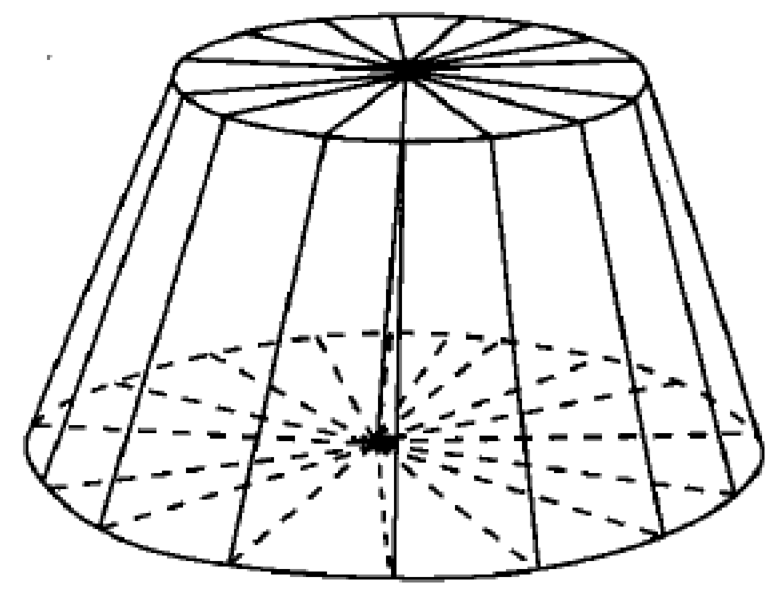


图 8-2-14　作分割求圆台的侧面积

则这些小曲面的面积近似地等于

$$S_k=\frac{1}{2}(r\Delta\theta_k+R\Delta\theta_k)\cdot\sqrt{h^2+(R-r)^2},\quad k=1,2,\cdots,n.$$

其中 $\Delta\theta_k=\theta_k-\theta_{k-1}$, $k=1,2,\cdots,n$. 从而圆台的侧面积近似地等于

$$S\approx\sum_{k=1}^{n}S_k=\frac{1}{2}\sqrt{h^2+(R-r)^2}\sum_{k=1}^{n}(r\Delta\theta_k+R\Delta\theta_k)=\pi(r+R)\sqrt{h^2+(R-r)^2}.$$

令 $\|\Delta\|=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\Delta\theta_k\to 0$, 上述近似成立的关系式变成严格的等式. 这就证明了式 (8.2.7).

现在计算旋转体 K 的侧面积 S. 对区间 $[a,b]$ 作分割

$$\Delta:\ a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b.$$

这样相应地把旋转体 K 分割成为 n 个小立体 K_1, K_2, $\cdots$, K_n (图 8-2-15). 用 S_k 表示第 k 个小旋转体 K_k 的侧面积, $k=1,2,\cdots,n$. 则 $S=S_1+S_2+\cdots+S_n$. 当 $\|\Delta\|=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\Delta x_k$ 充分小时, 每个小旋转体 K_k 都可近似地看成一个小圆台 (图 8-2-16) 从而其侧面积近似地等于

$$\begin{aligned}S_k&\approx\pi[f(x_{k-1})+f(x_k)]\sqrt{(\Delta x_k)^2+[f(x_k)-f(x_{k-1})]^2}\\&=\pi[f(x_{k-1})+f(x_k)]\sqrt{1+[f'(\xi_k)]^2}\Delta x_k,\quad k=1,2,\cdots,n,\end{aligned}$$

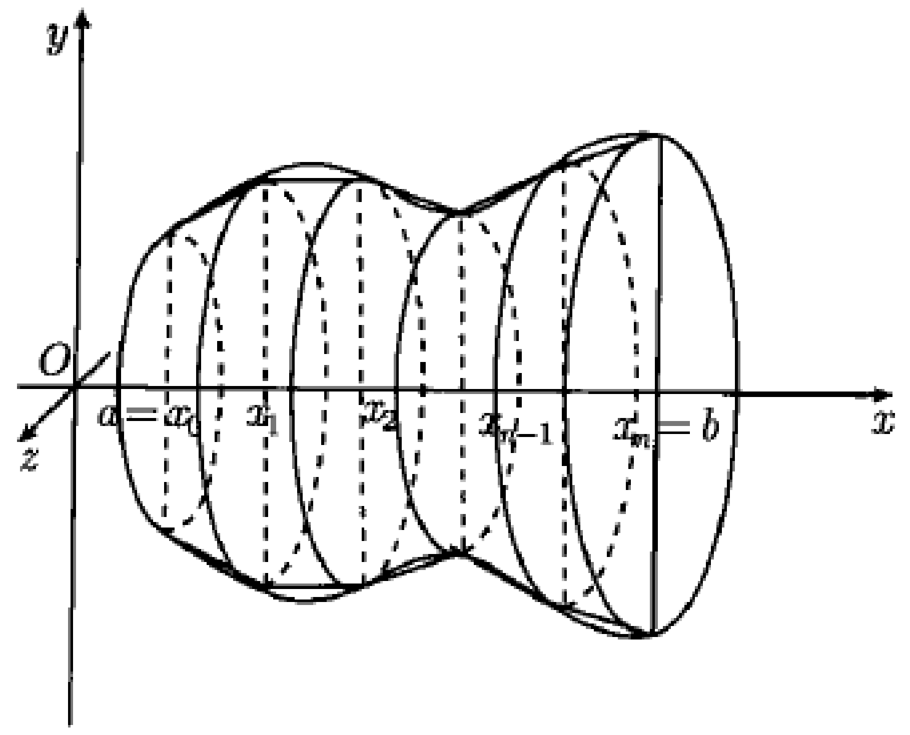


图 8-2-15　作分割求旋转体的表面积

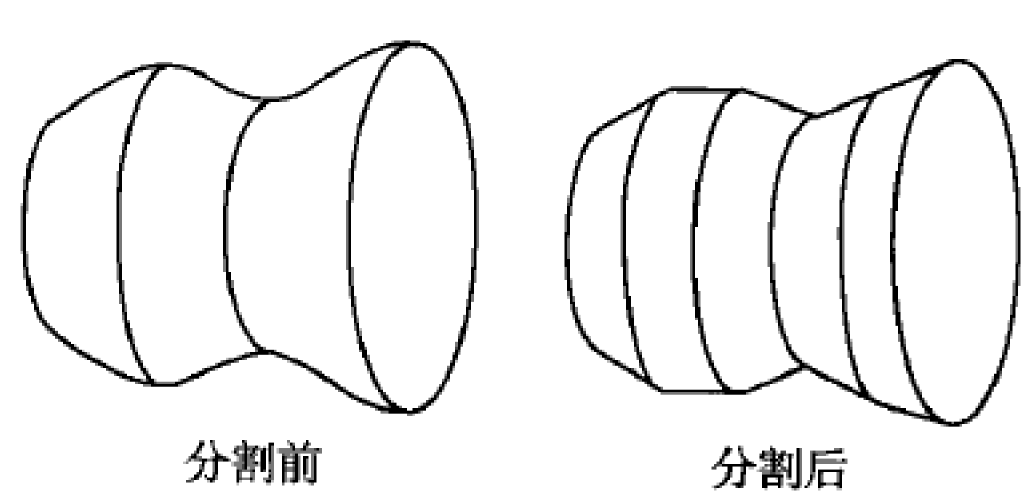


图 8-2-16　旋转体分割前后的比较

其中 $x_{k-1} \leqslant \xi_k \leqslant x_k$, $k=1,2,\cdots,n$. 因此旋转体 K 的侧面积近似地等于

$$S=\sum_{k=1}^{n} S_k \approx \sum_{k=1}^{n} \pi[f(x_{k-1})+f(x_k)]\sqrt{1+[f'(\xi_k)]^2}\Delta x_k$$
$$=\pi\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\sqrt{1+[f'(\xi_k)]^2}\Delta x_k+\pi\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\sqrt{1+[f'(\xi_k)]^2}\Delta x_k.$$

由于 $\|\Delta\|=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\Delta x_k$ 越小则上式的近似程度越高, 所以令 $\|\Delta\|\to 0$, 根据定理 7.4.7, 这时上式右端的两个和式都趋于定积分

$$\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x,$$

所以旋转体 K 的侧面积为

$$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x. \tag{8.2.8}$$

如果曲线 C 由参数方程给出:

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad a\leqslant t\leqslant b,$$

其中 φ 和 ψ 都是区间 $[a,b]$ 上的连续可微函数. 则用类似的方法可算出, 把曲线 C 绕 x 轴旋转一周所得旋转体 K 的侧面积为

$$S=2\pi\int_a^b \psi(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\mathrm{d}t. \tag{8.2.9}$$

公式 (8.2.9) 的证明留给读者作为习题.

例 6 把椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的上半部分绕 x 轴旋转一周得一旋转椭球面. 求这个旋转椭球面的表面积.

解法一 记 $c=\sqrt{a^2-b^2}$, $e=\dfrac{c}{a}$ (c 椭圆的半焦距, e 为离心率). 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上半部分的方程可写成

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},\quad -a\leqslant x\leqslant a.$$

易知

$$y'=-\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

所以根据公式 (8.2.8), 旋转椭球面的表面积为

$$S=2\pi\int_{-a}^{a}\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x^2}{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=\frac{2\pi b}{a^2}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^4-c^2x^2}\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{令\ x=\frac{a^2u}{c}} \frac{2\pi ab}{e}\int_{-e}^{e}\sqrt{1-u^2}\mathrm{d}u=\frac{2\pi ab}{e}\left(\frac{1}{2}u\sqrt{1-u^2}+\frac{1}{2}\arcsin u\right)\Big|_{-e}^{e}$$

$$=2\pi b^2+\frac{2\pi ab}{e}\arcsin e.$$

解法二 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上半部分的参数方程为

$$x=a\cos\theta,\quad y=b\sin\theta,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi.$$

所以根据公式 (8.2.9), 旋转椭球面的表面积为

$$S=2\pi\int_0^{\pi}b\sin\theta\sqrt{(-a\sin\theta)^2+(b\cos\theta)^2}\mathrm{d}\theta=2\pi b\int_0^{\pi}\sqrt{a^2-c^2\cos^2\theta}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$\xlongequal{令\ u=e\cos\theta} \frac{2\pi ab}{e}\int_{-e}^{e}\sqrt{1-u^2}\mathrm{d}u=\frac{2\pi ab}{e}\left(\frac{1}{2}u\sqrt{1-u^2}+\frac{1}{2}\arcsin u\right)\Big|_{-e}^{e}$$

$$=2\pi b^2+\frac{2\pi ab}{e}\arcsin e.$$

8.2.4 曲线的弧长

设空间曲线 C 的参数方程为

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad z=\chi(t),\quad a\leqslant t\leqslant b,$$

其中 φ,ψ 和 χ 都是区间 $[a,b]$ 上的连续可微函数. 下求曲线 C 的弧长 l(图 8-2-17).

设曲线 C 的两个端点为 A 和 B, 其中, A 的坐标为 $(\varphi(a),\psi(a),\chi(a))$, B 的坐标为 $(\varphi(b),\psi(b),\chi(b))$. 对区间 $[a,b]$ 作分割

$$\Delta:\ a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=b.$$

这时在曲线 C 上相应地得到 $n+1$ 个分点

$$M_0=A,\ M_1,\ M_2,\ \cdots,\ M_n=B,$$

其中, M_k 的坐标为 $(\varphi(t_k),\psi(t_k),\chi(t_k))$, $k=0,1,2,\cdots,n$. 当 $\|\Delta\|=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\Delta t_k$ ($\Delta t_k=t_k-t_{k-1}$) 充分小时, 点 M_k 和 M_{k-1} 充分接近, 因此曲线 C 上的弧段 $M_{k-1}M_k$ 可近似地看作直线段, 从而其弧长 Δl_k 近似地等于

$$\begin{aligned}\Delta l_k\approx&|M_{k-1}M_k|=\sqrt{[\varphi(t_k)-\varphi(t_{k-1})]^2+[\psi(t_k)-\psi(t_{k-1})]^2+[\chi(t_k)-\chi(t_{k-1})]^2}\\=&\sqrt{[\varphi'(\xi_k)]^2+[\psi'(\eta_k)]^2+[\chi'(\zeta_k)]^2}\Delta t_k,\end{aligned}$$

其中, $\xi_k,\eta_k,\zeta_k\in[t_{k-1},t_k]$, $k=1,2,\cdots,n$. 因此曲线 C 的弧长 l 近似地等于

$$l \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta l_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{[\varphi'(\xi_k)]^2 + [\psi'(\eta_k)]^2 + [\chi'(\zeta_k)]^2} \Delta t_k.$$

由于 $\|\Delta\|$ 越小则弧段 $M_{k-1}M_k$ 越近似于直线段从而上式的近似程度越高, 所以令 $\|\Delta\| \to 0$, 根据习题 7.4 第 14 题, 这时上式右端的和式趋于定积分

$$\int_a^b \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2} \mathrm{d}t,$$

进而得到

$$l = \int_a^b \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2} \mathrm{d}t. \tag{8.2.10}$$

这就是由参数方程给出的空间曲线 C 的弧长公式.

例 7 半径为 a 的圆柱以角速度 ω 绕其中心轴匀速旋转, 圆柱面上有一只蚂蚁以速度 v 沿圆柱的母线 (即圆柱面上平行于中心轴线的直线) 爬行. 蚂蚁在空间中的轨迹曲线叫做圆柱螺线 (图 8-2-18). 求蚂蚁的轨迹曲线的弧长和它在圆柱面上爬行的距离之比 (图 8-2-18).

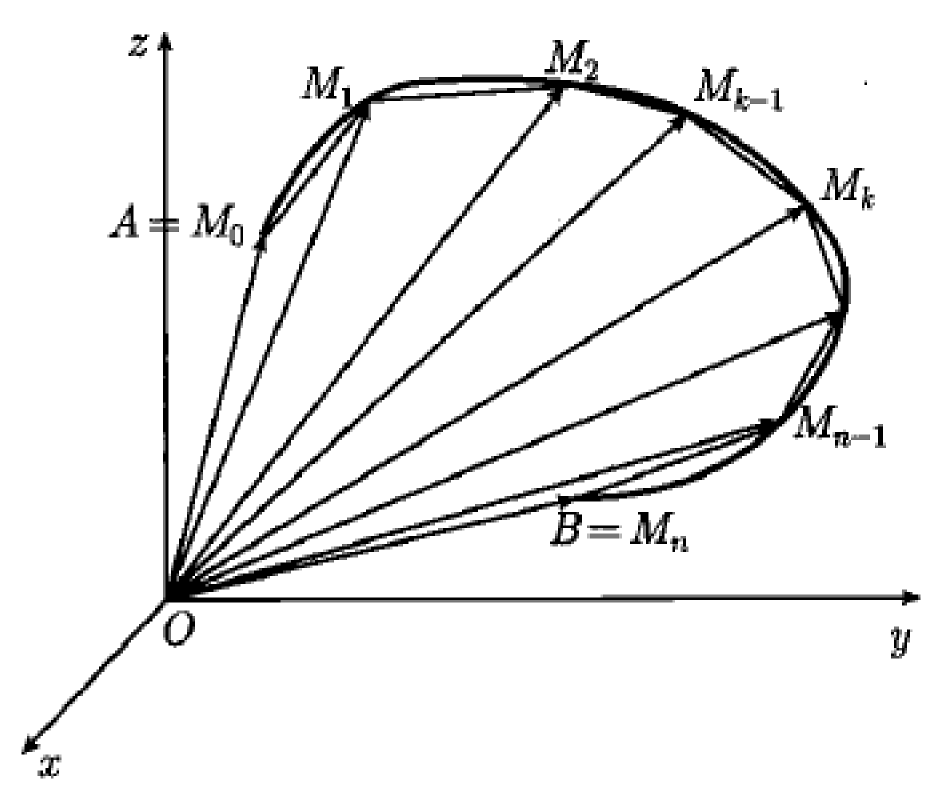


图 8-2-17 作分割求弧长

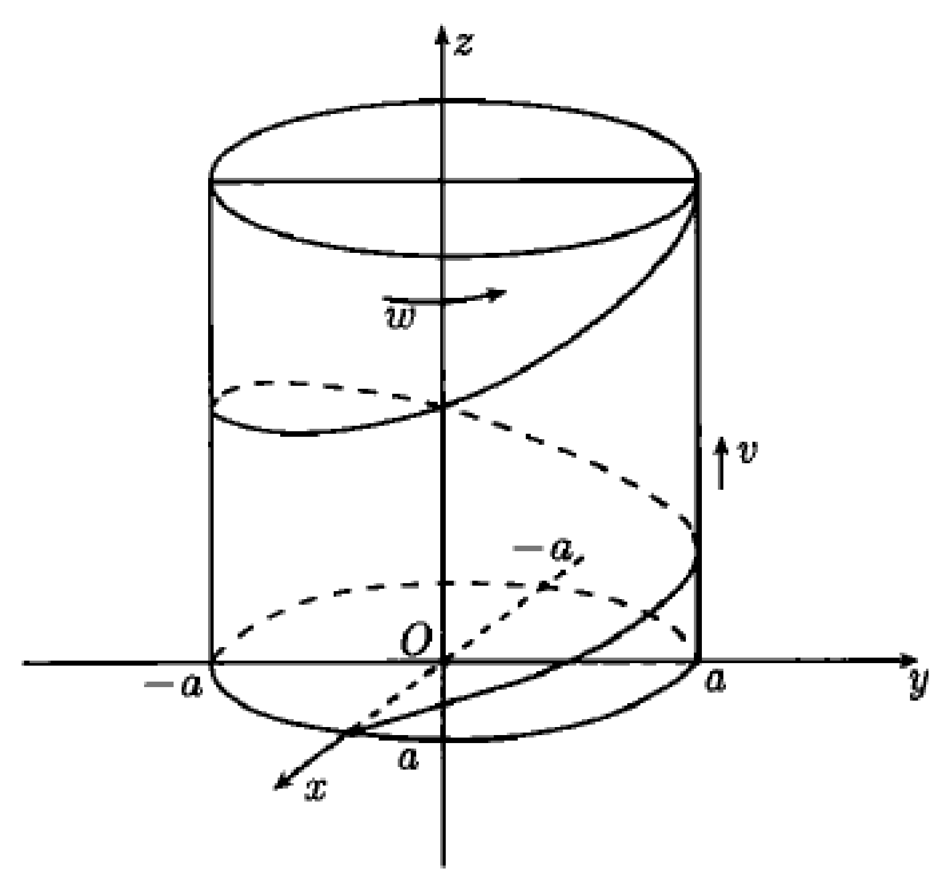


图 8-2-18 圆柱螺线

解 蚂蚁爬行的轨迹曲线, 即圆柱螺线的参数方程为

$$x = a\cos(\omega t), \quad y = a\sin(\omega t),$$
$$z = vt, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

根据公式 (8.3.10), 其弧长为

$$\begin{aligned} l &= \int_0^T \sqrt{[-a\omega\sin(\omega t)]^2 + [a\omega\cos(\omega t)]^2 + v^2} \mathrm{d}t \\ &= \int_0^T \sqrt{a^2\omega^2 + v^2} \mathrm{d}t = \sqrt{a^2\omega^2 + v^2} T. \end{aligned}$$

蚂蚁在圆柱面上爬行的距离显然为 vT, 所以轨迹曲线的弧长和爬行距离的比为 $\dfrac{\sqrt{a^2\omega^2+v^2}}{v}$.

例 8　求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的弧长.

解　椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的参数方程为

$$x=a\cos\theta,\quad y=b\sin\theta,\quad z=0,\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$$

根据公式 (8.3.10), 其弧长为

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{(-a\sin\theta)^2+(-b\cos\theta)^2}\mathrm{d}\theta=a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta.$$

其中 e 为椭圆的离心率. 如果 $a\neq b$ 即 $0<e<1$, 则函数 $\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}$ 的原函数不是初等函数, 因此上述定积分不能用初等函数表示出来.

由于椭圆的弧长不能用初等函数表示出来, 所以人们引进了有别于幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数这些基本初等函数的一类新的特殊函数, 称为**椭圆函数**. 椭圆上任意一段的弧长都可以借助于初等函数和这一类新的特殊函数表示出来. 关于椭圆函数的研究超出了本书的范围, 这里从略.

习　题　8.2

1. 求下列直角坐标方程所表示曲线围成区域的面积 (a, b, c 和 m 都表示正常数, 且 $a>c$):

   (1) $y=ax^2$, $x=ay^2$;　　(2) $y=a^{2m}-x^{2m}$, $y=0$;

   (3) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $x=c$;　　(4) $y^2=x^2(a^2-x^2)$.

2. 设 AB 是抛物线上的一条弦, 点 P 是该弦的中点. 过点 P 作平行于抛物线对称轴的直线交抛物线于点 Q. 用 S 表示抛物弓形 AQB 的面积.

   (1) 证明阿基米德定理: $S:\triangle AQB$的面积 $=4:3$;

   (2) 证明: $S=\dfrac{2}{3}bh$, 其中, b 为弓形的底边即弦 AB 的长, h 为弓形的高, 即弦 AB 到与其平行的抛物线切线的距离.

3. 半径为 a 的圆周在 Ox 轴上无滑动地滚动, 圆周上最初与 Ox 轴接触的点的运动轨迹叫做**旋轮线**, 它的参数方程为

$$x=a(t-\sin t),\qquad y=a(1-\cos t),$$

   其中 t 为圆周旋转过的角度. 求圆周旋转一周所得曲线与 Ox 轴围成区域的面积.

4. 半径为 b 的圆周在半径为 a 的圆周外部沿圆周无滑动地滚动, 圆周上一点的运动轨迹叫做**外摆线**, 它的参数方程为

$$x=(a+b)\cos t-b\cos\frac{a+b}{b}t,\qquad y=(a+b)\sin t-b\sin\frac{a+b}{b}t,$$

其中 t 为动圆周中心与定圆周中心的连线旋转过的角度. 设 $a>b$. 求动圆周旋转一周所得曲线与定圆周围成区域的面积.

5. 半径为 b 的圆周在半径为 $a>b$ 的圆周内部沿圆周无滑动地滚动, 圆周上一点的运动轨迹叫做**内摆线**, 它的参数方程为

$$x=(a-b)\cos t+b\cos\frac{a-b}{b}t,\qquad y=(a-b)\sin t-b\sin\frac{a-b}{b}t,$$

其中 t 为动圆周中心与定圆周中心的连线旋转过的角度. 求动圆周旋转一周所得曲线与定圆周围成区域的面积.

6. 一动点以定速 v 沿一射线做匀速运动, 而这一射线又以定速 ω 绕极点 O 做匀速转动. 这时该动点的运动轨迹叫做**阿基米德螺线**, 它的极坐标方程为

$$r=a\theta,$$

其中 r 为极径, θ 为极角, 而 $a=\dfrac{v}{\omega}$. 证明阿基米德定理: 螺线第一圈与初始线所围区域的面积 S 等于第一个圆面积的三分之一, 即 $S=\dfrac{1}{3}\pi(2\pi a)^2=\dfrac{4}{3}\pi^3a^2$.

7. 化曲线的直角坐标方程为极坐标方程或参数式方程, 以求它们所包围区域的面积:
   (1) (星形线) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$;
   (2) (心脏线) $(x^2+y^2)^2-2ax(x^2+y^2)=a^2y^2$;
   (3) (双纽线) $(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0$;
   (4) (笛卡儿叶形线) $x^3+y^3=3axy$;
   (5) $x^4+y^4=a^2(x^2+y^2)$;
   (6) $x^4+y^4=a^2x^2y$.

8. 从平面外一点 P 向平面上一个有界区域 D 的边界 ∂D 上每点作连线, 所有这些连线形成的曲面叫做**锥面**, 锥面与区域 D 包围的立体叫做**锥体**, 区域 D 叫锥体的底面, 点 P 到平面的距离叫锥体的高.
   (1) 设锥体的底面面积为 S, 高为 h. 用平行于锥体底面且与底面距离为 $z(<h)$ 的平面截锥体, 设所得平面区域的面积记作 $S(z)$. 证明:

$$S(z)=\frac{(h-z)^2}{h^2}S;$$

   (2) 证明锥体的体积公式 $V=\dfrac{1}{3}hS$;

(3) 用两张平行于锥体底面的平面截锥体，所截出的夹在两平面之间的立体叫做**台体**. 证明台体的体积公式

$$V = \frac{1}{3}h(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}),$$

其中，S_1, S_2 为台体的两个平行底面的面积；h 为台体的高，即两平行平面之间的距离.

9. 求下列旋转体的体积：

(1) 旋转抛物体，其底面面积为 S，高为 h；

(2) 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 与直线 $x = c$ $(|c| < a)$ 所包围部分绕 Ox 轴旋转所得旋转体；

(3) 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 与两条直线 $y = \pm c$ $(c > 0)$ 所包围部分绕 Oy 轴旋转所得旋转体.

10. 设 $0 < a < b$, $h > 0$. 把抛物线 $y = b - \dfrac{4(b-a)}{h^2}x^2$ 在 $-\dfrac{h}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{h}{2}$ 的部分绕 Ox 轴旋转一周，所得旋转曲面加装两个底就是装酒用的酒桶，其中，a 为酒桶底面半径，b 为酒桶中腰半径，h 为酒桶的高. 证明酒桶的容积为

$$V = \frac{\pi h}{15}(3a^2 + 4ab + 8b^2).$$

11. 求椭球体 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leqslant 1$ 的体积.

12. 求圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 与两平面 $z = 0$ 和 $z = \dfrac{1}{2}x + 2a$ 所包围立体的体积.

13. 证明把 Oxy 平面上的区域

$$\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta, \qquad 0 \leqslant r \leqslant r(\theta)$$

(其中 $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant \pi$, r 为极径, θ 为极角) 绕 Ox 轴旋转所得旋转体的体积为

$$V = \frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\theta)\sin\theta \mathrm{d}\theta.$$

14. 证明下列侧面积公式：

(1) 球冠的侧面积 $S = 2\pi Rh = \pi(a^2 + h^2)$，$h$ 为球冠的高，R 为球半径，a 为球冠底圆的半径；

(2) 球台的侧面积 $S = 2\pi Rh$，h 为球台的高，R 为球半径；

(3) 圆锥体的侧面积 $S = \pi rl$，l 为母线的长度，r 为底圆的半径.

15. 求旋转下列曲线一周所得旋转面的面积：

(1) 正弦曲线 $y = \sin x$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$ 绕 Ox 轴旋转；

(2) 圆周 $x^2 + (y - R)^2 = r^2$ $(0 < r < R)$ 绕 Ox 轴旋转 (环面或轮胎面)；

(3) 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 位于右半平面且夹在两条直线 $y=\pm c\ (c>0)$ 之间的部分绕 Oy 轴旋转;

(4) 心脏线 $r=a(1+\cos\theta)$ 绕 Ox 轴旋转;

(5) 双纽线 $r^2=a^2\cos 2\theta$ 绕 Ox 轴旋转.

16. 求下列曲线的弧长:

(1) 半立方抛物线 $y=x^{\frac{3}{2}}\ (0\leqslant x\leqslant 4)$;

(2) 抛物线 $y^2=2px\ (0\leqslant x\leqslant c)$;

(3) 指数曲线 $y=e^x\ (0\leqslant x\leqslant c)$;

(4) 悬链线 $y=a\cosh\dfrac{x}{a}\ (0\leqslant x\leqslant c)$;

(5) 心脏线 $r=a(1+\cos\theta)$;

(6) 阿基米德螺线 $r=a\theta\ (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$;

(7) 星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$;

(8) 双曲螺线 $x=a\cosh t,\ y=a\sinh t,\ z=bt\ (0\leqslant t\leqslant c)$.

17. 证明椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的周长等于正弦曲线 $y=c\sin\dfrac{x}{b}$ 的一波之长, $c=\sqrt{a^2-b^2}$.

8.3 定积分在物理学中的应用

定积分在物理学中的应用是非常广泛的. 本小节仅举几个例子以使读者对定积分在这个方面的应用有所了解.

8.3.1 已知质量密度求质量与质心和已知电荷密度求电量

设空间曲线 C 的参数方程为

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad z=\chi(t),\quad a\leqslant t\leqslant b,\tag{8.3.1}$$

其中 φ,ψ 和 χ 都是区间 $[a,b]$ 上的连续可微函数. 再设曲线 C 是由质点构成的, 在其上参数为 t 的点处的质量密度为 $\rho(t)$. 下求曲线 C 的总质量 M.

如 8.2 节, 设曲线 C 的两个端点为 A 和 B, 其中, A 的坐标为 $(\varphi(a),\psi(a),\chi(a))$, B 的坐标为 $(\varphi(b),\psi(b),\chi(b))$, 用 P_t 表示 C 上参数值为 t 的点. 则根据 8.2 节的讨论, 曲线 C 在 A 点和 P_t 点之间的弧长为

$$l(t)=\int_a^t\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[\chi'(t)]^2}\mathrm{d}t,$$

从而弧长关于参数 t 的导数为

$$l'(t)=\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[\chi'(t)]^2}.\tag{8.3.2}$$

这个量将在本节的讨论中多次用到.

对区间 $[a,b]$ 作分割

$$\Delta:\ a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=b.$$

这时在曲线 C 上相应地得到 $n+1$ 个分点

$$P_0=A,\ P_1,\ P_2,\ \cdots,\ P_n=B,$$

其中点 P_k 的坐标为 $(\varphi(t_k),\psi(t_k),\chi(t_k))$, $k=0,1,2,\cdots,n$. 当 $\|\Delta\|=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\Delta t_k(\Delta t_k=t_k-t_{k-1})$ 充分小时, 点 P_k 和点 P_{k-1} 充分接近, 因此曲线 C 上的弧段 $P_{k-1}P_k$ 可近似地看成质量分布均匀的直线段, 从而其质量 ΔM_k 近似地等于

$$\begin{aligned}\Delta M_k\approx&\rho(t_k)|P_{k-1}P_k|\\=&\rho(t_k)\sqrt{[\varphi(t_k)-\varphi(t_{k-1})]^2+[\psi(t_k)-\psi(t_{k-1})]^2+[\chi(t_k)-\chi(t_{k-1})]^2}\\=&\rho(t_k)\sqrt{[\varphi'(\xi_k)]^2+[\psi'(\eta_k)]^2+[\chi'(\zeta_k)]^2}\Delta t_k,\end{aligned}$$

其中 $\xi_k,\eta_k,\zeta_k\in[t_{k-1},t_k]$, $k=1,2,\cdots,n$. 因此曲线 C 的总质量 M 近似地等于

$$M=\sum_{k=1}^{n}\Delta M_k\approx\sum_{k=1}^{n}\rho(t_k)\sqrt{[\varphi'(\xi_k)]^2+[\psi'(\eta_k)]^2+[\chi'(\zeta_k)]^2}\Delta t_k.$$

由于 $\|\Delta\|$ 越小则弧段 $P_{k-1}P_k$ 越近似于质量分布均匀的直线段从而上式的近似程度越高, 所以令 $\|\Delta\|\to 0$ 就得到了 M 的准确值. 根据与定理 7.4.7 和 7.4 节第 14 题类似的推理, 当 $\|\Delta\|\to 0$ 时, 上式右端的和式趋于定积分

$$\int_a^b\rho(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[\chi'(t)]^2}\mathrm{d}t=\int_a^b\rho(t)l'(t)\mathrm{d}t,$$

所以得到

$$M=\int_a^b\rho(t)l'(t)\mathrm{d}t,\tag{8.3.3}$$

其中 $l'(t)$ 为弧长关于参数 t 的导数, 由式 (8.3.2) 给出. 这就是曲线 C 的质量公式.

如果曲线 C 带有电荷, 设在其上参数为 t 的点处的电荷密度为 $q(t)$, 则可完全类似地求得曲线 C 所带的总电荷量为

$$Q=\int_a^b q(t)l'(t)\mathrm{d}t.\tag{8.3.4}$$

再来计算前述由质点构成的曲线 C 的质心. 根据物理学中的定义, 由 n 个质量分别为 m_1, m_2, $\cdots$, m_n 的质点构成的质点系, 如果这 n 个质点在空间中的坐标分别

为 (x_1,y_1,z_1), (x_1,y_1,z_1), $\cdots$, (x_n,y_n,z_n), 则这个质点系的质心坐标为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$, 其中

$$\bar{x}=\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k m_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}, \qquad \bar{y}=\frac{\sum_{k=1}^{n} y_k m_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}, \qquad \bar{z}=\frac{\sum_{k=1}^{n} z_k m_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}.$$

对于由质点构成的曲线 C, 把它分割成一些小的曲线段 P_0P_1, P_1P_2, $\cdots$, $P_{n-1}P_n$, 每个曲线段 $P_{k-1}P_k$ 都可近似地看成一个质点. 因此这个质点系的质心坐标为 $(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$, 其中

$$\tilde{x}=\frac{\sum_{k=1}^{n}\varphi(\xi_k)\Delta M_k}{\sum_{k=1}^{n}\Delta M_k}, \qquad \tilde{y}=\frac{\sum_{k=1}^{n}\psi(\xi_k)\Delta M_k}{\sum_{k=1}^{n}\Delta M_k}, \qquad \tilde{z}=\frac{\sum_{k=1}^{n}\chi(\xi_k)\Delta M_k}{\sum_{k=1}^{n}\Delta M_k},$$

其中 $(\varphi(\xi_k),\psi(\xi_k),\chi(\xi_k))$ 为第 k 个曲线段 $P_{k-1}P_k$ 上的一点 ($\xi_k\in[t_{k-1},t_k]$), 而 ΔM_k 为第 k 个曲线段 $P_{k-1}P_k$ 的质量, 即

$$\Delta M_k=\int_{t_{k-1}}^{t_k}\rho(t)l'(t)\mathrm{d}t, \quad k=1,2,\cdots,n.$$

因此分母上的量就是曲线 C 的总质量 M,

$$\sum_{k=1}^{n} M_k=\int_a^b\rho(t)l'(t)\mathrm{d}t=M.$$

应用积分中值定理有

$$\Delta M_k=\rho(\eta_k)l'(\eta_k)\Delta t_k, \quad k=1,2,\cdots,n,$$

其中 $\eta_k\in[t_{k-1},t_k]$, $k=1,2,\cdots,n$. 因此

$$\sum_{k=1}^{n}\varphi(\xi_k)\Delta M_k=\sum_{k=1}^{n}\varphi(\xi_k)\rho(\eta_k)l'(\eta_k)\to\int_a^b\varphi(t)\rho(t)l'(t)\mathrm{d}t \qquad \text{当 } \|\Delta\|\to 0.$$

类似地有

$$\sum_{k=1}^{n}\psi(\xi_k)\Delta M_k\to\int_a^b\psi(t)\rho(t)l'(t)\mathrm{d}t \qquad \text{当 } \|\varDelta\|\to 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n}\chi(\xi_k)\Delta M_k\to\int_a^b\chi(t)\rho(t)l'(t)\mathrm{d}t \qquad \text{当 } \|\varDelta\|\to 0.$$

所以曲线 C 的的质心坐标为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$,

$$\bar{x}=\frac{1}{M}\int_a^b\varphi(t)\rho(t)l'(t)\mathrm{d}t, \quad \bar{y}=\frac{1}{M}\int_a^b\psi(t)\rho(t)l'(t)\mathrm{d}t, \quad \bar{z}=\frac{1}{M}\int_a^b\chi(t)\rho(t)l'(t)\mathrm{d}t, \tag{8.3.5}$$

其中, $M=\int_a^b \rho(t)l'(t)\mathrm{d}t$ 为曲线 C 的总质量; $l'(t)$ 为弧长关于参数 t 的导数, 由式 (8.3.2) 给出.

例 1　求质量均匀分布的半圆周 $x^2+y^2=R^2(y\geqslant 0)$ 的质心.

解　设半圆周的质量密度为 ρ, 则其总质量为 $M=\pi R\rho$. 由于半圆周的参数方程为

$$x=R\cos\theta,\quad y=R\sin\theta,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi,$$

而 $\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}=R$, 所以半圆周的质心为 $(\bar{x},\bar{y})$, 其中

$$\bar{x}=\frac{1}{M}\int_0^\pi \rho R\cos\theta\cdot R\mathrm{d}\theta=\frac{R}{\pi}\int_0^\pi \cos\theta\mathrm{d}\theta=0,$$

$$\bar{y}=\frac{1}{M}\int_0^\pi \rho R\sin\theta\cdot R\mathrm{d}\theta=\frac{R}{\pi}\int_0^\pi \sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{2R}{\pi},$$

即半圆周的质心坐标为 $\left(0,\frac{2R}{\pi}\right)$.

8.3.2　由质点构成的曲线对质点的吸引力和带电导线对点电荷的库仑力

设空间曲线 C 的参数方程如式 (8.3.1), 其中 φ, ψ 和 χ 都是区间 $[a,b]$ 上的连续可微函数. 再设曲线 C 是由质点构成的, 在其上参数为 t 的点处的质量密度为 $\rho(t)$. 下求曲线 C 对置于坐标原点 O 处质量为 M_0 的质点的万有引力 $\boldsymbol{F}$.

根据牛顿万有引力定律, 两个质量分别为 M_0 和 M、距离为 r 的质点相互之间的吸引力为

$$\boldsymbol{F}=\frac{GM_0M}{r^2}\boldsymbol{e},$$

其中 G 为万有引力常数, $\boldsymbol{e}$ 为这两个质点的连线上的单位向量, 方向与 $\boldsymbol{F}$ 的方向一致: 如果 $\boldsymbol{F}$ 为质点 M_0 对质点 M 的吸引力, 则 $\boldsymbol{e}$ 的方向由 M 指向 M_0, 而如果 $\boldsymbol{F}$ 为质点 M 对质点 M_0 的吸引力, 则 $\boldsymbol{e}$ 的方向由 M_0 指向 M. 如果有 n 个质点 M_1, M_2, $\cdots$, M_n 共同对质点 M_0 作用, 则这 n 个质点对质点 M_0 的万有引力的合力为

$$\boldsymbol{F}=\sum_{k=1}^n\frac{GM_0M_k}{r_k^2}\boldsymbol{e}_k,$$

其中, r_1, r_2, $\cdots$, r_n 分别为质点 M_1, M_2, $\cdots$, M_n 到质点 M_0 的距离; $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{e}_n$ 分别为质点 M_0 到质点 M_1, M_2, $\cdots$, M_n 的连线方向上的单位向量. 下面就根据这个事实来计算由质点构成的曲线 C 对质点 M_0 的万有引力 $\boldsymbol{F}$.

如前把曲线 C 分割成一些小的曲线段 P_0P_1, P_1P_2, $\cdots$, $P_{n-1}P_n$, 每个曲线段 $P_{k-1}P_k$ 都可近似地看成一个质点, 它对质点 M_0 的万有引力 $\Delta\boldsymbol{F}_k$ 近似地等于

$$\Delta\boldsymbol{F}_k\approx\frac{GM_0\Delta M_k}{|OQ_k|^2}\cdot\frac{\overrightarrow{OQ_k}}{|OQ_k|}=\frac{GM_0\Delta M_k}{|OQ_k|^3}\cdot\overrightarrow{OQ_k},$$

其中, Q_k 为第 k 个曲线段 $P_{k-1}P_k$ 上的一点; ΔM_k 为曲线段 $P_{k-1}P_k$ 的质量, 即

$$\Delta M_k=\int_{t_{k-1}}^{t_k}\rho(t)l'(t)\mathrm{d}t,\quad k=1,2,\cdots,n.$$

其中 $l'(t)$ 为弧长关于参数 t 的导数, 由式 (8.3.2) 给出. 因此曲线 C 对质点 M_0 的万有引力 $\boldsymbol{F}$ 近似地为

$$\boldsymbol{F}=\sum_{k=1}^{n}\Delta\boldsymbol{F}_k\approx\sum_{k=1}^{n}\frac{GM_0\Delta M_k}{|OQ_k|^3}\cdot\overrightarrow{OQ_k}.$$

设点 Q_k 的坐标为 $(\varphi(\xi_k),\psi(\xi_k),\chi(\xi_k))$, 其中 $\xi_k\in[t_{k-1},t_k]$, 并用 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 分别表示 Ox 轴, Oy 轴和 Oz 轴上的单位向量. 则有

$$\overrightarrow{OQ_k}=\varphi(\xi_k)\boldsymbol{i}+\psi(\xi_k)\boldsymbol{j}+\chi(\xi_k)\boldsymbol{k},\quad k=1,2,\cdots,n,$$

$$|OQ_k|=\sqrt{[\varphi(\xi_k)]^2+[\psi(\xi_k)]^2+[\chi(\xi_k)]^2}=r(\xi_k),\quad k=1,2,\cdots,n,$$

其中,

$$r(t)=\sqrt{[\varphi(t)]^2+[\psi(t)]^2+[\chi(t)]^2}$$

为点 $P_t(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))$ 到坐标原点 O 的距离. 又由积分中值定理知

$$\Delta M_k=\rho(\eta_k)l'(\eta_k)\Delta t_k,\quad k=1,2,\cdots,n,$$

其中 $\eta_k\in[t_{k-1},t_k]$, $k=1,2,\cdots,n$. 因此

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}\approx&\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{GM_0\varphi(\xi_k)\rho(\eta_k)l'(\eta_k)}{[r(\xi_k)]^3}\Delta t_k\right)\boldsymbol{i}+\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{GM_0\psi(\xi_k)\rho(\eta_k)l'(\eta_k)}{[r(\xi_k)]^3}\Delta t_k\right)\boldsymbol{j}\\&+\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{GM_0\chi(\xi_k)\rho(\eta_k)l'(\eta_k)}{[r(\xi_k)]^3}\Delta t_k\right)\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

令 $\|\Delta\|=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\Delta t_k\to 0$, 就得到曲线 C 对质点 m 的万有引力为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}=&\left(\int_a^b\frac{GM_0\varphi(t)\rho(t)l'(t)}{[r(t)]^3}\mathrm{d}t\right)\boldsymbol{i}+\left(\int_a^b\frac{GM_0\psi(t)\rho(t)l'(t)}{[r(t)]^3}\mathrm{d}t\right)\boldsymbol{j}\\&+\left(\int_a^b\frac{GM_0\chi(t)\rho(t)l'(t)}{[r(t)]^3}\mathrm{d}t\right)\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

记

$$\boldsymbol{r}(t)=\varphi(t)\boldsymbol{i}+\psi(t)\boldsymbol{j}+\chi(t)\boldsymbol{k},\quad a\leqslant t\leqslant b,$$

它表示坐标原点 O 到曲线 C 上的任意点 $P_t(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))$ 的向径. 则上述公式可改写成

$$\boldsymbol{F}=\int_a^b \frac{GM_0\rho(t)l'(t)}{r^2(t)}\cdot\frac{\boldsymbol{r}(t)}{r(t)}\mathrm{d}t \tag{8.3.6}$$

类似地, 如果曲线 C 带有同种电荷, 设在其上参数为 t 的点处的电荷密度为 $q(t)$, 则可完全类似地求得曲线 C 对位于坐标原点 O 处电荷量为 Q_0 的点电荷的库仑力为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}=&\pm\left\{\left(\int_a^b \frac{KQ_0\varphi(t)\rho(t)l'(t)}{[r(t)]^3}\mathrm{d}t\right)\boldsymbol{i}+\left(\int_a^b \frac{KQ_0\psi(t)\rho(t)l'(t)}{[r(t)]^3}\mathrm{d}t\right)\boldsymbol{j}\right.\\&\left.+\left(\int_a^b \frac{KQ_0\chi(t)\rho(t)l'(t)}{[r(t)]^3}\mathrm{d}t\right)\boldsymbol{k}\right\}\\=&\pm\int_a^b \frac{KQ_0\rho(t)l'(t)}{r^2(t)}\cdot\frac{\boldsymbol{r}(t)}{r(t)}\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

其中 K 为库仑常数, 正负号由 C 所带电荷的正负号及点电荷 Q_0 的正负号来确定.

例 2 设有质量为 M、长度为 $2L$ 的均匀细杆置于 Oxy 平面的 Ox 轴上, 中点在坐标原点. 另有一质点 P 的质量为 M_0. 求下列三种情况下细杆对质点 P 的万有引力 $\boldsymbol{F}$:

(1) 质点 P 在 Oy 轴上到坐标原点的距离为 a 的点处;

(2) 质点 P 在 Ox 轴上到细杆的端点距离为 b 的点处;

(3) 质点 P 在 Oxy 平面上坐标为 (x_0,y_0) $(x_0\neq 0, y_0\neq 0)$ 的点处 (图 8-3-1).

解 在三种情况下我们统一地设质点 P 的坐标为 (x_0,y_0), 其中在第一种情况下 $x_0=0$, $y_0=a$, 在第二种情况下 $x_0=L+b$, $y_0=0$, 在第三种情况下 $x_0\neq 0, y_0\neq 0$. 质点 P 到细杆上坐标为 x 的点 P_x 的向径为

$$\boldsymbol{r}(x)=(x-x_0)\boldsymbol{i}-y_0\boldsymbol{j},\quad -L\leqslant x\leqslant L.$$

点 P 到 P_x 的距离为

$$r(x)=|\boldsymbol{r}(x)|=\sqrt{(x-x_0)^2+y_0^2},\ -L\leqslant x\leqslant L.$$

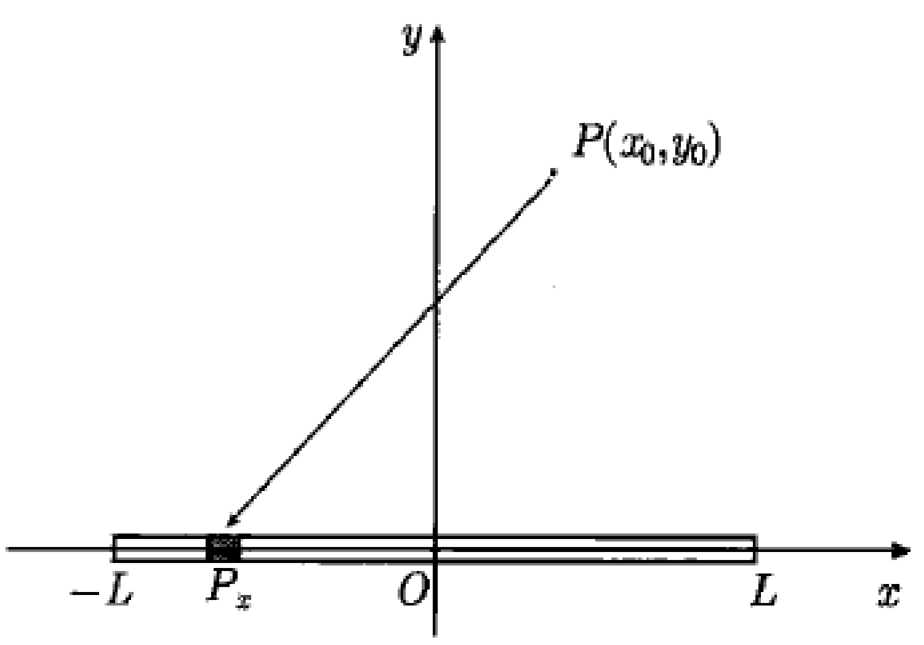


图 8-3-1 杆对质点的吸引力

细杆的质量密度函数为 $\rho(x)=\dfrac{M}{2L}$, 弧长关于参数 x 的导数为 $l'(x)=1$. 所以根据公式 (8.3.6), 细杆对质点 P 的万有引力为

$$\boldsymbol{F}=\int_{-L}^L \frac{GM_0\rho(x)l'(x)}{r^2(x)}\cdot\frac{\boldsymbol{r}(x)}{r(x)}\mathrm{d}x=\frac{GM_0M}{2L}\int_{-L}^L\frac{(x-x_0)\boldsymbol{i}-y_0\boldsymbol{j}}{[(x-x_0)^2+y_0^2]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x.$$

在第一种情况下 $x_0=0$, $y_0=a$, 代入上式得

$$\boldsymbol{F}=\frac{GM_0M}{2L}\int_{-L}^L\frac{x\boldsymbol{i}-a\boldsymbol{j}}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x=\frac{GM_0M}{2L}\left\{-\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\bigg|_{-L}^L\boldsymbol{i}-\frac{x}{a\sqrt{x^2+a^2}}\bigg|_{-L}^L\boldsymbol{j}\right\}$$

$$= -\frac{GM_0M}{2L}\cdot\frac{2L}{a\sqrt{L^2+a^2}}\boldsymbol{j} = -\frac{GM_0M}{a\sqrt{L^2+a^2}}\boldsymbol{j},$$

表明引力 $\boldsymbol{F}$ 作用在细杆的中垂线方向上; 在第二种情况下 $x_0 = L+b$, $y_0 = 0$, 代入上式得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} &= \frac{GM_0M}{2L}\left(\int_{-L}^{L}\frac{x-L-b}{|x-L-b|^3}\mathrm{d}x\right)\boldsymbol{i} = -\frac{GM_0M}{2L}\left(\int_{-L}^{L}\frac{\mathrm{d}x}{(x-L-b)^2}\right)\boldsymbol{i}\\ &= -\frac{GM_0M}{2L}\left(-\frac{1}{x-L-b}\bigg|_{-L}^{L}\right)\boldsymbol{i} = -\frac{GM_0M}{b(2L+b)}\boldsymbol{i},\end{aligned}$$

表明引力 $\boldsymbol{F}$ 作用在细杆的延长线方向上; 在第三种情况下

$$\boldsymbol{F} = \frac{GM_0M}{2L}(u\boldsymbol{i}+v\boldsymbol{j}),$$

其中 u 和 v 都是非零实数.

8.3.3 变力做的功

应用函数的定积分, 可以很方便地计算任意运动物体所受外力做的功. 为此先做一些准备.

设一质点受到外力 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(t)$ 作用而在空间中运动 (图 8-3-2), 运动的时间间隔为 $[a,b]$. 设该质点在每个时刻 $t \in [a,b]$ 的空间位置是坐标为 $(x(t),y(t),z(t))$ 的点. 于是

$$x = x(t),\qquad y = y(t),$$
$$z = z(t),\qquad a \leqslant t \leqslant b$$

就是该质点的运动轨迹的参数方程, 参数是时间 t. 可以把这个方程写成向量形式: 记

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k},\quad a \leqslant t \leqslant b,$$

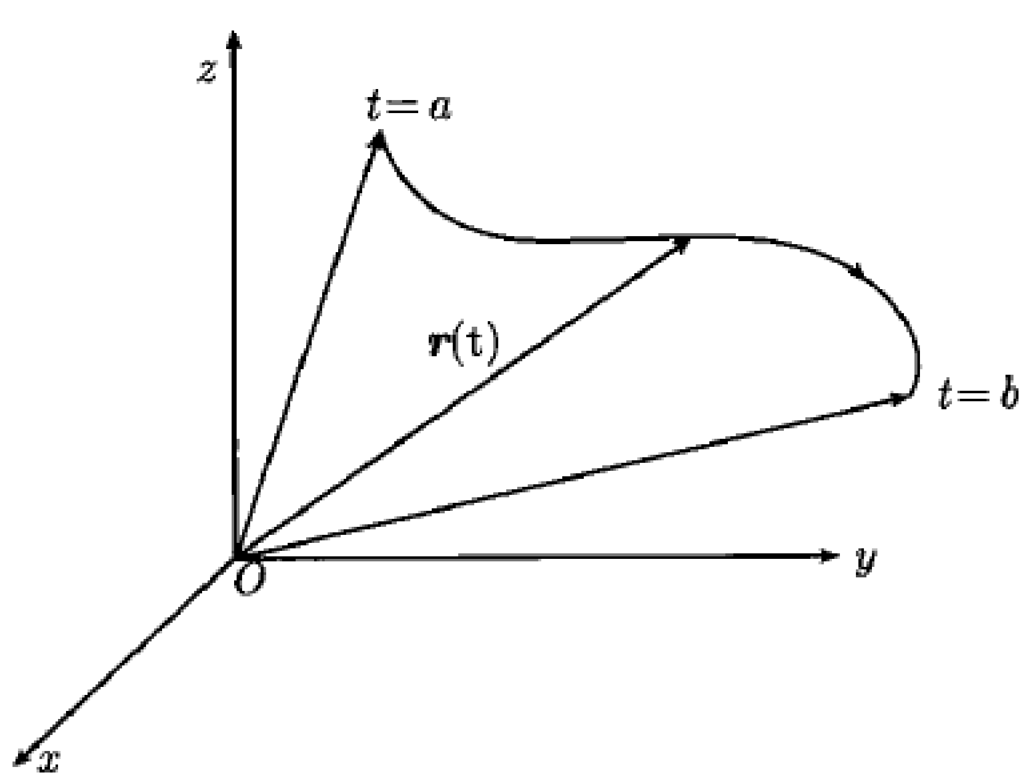


图 8-3-2 质点的运动

其中, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 分别表示 Ox 轴, Oy 轴和 Oz 轴上的单位向量. $\boldsymbol{r}(t)$ 就是在时刻 t 质点所在空间点的向径.

现计算外力 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(t)$ 在时间段 $[a,b]$ 里做的功 A. 由于 $\boldsymbol{F}$ 是变力, 即其大小和方向都在随时间变化, 所以不能直接应用常力做功的定义来求它所做的功. 为此把时间段 $[a,b]$ 划分成非常细小的小区间:

$$[t_0,t_1],\ [t_1,t_2],\ \cdots,\ [t_{n-1},t_n]\quad (t_0 = a,\ t_n = b).$$

在每个小区间 $[t_{k-1},t_k]$ $(1\leqslant k\leqslant n)$ 上, $\boldsymbol{F}$ 可以近似地看成常力, 并且质点的运动可以近似地看成直线运动. 因而 $\boldsymbol{F}$ 做的功近似地等于

$$\boldsymbol{F}(t_k)\cdot(\boldsymbol{r}(t_{k-1})-\boldsymbol{r}(t_k)).$$

把所有这些小的时间区间上 $\boldsymbol{F}$ 做的功全部相加就得到了 $\boldsymbol{F}$ 在时间段 $[a,b]$ 里做的功 A 的近似值

$$A\approx\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{F}(t_k)\cdot(\boldsymbol{r}(t_{k-1})-\boldsymbol{r}(t_k))\approx\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{F}(t_k)\cdot\boldsymbol{r}'(t_k)(t_{k-1}-t_k).$$

现在令 $\delta=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}(t_{k-1}t_k)\to 0$, 则上述近似值的极限就应当是 $\boldsymbol{F}$ 在时间段 $[a,b]$ 里做的功 A 的精确值, 因此得到

$$A=\int_a^b\boldsymbol{F}(t)\cdot\boldsymbol{r}'(t)\mathrm{d}t.$$

这就是变力做功的求功公式.

应用上述公式, 可以给出动能定理的证明. 为此把牛顿第二运动定律 $\boldsymbol{F}(t)=m\boldsymbol{r}''(t)$ 代入上式, 就得到

$$A=\int_a^b\boldsymbol{F}(t)\cdot\boldsymbol{r}'(t)\mathrm{d}t=\int_a^b m\boldsymbol{r}''(t)\cdot\boldsymbol{r}'(t)\mathrm{d}t=m\int_a^b\boldsymbol{v}'(t)\cdot\boldsymbol{v}(t)\mathrm{d}t,$$

其中 $\boldsymbol{v}(t)=\boldsymbol{r}'(t)$ 是质点运动的速度向量. 而

$$\boldsymbol{v}'(t)\cdot\boldsymbol{v}(t)=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\boldsymbol{v}(t)\cdot\boldsymbol{v}(t)\Big)=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(|\boldsymbol{v}(t)|^2\Big)=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(v^2(t)\Big),$$

其中 $v(t)=|\boldsymbol{v}(t)|$ 是质点运动的速率, 所以有

$$A=\frac{1}{2}m\int_a^b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(v^2(t)\Big)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}mv^2(b)-\frac{1}{2}mv^2(a)=E_k(b)-E_k(a),$$

其中 $E_k(a)$ 和 $E_k(b)$ 分别表示质点在时刻 a 和时刻 b 的动能. 最后这个结果就是动能定理: 物体动能的改变等于外力对此物体做的功.

在中学物理里, 动能定理只能对由常力支配的做直线运动的物体建立. 现在, 借助微积分理论, 可以对由任意变力支配的、做任意曲线运动的物体建立这个定理. 微积分理论的强大威力由此可见一斑.

8.3.4 万有引力定律的导出

万有引力定律是物理学、天文学和空间科学领域的一个重要定律, 是人类探索自然最伟大的科学发现之一. 这个定律不仅定性地告诉我们, 任何两个物体之间都存在相互之间的吸引力, 而且还定量地给出了这种吸引力的大小和方向. 物理学领域的定律一般都是通过做实验或从观察记录的数据中总结归纳出来的. 但是由于物体间

的万有引力是一种非常微弱的力，例如由金这种密度很大的金属作成的两个金属球，即使把它们作的很大因而质量很大，把它们紧贴在一起因而使它们之间的距离达到最小，它们之间的万有引力也是微小得很难测量出来．所以，限于 18 世纪的技术水平，万有引力定律在当时是无法用实验的方法得到的．于是要问：牛顿是怎样发现万有引力定律的？虽然这个定律最早出现于牛顿的名著《自然哲学的数学原理》，而在这本书中牛顿是把它作为一个已知的定律亦即假设来使用的，但分析历史只能获得一个答案：这个定律是牛顿从人们观察、积累、总结出的天文学规律，运用他所发明的“流数法”(微分学) 和“反流数法”(积分学) 推导出来的．可以这样说，牛顿发明微积分的一个主要动因是为研究天体的运动规律而创造数学工具．下面讨论，怎样从天文学定律运用微积分理论推导万有引力定律．

图 8-3-3　太阳系

先对万有引力定律产生的历史背景做一简单的回顾．远古的时候人们认为天是圆的地是方的，并对太阳、月亮和星星的属性了解很少．到古希腊时期人们已认识到，人类居住的大地是球形的，太阳、月亮和星星都是和地球类似的天体，并在此基础上形成了以亚里士多德 (Aristotle, 公元前 384～ 公元前 322) 的理论为代表的“地心说”，认为地球是宇宙的中心，它固定不动，太阳、月亮和星星等所有的其他天体都围绕地球运行．意大利文艺复兴时期 (约 1400～1600)，波兰天文学家和神父哥白尼 (Nicholas Copernicus, 1473～1543) 在毕生天文观测的基础上，认识到“地心说”是错误的，不是太阳绕地球运行而是反过来，地球绕着太阳运行，并进而创立了“日心说”，认为太阳是宇宙的中心，它固定不动，包括地球在内的其他天体都围绕太阳运行．哥白尼的学说（《天体运行论》）虽然在当时不被人们普遍接受，但在其后的几十年间，一些学术造诣很深的学者已认识到了“日心说”比“地心说”更接近宇宙的真实，并能在这一学说的基础上对天体运行的规律进行进一步的研究．德国天文学家布拉赫 (Tycho Brahe, 1546～1601) 观测行星 (在当时指水星、金星、火星、木星和土星) 的运动二十余年，积累了丰富的资料．他的助手开普勒 (Johannes Kepler, 1571～1630, 德国人) 在仔细分析研究布拉赫的这些观测资料和他自己进一步观测获得的天文资料的基础上，归纳总结出了行星运行的“开普勒三大定律”：

第一定律　行星运行的轨道是椭圆，太阳位于这个椭圆的一个焦点上．

第二定律　在行星绕太阳运行的过程中，从太阳到行星的向径等时扫过等面积．

第三定律　行星运行的周期与其轨道椭圆的长半轴的 $\frac{3}{2}$ 次方成正比．

开普勒的发现启发人们研究木星的四颗主要卫星绕木星的运行、土星的五颗主要卫星绕土星的运行以及月球绕地球的运行．结果发现，行星的卫星绕行星的运行也满足

这三大规律，区别仅在于它们的轨道都近似是圆心与行星的中心重合的圆周. 与此同时，伽利略 (Galileo, 1564~1642) 通过观察、分析和研究，已总结出了 “惯性定律” 和 “自由落体定律”. “惯性定律” 即牛顿第一定律说的是：如果一个物体没有受到外力的作用，则它将一直保持静止或匀速直线运动的状态不变. 这一定律使包括牛顿在内的一些学者认识到，行星之所以绕太阳运行，是受到了力的作用，这个力只可能来自太阳，即太阳对行星有吸引力. 同样地，行星的卫星之所以绕行星运行，也必定是卫星受到了来自行星的吸引力. 牛顿的过人之处在于，他在这一与别人相同认识的基础上走得更远，发展了伽利略的理论进而总结出了物体运动的 “牛顿三大定律”，并创造了数学工具微积分，然后综合应用这些研究成果，从开普勒的三大定律推导出了万有引力定律.

为了从开普勒三大定律推导万有引力定律，先把这三个定律写成数学形式. 为此在行星运行轨道所在的平面上建立直角坐标系，使太阳位于坐标原点、行星运行轨道椭圆的长轴为 x 轴而短轴平行于 y 轴. 则行星运行轨道在此直角坐标系下的极坐标方程为

$$r=\frac{p}{1+e\cos\theta}, \tag{8.3.7}$$

其中，r 为极径; θ 为极角; $p=\dfrac{b^2}{a}$; $e=\dfrac{c}{a}$; a、b 和 c 分别为椭圆的长半轴、短半轴和半焦距 $(c=\sqrt{a^2-b^2})$. 上述方程可通过在椭圆的方程 $\dfrac{(x-c)^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 中令 $x=r\cos\theta$ 和 $y=r\sin\theta$，然后求解 r 来得到.

其次，在行星绕太阳运行的过程中，极径 r 和极角 θ 都是时间 t 的函数，设为

$$r=r(t),\quad \theta=\theta(t),\quad -\infty<t<+\infty.$$

设在时间段 $[t,t+\Delta t]$ 里，从太阳到行星的向径 $\boldsymbol{r}$ 扫过的角度为 $\Delta\theta$ (图 8-3-4)，则开普勒第二定律可以写成

$$\frac{1}{2}r^2\Delta\theta=A\Delta t,$$

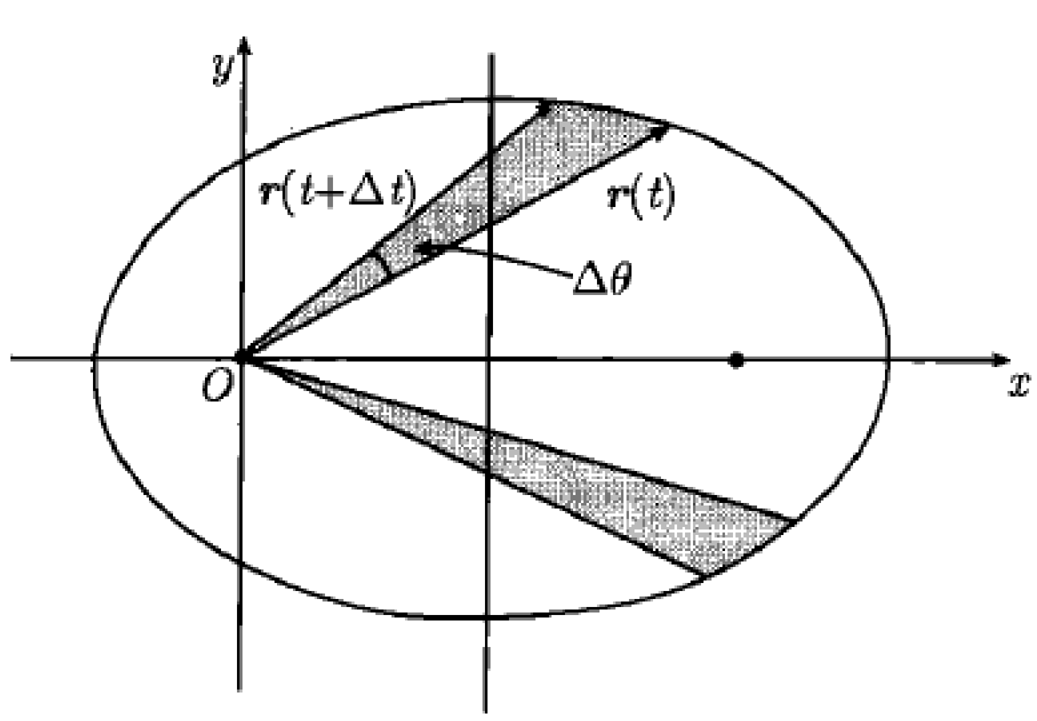


图 8-3-4 开普勒第二定律图示

表 8-3-1　开普勒第三定律数据表

行星名称	公转周期	太阳距离	周期平方	距离立方
水星	0.241	0.387	0.058	0.058
金星	0.615	0.723	0.378	0.378
地球	1	1	1	1
火星	1.881	1.524	3.54	3.54
木星	11.862	5.203	140.7	140.8
土星	29.457	9.539	867.7	867.9

其中 A 为常数 (与具体的行星有关). 注意由于行星运行的轨道是椭圆而非圆周, 所以上式左端并非向径 $\boldsymbol{r}$ 在时间段 $[t,t+\Delta t]$ 里扫过面积的精确值, 而只是一个近似值; 因此上式只是一个近似式而非真正的等式. 显然 $\Delta\theta$ 越小近似程度越高. 因此对等式两端除以 Δt, 然后令 $\Delta t\to 0$, 这样就得到下列真正意义上的等式:

$$\frac{1}{2}r^2(t)\theta'(t)=A,\quad \forall t\in(-\infty,+\infty). \tag{8.3.8}$$

最后, 设行星运行的周期为 T. 则开普勒第三定律可以写成

$$T=Ka^{\frac{3}{2}}, \tag{8.3.9}$$

其中 K 为与具体的行星无关, 即对五个行星都适用的常数.

现在设行星运行的方程为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$, 即 $\boldsymbol{r}(t)$ 是时刻 t 从太阳到行星的向径. 则 $r(t)=|\boldsymbol{r}(t)|$, 而 $\theta(t)$ 为 $\boldsymbol{r}(t)$ 与 x 轴正向的夹角. 令 $\boldsymbol{e}_n(t)$ 为 $\boldsymbol{r}(t)$ 的单位化向量:

$$\boldsymbol{e}_n(t)=\frac{\boldsymbol{r}(t)}{|\boldsymbol{r}(t)|}=\frac{\boldsymbol{r}(t)}{r(t)},$$

又令 $\boldsymbol{e}_\tau(t)$ 为与 $\boldsymbol{e}_n(t)$ 垂直且使 $\{\boldsymbol{e}_n(t),\boldsymbol{e}_\tau(t)\}$ 构成右手系的单位向量. 则有

$$\boldsymbol{r}(t)=r(t)\boldsymbol{e}_n(t),\quad \boldsymbol{e}_n(t)=\cos\theta(t)\boldsymbol{i}+\sin\theta(t)\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{e}_\tau(t)=-\sin\theta(t)\boldsymbol{i}+\cos\theta(t)\boldsymbol{j},$$

其中 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$ 分别表示 x 轴和 y 轴方向的单位向量. 容易看出

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_n'(t)&=[-\sin\theta(t)\boldsymbol{i}+\cos\theta(t)\boldsymbol{j}]\theta'(t)=\theta'(t)\boldsymbol{e}_\tau(t),\\ \boldsymbol{e}_\tau'(t)&=[-\cos\theta(t)\boldsymbol{i}-\sin\theta(t)\boldsymbol{j}]\theta'(t)=-\theta'(t)\boldsymbol{e}_n(t).\end{aligned}$$

根据牛顿第二定律, 物体受到的力等于物体的质量乘以其运动的加速度, 即

$$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a},$$

其中, m 为物体的质量; $\boldsymbol{a}$ 为其加速度; $\boldsymbol{F}$ 为物体受到的外力. 因此, 为了找出使行星绕太阳运行, 行星所受到的力, 只要计算出行星运行的加速度 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(t)$. 为此对 $\boldsymbol{r}(t)$ 求两阶导数, 得

$$\text{速度}\boldsymbol{v}(t)=\boldsymbol{r}'(t)=r'(t)\boldsymbol{e}_n(t)+r(t)\boldsymbol{e}_n'(t)=r'(t)\boldsymbol{e}_n(t)+r(t)\theta'(t)\boldsymbol{e}_\tau(t),$$

加速度$\boldsymbol{a}(t)=\boldsymbol{v}'(t)=r''(t)\boldsymbol{e}_n(t)+r'(t)\boldsymbol{e}_n'(t)+[r'(t)\theta'(t)+r(t)\theta''(t)]\boldsymbol{e}_\tau(t)+r(t)\theta'(t)\boldsymbol{e}_\tau'(t)$

$$=\{r''(t)-r(t)[\theta'(t)]^2\}\boldsymbol{e}_n(t)+[2r'(t)\theta'(t)+r(t)\theta''(t)]\boldsymbol{e}_\tau(t).$$

把以上结果简写成

$$\boldsymbol{a}=[r''-r(\theta')^2]\boldsymbol{e}_n+(2r'\theta'+r\theta'')\boldsymbol{e}_\tau.$$

断言上式右端第二项为零, 即 $2r'\theta'+r\theta''=0$. 事实上, 对从式 (8.3.8) 得到的等式 $\theta'=\dfrac{2A}{r^2}$ 关于时间 t 求导得

$$\theta''=-\frac{4Ar'}{r^3}.$$

所以

$$2r'\theta'+r\theta''=2r'\cdot\frac{2A}{r^2}-r\cdot\frac{4Ar'}{r^3}=0.$$

这样就得到

$$\boldsymbol{a}=[r''-r(\theta')^2]\boldsymbol{e}_n,$$

进而应用牛顿第二定律, 行星受到的力应等于

$$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}=m[r''-r(\theta')^2]\boldsymbol{e}_n, \tag{8.3.10}$$

其中 m 为行星的质量. 由式 (8.3.10) 可知, 行星受到的力作用在行星与太阳的连线上.

为了求出作用力的大小, 继续计算 $r''-r(\theta')^2$. 为此把 $r=r(t)$ 和 $\theta=\theta(t)$ 代入式 (8.3.7), 然后对等式两端关于时间 t 求导, 并应用式 (8.3.8), 就得到

$$r'=\frac{pe\sin\theta\cdot\theta'}{(1+e\cos\theta)^2}=\frac{r^2e\sin\theta}{p}\theta'=\frac{2Ae}{p}\sin\theta.$$

继续关于时间 t 求导并再次应用式 (8.3.8), 进一步得到

$$r''=\frac{2Ae}{p}\cos\theta\cdot\theta'=\frac{4A^2e}{pr^2}\cos\theta.$$

所以

$$\begin{aligned}r''-r(\theta')^2&=\frac{4A^2e}{pr^2}\cos\theta-r\cdot\frac{4A^2}{r^4}=\frac{4A^2}{r^2}\left(\frac{e\cos\theta}{p}-\frac{1}{r}\right)\\&=\frac{4A^2}{r^2}\left(\frac{e\cos\theta}{p}-\frac{1+e\cos\theta}{p}\right)=-\frac{4A^2}{p}\cdot\frac{1}{r^2}.\end{aligned}$$

代入式 (8.3.10) 就得到

$$\boldsymbol{F}=-\frac{4A^2}{p}\cdot\frac{m}{r^2}\,\boldsymbol{e}_n. \tag{8.3.11}$$

常数 A 和 p 都依赖于具体的行星. 应用开普勒第三定律可以证明, 虽然 A 和 p 都依赖于具体的行星, 但 $\dfrac{4A^2}{p}$ 是与具体的行星无关, 即对五个行星相同的常数. 为此对式

(8.3.8) 两端从 0 到 T 积分, 然后作积分变元变换 $\theta=\theta(t)$, 因椭圆的面积是 πab, 就得到

$$AT=\frac{1}{2}\int_0^T r^2(t)\theta'(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2(\theta)\mathrm{d}\theta=\pi ab,$$

从而 $A=\dfrac{\pi ab}{T}$. 应用这一结果和 (8.3.9) 得

$$\frac{4A^2}{p}=4\cdot\frac{\pi^2a^2b^2}{T^2}\cdot\frac{a}{b^2}=\frac{4\pi^2a^3}{T^2}=\frac{4\pi^2}{K^2}.$$

最后这个表达式是一个与具体的行星无关的常数, 记作 C. 这样由式 (8.3.11) 得到

$$\boldsymbol{F}=-\frac{Cm}{r^2}\,\boldsymbol{e}_n. \tag{8.3.12}$$

等式 (8.3.12) 表明, 行星受到的力的作用方向是从行星指向太阳, 因此行星受到了来自太阳的吸引力, 其大小与行星到太阳的距离的平方成反比, 与行星的质量成正比.

既然行星受到了来自太阳的吸引力, 根据牛顿第三定律, 太阳也必定受到来自行星的大小相等的吸引力. 因为太阳和行星一样是天体, 它们的地位应当是平等的, 所以从上面得到的事实使我们有理由相信, 太阳受到的行星的吸引力应当是

$$\bar{\boldsymbol{F}}=\frac{\bar{C}M}{r^2}\,\boldsymbol{e}_n,$$

其中, $\bar{C}$ 为另一常数; M 为太阳的质量. 由牛顿第三定律有 $\bar{\boldsymbol{F}}=-\boldsymbol{F}$, 从而得到

$$Cm=\bar{C}M.$$

因此存在常数 G 使成立 $C=GM$ 和 $\bar{C}=Gm$. 把 $C=GM$ 代入式 (8.3.12) 就得到

$$\boldsymbol{F}=-\frac{GMm}{r^2}\,\boldsymbol{e}_n.$$

前面已经提到, 木星的四颗主要卫星绕木星的运行、土星的五颗主要卫星绕土星的运行以及月球绕地球的运行的规律都与水、金、火、木、土这五颗行星绕太阳运行的规律类似. 因此, 上述推导也适用于这些运动系统. 现在只要大胆地假设常数 G 对所有这些系统一致, 并把上述结论推广应用于任何两个物体, 就得到了万有引力定律.

习 题 8.3

1. 求密度为常数 ρ 的曳物线 $x=a\cos t,\ y=a\ln(\sec t+\tan t)-a\sin t\ \left(0\leqslant t\leqslant\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的质量.
2. 一条长度为 L、密度分布不均匀的钢索, 当把它拉直置于数轴上使其一端位于原点时, 测得坐标为 x 的点处的密度为 $\rho(x)=a\left(1+\varepsilon\sin^2\dfrac{m\pi x}{L}\right)$, 其中 ε 是远小于 1 的正数, m 是正整数. 求这条钢索的质量.
3. 求密度分布均匀的圆弧 $x=a\cos\theta,\ y=a\sin\theta\ (0\leqslant\theta_0\leqslant\theta\leqslant\pi-\theta_0)$ 的重心.

4. 求旋轮线 $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)\ (0\leqslant t\leqslant \pi)$ 与 Ox 轴所围面积的重心.
5. 求抛物线 $y=ax^2$ 与直线 $x+y=b>0$ 所围抛物弓形面积的重心.
6. 求心脏线 $(x^2+y^2)^2-2ax(x^2+y^2)=a^2y^2$ 所围面积的重心.
7. 求半径为 R 的均匀半球的重心.
8. 求半径为 R 的均匀半球面的重心.
9. 求抛物线 $y=ax^2$ 与直线 $y=c>0$ 所围区域绕 Oy 轴旋转所得旋转体的重心.
10. 证明下列两个古尔金定理.
    (1) 第一定理: 弧 C 绕着不与它相交的轴旋转而成的旋转面的面积, 等于弧 C 的长度与这个弧的重心所划出的圆周周长的乘积;
    (2) 第二定理: 平面区域 D 绕着不与它相交的轴旋转而成的旋转体的体积, 等于区域 D 的面积与这个区域的重心所划出的圆周周长的乘积.
11. 求半径为 R 的半圆弧关于通过此弧两个端点的轴的转动惯量.
12. 求底边为 a、高为 h 的均匀三角形关于其底边的转动惯量.
13. 求密度分布均匀的双纽线 $(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0$ 分别绕 Oy 轴和 Ox 轴匀速旋转时的转动惯量.
14. 求底面半径为 a、高为 h 的均匀圆锥分别关于其底面直径和通过其顶点而垂直于其中心轴的直线的转动惯量.
15. 有一半径为 R 的圆形溢水洞, 求当水面距洞顶的距离为 h 时, 闸门所承受的压力.
16. 根据胡克定律, 被压缩的弹簧所受压力 F 与弹簧缩短的距离 x 成正比 $F=kx$, k 为比例系数. 现有一弹簧, 原长 L 米, 问做多少功才能压缩至长度 $l(l<L)$ 米?

第 9 章

广义积分

定积分的概念只考虑有限区间上有界函数的积分. 但是在许多实际问题中, 需要考虑函数在无限区间上的积分和无界函数的积分. 本章把定积分的概念推广, 考虑这样两类积分问题. 为把这样的积分和定积分加以区别, 我们把无限区间上的积分叫做**无穷积分**, 而把无界函数的积分叫做**瑕积分**, 它们通称**广义积分**. 这两类积分都将作为定积分的极限来处理. 因此, 在考虑广义积分时, 核心的问题是判定其敛散性. 所以本章的主要任务是建立一些判定广义积分敛散性的判别法.

9.1 无穷积分

9.1.1 问题的引出

在一些实际问题中, 需要考虑函数在无限区间上的积分. 下面给出三个例子.

例 1(第二宇宙速度的计算) 在中学物理课程中我们已经学习过, 为了把一个自身没有动力的物体从地球表面 "抛" 向宇宙深处, 使之脱离地球引力的作用, 就必须使它在离开地球表面的一瞬间的初速度达到 11.2 km/s. 这就是第二宇宙速度. 这个数值是如何得来的呢? 下面给出这个数值的推导.

设物体的质量为 m. 则它在距地面高度 x 处所受地球引力为

$$F=\frac{GMm}{(R+x)^2},$$

其中, G 为万有引力常数; M 表示地球的质量; R 表示地球的半径. 因此, 该物体从地球表面上升到距地面高度 h 处, 克服地球引力所做的功为

$$A_h=\int_0^h\frac{GMm}{(R+x)^2}\mathrm{d}x=GMm\Big(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h}\Big).$$

设物体在离开地球表面时的初速度为 v_0, 在距地面高度 h 处的速度为 v_h. 则根据动能定理, 有

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv_h^2 = A_h.$$

为了使物体不落回地球, 就必须在每个高度 h 处都有 $v_h > 0$, 所以初速度 v_0 必须满足

$$\frac{1}{2}mv_0^2 > A_h, \qquad \forall h > 0.$$

令 $h \to \infty$, 就得到

$$\frac{1}{2}mv_0^2 \geqslant \lim_{h\to\infty} A_h = \frac{GMm}{R},$$

即

$$v_0 \geqslant \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

由于物体在地球表面所受到的地球引力就是它在地面上的重力, 所以有 $\dfrac{GMm}{R^2} = mg$, 其中 g 表示重力加速度. 据此得到 $\dfrac{GM}{R} = gR$, 代入上面的不等式, 就得到

$$v_0 \geqslant \sqrt{2gR}.$$

把 $g = 9.81\text{m/s}^2$ 和 $R \approx 6371\text{km} = 6.371 \times 10^6\text{m}$ 代入计算, 即知

$$\sqrt{2gR} \approx 11.2 \times 10^3\text{m/s} = 11.2\,\text{km/s}.$$

这就是第二宇宙速度.

在上面的推导中遇到了求定积分 $\displaystyle\int_0^h \frac{GMm}{(R+x)^2}\mathrm{d}x$ 当上限 h 趋于无穷大时的极限的问题. 把这个极限定义为被积函数 $\dfrac{GMm}{(R+x)^2}$ 在无穷区间 $[0,+\infty)$ 上的积分, 记作 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{GMm}{(R+x)^2}\mathrm{d}x$, 即

$$\int_0^{+\infty} \frac{GMm}{(R+x)^2}\mathrm{d}x = \lim_{h\to+\infty}\int_0^h \frac{GMm}{(R+x)^2}\mathrm{d}x = \frac{GMm}{R}.$$

为了不致与以前学习的定积分概念相混淆, 把这种积分区间是无限区间的积分叫做**无穷积分**.

例 2(由大气密度计算大气压强) 在 5.3 节导出了大气密度 $\rho(h)$ 随海拔高度 h 变化的公式

$$\rho(h) = \rho_0 \mathrm{e}^{-\lambda h}, \quad \forall h \geqslant 0,$$

其中, ρ_0 表示海平面上的大气密度, λ 为正常数. 由于海拔高度 h 处的大气压强 $p(h)$ 等于高 h 处单位面积上面的无限长空气柱的质量, 所以有

$$p(h) = \int_h^{+\infty} \rho(x)\mathrm{d}x = \lim_{H\to+\infty}\int_h^H \rho(x)\mathrm{d}x = \lim_{H\to+\infty}\frac{\rho_0}{\lambda}(\mathrm{e}^{-\lambda h} - \mathrm{e}^{-\lambda H}) = \frac{\rho_0}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda h}.$$

这里又遇到了求函数在无限区间上的积分的问题.

例 3(无限长直杆对质点的吸引力) 设有一质量分布均匀的无限长直杆 (两端均无限), 其质量密度为 ρ(图 9-1-1). 求这条杆对到它的距离为 r 的点处质量为 m 的质点的万有引力 F.

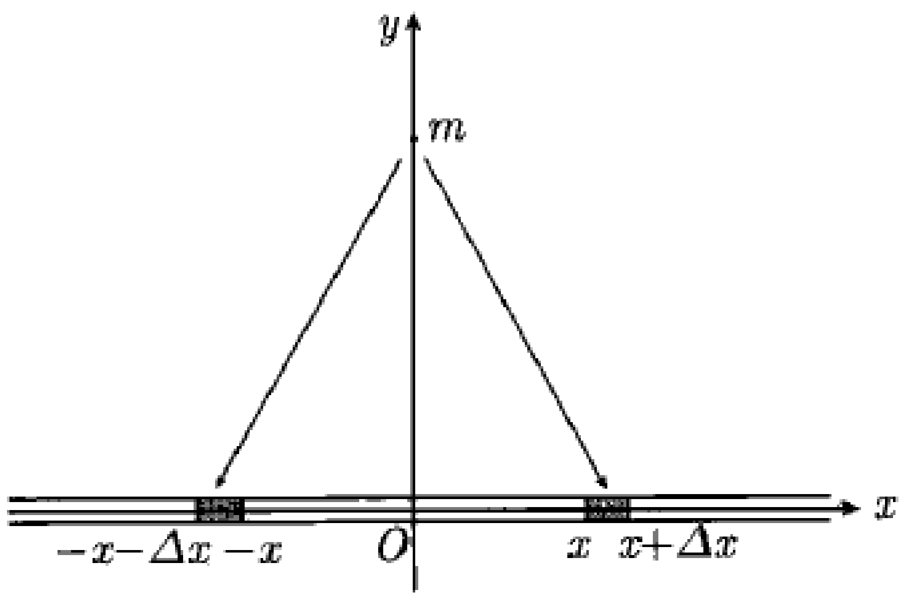


图 9-1-1 无限长杆对质点的吸引力

解 建立平面直角坐标系 Oxy, 使直杆位于 Ox 轴上, 而质点位于 Oy 轴上坐标为 r 的点处. 则对任意 $x \geqslant 0$ 和充分小的 $\Delta x > 0$, 直杆位于两个对称的区间 $[x, x+\Delta x]$ 和 $[-x-\Delta x, -x]$ 上的两个小段对质点的万有引力的合力近似地等于

$$f = 2\frac{Gm\rho\Delta x}{r^2+x^2}\frac{r}{\sqrt{r^2+x^2}} = \frac{2Gm\rho r\Delta x}{(r^2+x^2)^{-\frac{3}{2}}}.$$

因此对任意 $a > 0$, 位于区间 $[-a, a]$ 上的直杆段对质点的万有引力便等于

$$F_a = \int_0^a \frac{2Gm\rho r}{(r^2+x^2)^{-\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x = \frac{2Gm\rho x}{r\sqrt{r^2+x^2}}\bigg|_0^a = \frac{2Gm\rho a}{r\sqrt{r^2+a^2}}.$$

令 $a \to +\infty$, 就得到整条直杆对质点的万有引力

$$F = \int_0^{+\infty} \frac{2Gm\rho r}{(r^2+x^2)^{-\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x = \lim_{a\to+\infty} F_a = \frac{2Gm\rho}{r}.$$

这里再次遇到了求函数在无限区间上的积分的问题.

从以上例子可以看出, 无限区间上的积分不仅在应用问题中经常碰到, 而且应当作为有限区间上的积分当区间长度趋于无穷时的极限来定义. 这种积分不能再像定积分那样, 采取对积分区间作分割, 再作黎曼积分和, 然后让区间的分割无限加细取极限的方式来定义. 因为在这种情况下对积分区间作分割时, 总有至少一个小区间是无限长的, 因而这时不可能作出有意义的黎曼积分和.

9.1.2 无穷积分的定义

现在给出无限区间上无穷积分及其敛散性的定义.

定义 9.1.1 设函数 f 在无限区间 $[a, +\infty)$ 上定义, 且在任意有限区间 $[a, b]$ $(b > a)$ 上可积. 则称符号

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

为**无穷积分**. 如果极限

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

存在, 则称无穷积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 并称上述极限值为该无穷积分的值, 仍用符

号 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 表示, 即

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

如果上述极限不存在 (包括趋于 ∞ 的情形), 则称无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

完全类似地可以给出无限区间 $(-\infty, a]$ 上无穷积分 $\int_{-\infty}^a f(x)\mathrm{d}x$ 的定义

$$\int_{-\infty}^a f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to-\infty}\int_b^a f(x)\mathrm{d}x.$$

而整个数轴 $(-\infty, +\infty)$ 上的无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 则定义为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^a f(x)\mathrm{d}x + \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

规定只有当右端的两个无穷积分都收敛时才称无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 否则就称它发散. 显然, 无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 是否收敛以及当它收敛时的值 (上式右端的值), 都不依赖于数 a 的选择. 事实上, 对任意实数 a 和 b 我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^a f(x)\mathrm{d}x + \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\\
=&\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^a f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\\
=&\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也可定义为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\substack{b\to+\infty\\ a\to-\infty}}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

必须注意, 这里 $a \to -\infty$ 和 $b \to +\infty$ 是独立变化的, 更准确地说, 右端的极限 $\lim\limits_{\substack{b\to+\infty\\ a\to-\infty}}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = I$ 的定义为: 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在相应的 $A > 0$ 和 $B > 0$, 使对任意 $a < -A$ 和 $b > B$ 都有

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - I\right| < \varepsilon.$$

例 4 设 $a>0$, 而 b 是任意实数. 证明无穷积分 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\cos(bx)\mathrm{d}x$ 和 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\sin(bx)\mathrm{d}x$ 都收敛并求其值.

解 由第 7.2 节例 10 知, 对任意 $c>0$ 有

$$\int_0^c \mathrm{e}^{-ax}\cos(bx)\mathrm{d}x=\frac{b\sin(bc)-a\cos(bc)}{a^2+b^2}\mathrm{e}^{-ac}+\frac{a}{a^2+b^2}.$$

右端第一项当 $c\to+\infty$ 时收敛到零, 所以无穷积分 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\cos(bx)\mathrm{d}x$ 收敛, 且

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\cos(bx)\mathrm{d}x=\lim_{c\to+\infty}\int_0^c \mathrm{e}^{-ax}\cos(bx)\mathrm{d}x=\frac{a}{a^2+b^2}.$$

类似地可知 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\sin(bx)\mathrm{d}x$ 也收敛, 且

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\sin(bx)\mathrm{d}x=\lim_{c\to+\infty}\int_0^c \mathrm{e}^{-ax}\sin(bx)\mathrm{d}x=\frac{b}{a^2+b^2}.$$

例 5 证明: 无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 收敛, 并求其值.

证明 根据定义有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x&=\lim_{a\to+\infty}\int_0^a\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x+\lim_{b\to-\infty}\int_b^0\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x\\&=\lim_{a\to+\infty}\arctan a+\lim_{b\to-\infty}(-\arctan b)\\&=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\\&=\pi.\end{aligned}$$

所以无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 收敛, 且其值为 π.

例 6 设 p 是任意实数. 讨论无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解 先设 $p\neq1$. 这时对任意 $a>1$ 有

$$\int_1^a\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\frac{1}{1-p}x^{1-p}\Big|_1^a=\frac{1}{1-p}(a^{1-p}-1).$$

显然

$$\lim_{a\to+\infty}\frac{1}{1-p}(a^{1-p}-1)=\begin{cases}\dfrac{1}{p-1}, & \text{当 } p>1,\\ +\infty, & \text{当 } p<1.\end{cases}$$

所以当 $p>1$ 时无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 收敛, 而当 $p<1$ 时无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 发散.

再来看 $p=1$ 的情况. 这时有

$$\int_1^a \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln x\Big|_1^a = \ln a \to +\infty \qquad 当\ a \to +\infty.$$

所以无穷积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 发散.

综上, 当 $p>1$ 时 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 收敛, 而当 $p \leqslant 1$ 时 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 发散.

例 7 设 q 是任意实数. 讨论无穷积分 $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^q}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解 先设 $q \neq 1$. 这时对任意 $a>2$ 有

$$\int_2^a \frac{1}{x(\ln x)^q}\mathrm{d}x = \frac{1}{1-q}(\ln x)^{1-q}\Big|_2^a = \frac{1}{1-q}[(\ln a)^{1-q}-(\ln 2)^{1-q}].$$

显然

$$\lim_{a\to+\infty} \frac{1}{1-q}[(\ln a)^{1-q}-(\ln 2)^{1-q}] = \begin{cases} \dfrac{1}{q-1}(\ln 2)^{1-q}, & 当\ q>1, \\ +\infty, & 当\ q<1. \end{cases}$$

所以当 $q>1$ 时 $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^q}\mathrm{d}x$ 收敛, 而当 $q<1$ 时 $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^q}\mathrm{d}x$ 发散.

再来看 $q=1$ 的情况. 这时有

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x = \ln\ln x\Big|_2^a = \ln\ln a - \ln\ln 2 \to +\infty \qquad 当\ a\to+\infty.$$

所以 $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$ 发散.

综上, 当 $q>1$ 时 $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^q}\mathrm{d}x$ 收敛, 而当 $q\leqslant 1$ 时 $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^q}\mathrm{d}x$ 发散.

以上两个例题的结论很有用, 所以把它们总结成下列引理:

引理 9.1.1 (1) 当 $p>1$时 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 收敛, 而当 $p\leqslant 1$ 时 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 发散;

(2) 当 $q>1$ 时$\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^q}\mathrm{d}x$ 收敛, 而当 $q\leqslant 1$ 时 $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^q}\mathrm{d}x$ 发散.

根据无穷积分收敛的定义和函数当自变元趋于无穷时的极限的运算法则, 立刻得到下述定理.

定理 9.1.1 (1) 设无穷积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则对任意实数 c, 无穷积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} cf(x)\mathrm{d}x$ 也收敛, 且

$$\int_a^{+\infty} cf(x)\mathrm{d}x = c\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x;$$

(2) 设无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 都收敛, 则无穷积分 $\int_a^{+\infty} [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x$ 也收敛, 且

$$\int_a^{+\infty} [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x.$$

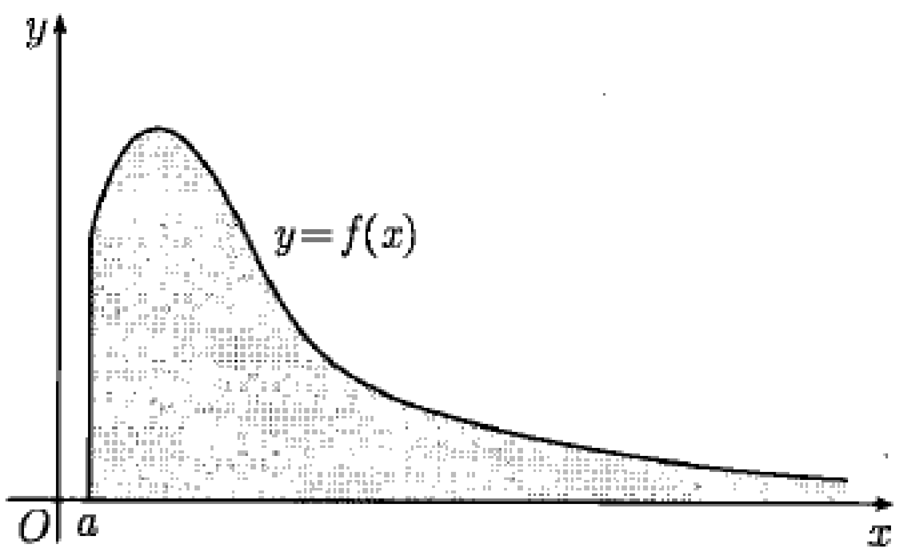


图 9-1-2 无穷积分的几何意义

无穷积分的几何意义: 与定积分类似, 函数 $y = f(x)$ 在区间上的无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$, 在几何上表示这个函数的图像位于直线 $x = a$ 右端和 Ox 轴上方的面积与位于直线 $x = a$ 右端和 Ox 轴下方的面积之差 (图 9-1-2).

9.1.3 无穷积分敛散性的判定

尽管上面例举的几个无穷积分, 它们的敛散性直接根据定义便可确定下来, 但对于大多数的无穷积分, 其敛散性是很难根据定义确定的. 这是因为, 很多函数 f 的原函数是无法求出其表达式的, 从而函数 $F(b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的表达式也就无法求出, 这样就无法通过计算极限 $\lim\limits_{b\to+\infty} F(b)$ 是否存在来判断无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 是收敛还是发散. 例如, 以下无穷积分都无法用这种方法来确定其敛散性:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x, \quad \int_1^{+\infty} x^p e^{-x}\mathrm{d}x\ (p\ \text{不是非负整数}), \quad \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^p \ln x}\mathrm{d}x\ (p \neq 1).$$

实际上, 在涉及无穷积分的许多问题中, 往往只需确定它的敛散性, 而无需知道无穷积分收敛时其值具体是多少. 对于这样的问题, 即使函数 $F(b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的表达式可以求出, 通过先计算它的表达式然后再讨论极限 $\lim\limits_{b\to+\infty} F(b)$ 是否存在来确定无穷积分的敛散性, 就显得过于烦琐而没有必要. 下面推导一些直接根据函数 f 的表达式来判断无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 是否收敛的判别准则. 这些判别准则都是根据函数当自变元趋于无穷时是否有极限的柯西准则以及单调有界原理导出的.

回忆定义在一个无穷区间 $[a, +\infty)$ 上的函数 $F(x)$ 当 $x \to +\infty$ 时存在极限的柯西准则是: 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在相应的 $A > a$, 使对任意 $b, c > A$ 都成立

$$|F(b) - F(c)| < \varepsilon.$$

当$F(b)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 时, 有 $|F(b)-F(c)|=\left|\int_b^c f(x)\mathrm{d}x\right|$, 所以应用上述柯西准则就得到下列定理.

定理 9.1.2(无穷积分收敛的柯西准则) 无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件: 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在相应的 $A>a$, 使对任意 $c>b>A$ 都成立

$$\left|\int_b^c f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

从定理 9.1.2 立刻得到下列简单但却很有用的结论.

定理 9.1.3 对于无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$, 如果 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛, 且有

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x. \tag{9.1.1}$$

证明 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 由 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛知存在相应的 $A>a$, 使对任意 $c>b>A$ 都成立

$$\int_b^c|f(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

而 $\left|\int_b^c f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_b^c|f(x)|\mathrm{d}x$, 所以对任意 $c>b>A$ 都有

$$\left|\int_b^c f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

因此根据柯西准则即知 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛. 在对任意 $b>a$ 都成立的不等式

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$$

两端令 $b\to+\infty$, 就得到了式 (9.1.1). 证毕.

根据定理 9.1.3, 引进下述概念.

定义 9.1.2 对于无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$, 如果 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛, 则称 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$**绝对收敛**; 如果 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 发散而 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则称 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ **条件收敛**.

单调有界原理告诉我们: 定义在区间 $[a,+\infty)$ 上的函数 $F(x)$ 如果在此区间上是单调的, 则当 $x\to+\infty$ 时 $F(x)$ 有 (有限的) 极限的充要条件是它是有界函数. 由于当 $f(x)$ 是非负函数时, 函数 $F(b)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是单调递增的, 所以在此情况下无穷

积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件是函数 $F(b)$ 有界, 即存在 $M>0$ 使成立

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M, \qquad \forall b>a.$$

据此得到下列定理

定理 9.1.4 (比较判别法 1)　对于无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$, 有下列结论:

(1) 如果存在非负函数 g 使成立

$$|f(x)| \leqslant g(x), \qquad \forall x \geqslant a, \tag{9.1.2}$$

且 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛;

(2) 如果 f 是非负函数, 且存在非负函数 g 使成立

$$f(x) \geqslant g(x), \qquad \forall x \geqslant a, \tag{9.1.3}$$

而 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 发散, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也发散.

证明　(1) 由 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛知函数 $G(b)=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 有界, 因此存在 $M>0$ 使成立

$$G(b)=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leqslant M, \qquad \forall b>a.$$

据此和式 (9.1.2) 可知

$$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leqslant M, \qquad \forall b>a,$$

即函数 $F_1(b)=\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ 有界. 而这个函数是单调递增的, 所以由单调有界原理即知极限 $\lim\limits_{b\to+\infty} F_1(b)$ 存在, 即 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛.

(2) 由 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 发散和 g 是非负函数知 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=+\infty$. 而由式 (9.1.3) 可知

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x, \qquad \forall b>a,$$

因此有 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=+\infty$. 所以 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散. 证毕.

定理 9.1.5 (比较判别法 2)　对于无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$, 设 f 非负且存在非负连续函数 g 使成立

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l. \tag{9.1.4}$$

则有下列结论:

(1) 如果 $0\leqslant l<+\infty$ 且 $\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛;

(2) 如果 $0<l\leqslant+\infty$ 且 $\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 发散, 则 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 也发散.

证明 先设 $0<l<\infty$. 这时由式 (9.1.4) 可知存在 $A>a$, 使当 $x>A$ 时

$$\frac{1}{2}lg(x)\leqslant f(x)\leqslant\frac{3}{2}lg(x).$$

因此根据定理 9.1.4, $\int_A^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_A^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 有相同的敛散性, 进而 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 也与 $\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 有相同的敛散性.

其次设 $l=0$. 这时由式 (9.1.4) 可知存在 $A>a$, 使当 $x>A$ 时

$$f(x)\leqslant g(x).$$

因此根据定理 9.1.4, 当 $\int_A^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 收敛时, $\int_A^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛, 进而当 $\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 收敛时, $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛.

最后设 $l=+\infty$. 这时由式 (9.1.4) 可知存在 $A>a$, 使当 $x>A$ 时

$$f(x)\geqslant g(x).$$

因此根据定理 9.1.4, 当 $\int_A^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 发散时, $\int_A^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 也发散, 进而当 $\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 发散时, $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 也发散. 证毕.

特别取 $g(x)=x^{-p}$, 应用定理 9.1.5 和引理 9.1.1 结论 (1), 就得到了下述判别准则.

定理 9.1.6(p 幂比较判别法) 对于无穷积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$, 设 f 非负且存在实数 p 使得

$$\lim_{x\to+\infty}x^pf(x)=l.$$

则有下列结论:

(1) 如果 $0\leqslant l<+\infty$ 且 $p>1$, 则 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

(2) 如果 $0<l\leqslant+\infty$ 且 $p\leqslant1$, 则 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

例 8 证明无穷积分 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ 收敛.

证明一 因为

$$0 < \mathrm{e}^{-x^2} \leqslant \mathrm{e}^{-x}, \quad \forall x \geqslant 1,$$

而 $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 收敛, 所以根据比较判别法 1 知 $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ 收敛, 进而 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ 也收敛.

证明二 因为

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\mathrm{e}^{-x^2} = 0,$$

所以根据 p 幂比较判别法知 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ 收敛.

例 9 设 $p, q > 0$. 讨论无穷积分 $\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{x^p}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x^q}\right)\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解 首先注意被积函数是正的. 因为

$$\sin y \sim y \quad 且 \quad \ln(1+y) \sim y, \qquad 当\ y \to 0,$$

从而

$$\sin\left(\frac{1}{x^p}\right) \sim \frac{1}{x^p} \quad 且 \quad \ln\left(1+\frac{1}{x^q}\right) \sim \frac{1}{x^q}, \qquad 当\ x \to +\infty,$$

进而

$$\lim_{x\to+\infty} x^{p+q}\sin\left(\frac{1}{x^p}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x^q}\right) = \lim_{x\to+\infty} x^p\sin\left(\frac{1}{x^p}\right)\lim_{x\to+\infty} x^q\ln\left(1+\frac{1}{x^q}\right) = 1.$$

所以根据 p 幂比较判别法知, 无穷积分 $\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{x^p}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x^q}\right)\mathrm{d}x$ 当 $p+q>1$ 时收敛, 当 $p+q \leqslant 1$ 时发散.

例 10 设 $p > 0$. 讨论无穷积分 $\int_1^{+\infty} \ln\left(\cos\frac{1}{x^p}+\sin\frac{1}{x^p}\right)\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解 由等式 $\cos\frac{1}{x^p}+\sin\frac{1}{x^p} = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{x^p}\right)$ 不难知道, 函数 $\ln\left(\cos\frac{1}{x^p}+\sin\frac{1}{x^p}\right)$ 当 $x \geqslant 2^{\frac{1}{p}}$ 时是正的. 由泰勒展开知当 $y \to 0$ 时,

$$\cos y = 1 + O(y^2), \quad \sin y = y + O(y^3), \quad \ln(1+y) = y + O(y^2).$$

因此

$$\begin{aligned}\ln\left(\cos\frac{1}{x^p}+\sin\frac{1}{x^p}\right) &= \ln\left(1+\frac{1}{x^p}+O\left(\frac{1}{x^{2p}}\right)\right)\\ &= \left(\frac{1}{x^p}+O\left(\frac{1}{x^{2p}}\right)\right)+O\left(\frac{1}{x^p}+O\left(\frac{1}{x^{2p}}\right)\right)^2\\ &= \frac{1}{x^p}+O\left(\frac{1}{x^{2p}}\right), \quad 当\ x \to +\infty,\end{aligned}$$

从而

$$\lim_{x\to+\infty} x^p \ln\left(\cos\frac{1}{x^p}+\sin\frac{1}{x^p}\right)=1.$$

所以根据 p 幂比较判别法知, 无穷积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\ln\left(\cos\frac{1}{x^p}+\sin\frac{1}{x^p}\right)\mathrm{d}x$ 当 $p>1$ 时收敛, 当 $p\leqslant 1$ 时发散.

上述几个判别法一般只适用于判断被积函数非负的无穷积分的敛散性和被积函数变号的无穷积分的绝对敛散性. 对于不绝对收敛而只条件收敛的无穷积分, 它们往往失效. 这时必须使用更加精细的一些判别法. 借助于无穷积分收敛的柯西准则, 有下面两个常用的判别法.

定理 9.1.7 (狄利克雷判别法) 对于无穷积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$, 设

(1) 函数 $b\mapsto\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界, 即存在 $M>0$ 使

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant M,\qquad \forall b>a;$$

(2) 函数 g 在 $[a,+\infty)$ 上单调, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$.

则 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

定理 9.1.8 (阿贝尔判别法) 对于无穷积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$, 设

(1′) 无穷积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

(2′) 函数 g 在 $[a,+\infty)$ 上单调且有界.

则 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

定理 9.1.7 和定理 9.1.8 的证明类似, 中间有些细微的区别, 所以一起证明. 根据无穷积分收敛的柯西准则, 只需证明: 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在相应的 $A>a$, 使对任意 $c>b>A$ 都成立

$$\left|\int_b^c f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

我们来分析这个期望得到的不等式左端的积分. 因为 g 是单调函数, 所以根据积分第二中值定理知, 存在 $b\leqslant\xi\leqslant c$ 使得

$$\int_b^c f(x)g(x)\mathrm{d}x=g(b)\int_b^\xi f(x)\mathrm{d}x+g(c)\int_\xi^c f(x)\mathrm{d}x,$$

于是

$$\left|\int_b^c f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant|g(b)|\left|\int_b^\xi f(x)\mathrm{d}x\right|+|g(c)|\left|\int_\xi^c f(x)\mathrm{d}x\right|. \tag{9.1.5}$$

就狄利克雷判别法而言, 由条件 (1) 知式 (9.1.4) 右端的两个积分的绝对值都不超过

$2M$ $\left(\text{如}\left|\int_b^\xi f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant 2M\right)$, 所以得到

$$\left|\int_b^c f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant 2M(|g(b)|+|g(c)|).$$

而由条件 (2) 知 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$, 所以对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在相应的 $A>a$, 使对任意 $x>A$ 都成立

$$|g(x)|<\frac{\varepsilon}{4M}.$$

因此对任意 $c>b>A$ 都成立

$$\left|\int_b^c f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant 2M(|g(b)|+|g(c)|) < 2M\cdot 2\frac{\varepsilon}{4M}=\varepsilon.$$

所以 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 就阿贝尔判别法而言, 由条件 $(2')$ 知 g 在 $[a,+\infty)$ 上有界, 设 $|g(x)|\leqslant M$, $\forall x\geqslant a$. 则由式 (9.1.4) 得

$$\left|\int_b^c f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant M\left(\left|\int_b^\xi f(x)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_\xi^c f(x)\mathrm{d}x\right|\right). \tag{9.1.6}$$

而由条件 $(1')$ 知 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 所以由柯西准则, 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在相应的 $A>a$, 使对任意 $c>b>A$ 都成立

$$\left|\int_b^c f(x)\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

因为条件 $b>A$ 和 $b\leqslant\xi\leqslant c$ 蕴涵着 $\xi>A$, 所以从这个不等式得到

$$\left|\int_b^\xi f(x)\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad \text{且} \quad \left|\int_\xi^c f(x)\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

把这些不等式代入式 (9.1.5) 便得到

$$\left|\int_b^c f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| < M\cdot 2\frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon.$$

因此 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 证毕.

例 11 设 $p>0$, a 是非零实数. 讨论无穷积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin ax}{x^p}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解 当 $p>1$ 时, 由不等式

$$\left|\frac{\sin ax}{x^p}\right| \leqslant \frac{1}{x^p}, \quad \forall x\geqslant 1$$

即知 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin ax}{x^p}\mathrm{d}x$ 绝对收敛. 当 $0<p\leqslant 1$ 时, 令 $f(x)=\sin ax$, $g(x)=\dfrac{1}{x^p}$. 显然函

数 $\int_1^x f(t)\mathrm{d}t=\dfrac{\cos ax-\cos a}{a}$ 有界, 而 $g(x)=\dfrac{1}{x^p}$ 单调且当 $x\to+\infty$ 时收敛于零, 所以由狄利克雷判别法可知 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin ax}{x^p}\mathrm{d}x$ 收敛. 断言在这种情况下这个无穷积分不绝对收敛. 事实上, 由于

$$\left|\frac{\sin ax}{x^p}\right|\geqslant\frac{\sin^2 ax}{x^p}=\frac{1}{2x^p}-\frac{\cos 2ax}{2x^p},\quad \forall x\geqslant 1,$$

而 $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{2x^p}\mathrm{d}x$ 发散 (因 $0<p\leqslant 1$) 且 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\cos 2ax}{2x^p}\mathrm{d}x$ 收敛 (证明与前类似), 所以 $\int_1^{+\infty}\left|\dfrac{\sin ax}{x^p}\right|\mathrm{d}x$ 发散. 因此当 $0<p\leqslant 1$ 时, $\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin ax}{x^p}\mathrm{d}x$ 条件收敛.

综上, 无穷积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin ax}{x^p}\mathrm{d}x$ 当 $p>1$ 时绝对收敛, 当 $0<p\leqslant 1$ 时条件收敛. 类似可知, 无穷积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\cos ax}{x^p}\mathrm{d}x$ 当 $p>1$ 时绝对收敛, 当 $0<p\leqslant 1$ 时条件收敛.

例 12 证明无穷积分 $\int_0^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x$ 收敛.

证明 对任意 $a>1$, 有

$$\int_0^a\sin x^2\mathrm{d}x=\int_0^1\sin x^2\mathrm{d}x+\int_1^a\sin x^2\mathrm{d}x=\int_0^1\sin x^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_1^{a^2}\frac{\sin y}{\sqrt{y}}\mathrm{d}y.$$

由于 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin y}{\sqrt{y}}\mathrm{d}y$ 收敛, 所以最后这个积分当 $a\to+\infty$ 时有极限, 进而当 $a\to+\infty$ 时 $\int_0^a\sin x^2\mathrm{d}x$ 有极限. 因此 $\int_0^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x$ 收敛, 且

$$\int_0^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x=\int_0^1\sin x^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{\sin y}{\sqrt{y}}\mathrm{d}y.$$

函数 $y=\sin x^2$ 的图像已在 5.8 节作过 (图 5-8-2). 由图像可知, 函数 $y=\sin x^2$ 在 -1 到 1 之间振荡, 并且随着 x 越大振荡的频率 (单位区间上振荡的次数) 越高; 当 x 趋于无穷时振荡的频率也随之趋于无穷. 因此, 当 a,b $(0<a<b)$ 都充分大时, 积分 $\int_a^b\sin x^2\mathrm{d}x$ 因为正、负相消而充分小. 这就导致了无穷积分 $\int_0^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x$ 收敛.

习 题 9.1

1. 根据定义判断下列无穷积分的敛散性, 并在收敛的情况下, 求它们的值:

(1) $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x\ (a>0)$;　(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+3x+1}$;

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}$;　(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$;

(5) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\mathrm{d}x$;　(6) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^3+x^6}}$;

(7) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$;　(8) $\displaystyle\int_9^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x\ln^2(\ln x)}$;

(9) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$;　(10) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}\mathrm{d}x$.

2. 利用递推公式计算下列无穷积分:

(1) $\displaystyle I_n=\int_0^{+\infty}x^n\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$;　(2) $\displaystyle I_n=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n+\frac{1}{2}}}$;

(3) $\displaystyle I_n=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$;　(4) $\displaystyle I_n=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^n}$;

(5) $\displaystyle I_n=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\cosh^{n+1}x}$.

3. 判别下列无穷积分的敛散性:

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2\mathrm{d}x}{x^4-x^2+1}$;　(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p+1}\mathrm{d}x\ (p>0)$;

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^q}{x^p+1}\mathrm{d}x\ (p>0,\ q>0)$;　(4) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln^n x}{x^p}\mathrm{d}x\ (p>0,\ n>0)$;

(5) $\displaystyle\int_9^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p\ln x\ln^2(\ln x)}\ (p>0)$;　(6) $\displaystyle\int_1^{+\infty}x^q\sin\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x\ (p>0,\ q>0)$;

(7) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right]^p\mathrm{d}x\ (p>0)$;

(8) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}-\mathrm{e}\right]^p\sqrt{1+x^q}\mathrm{d}x\ (p>0,\ q>0)$.

4. 判别下列无穷积分的绝对收敛性和条件收敛性:

(1) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\ (p>0)$;　(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos x}{\sqrt{x^3+1}}\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin^3 x}{x^p}\mathrm{d}x\ (p>0)$;　(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty}x^q\sin(x^p)\mathrm{d}x\ (p>0,\ q>0)$;

(5) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^q\sin x}{x^p+1}\mathrm{d}x\ (p>0,\ q>0)$;　(6) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x\ (p>0)$.

5. 设 $f(x),g(x)$ 和 $h(x)$ 都是区间 $[a,+\infty)$ 上的连续函数, 且 $f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x)$,

$\forall x \geqslant a$. 又设积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 都收敛. 证明: 积分 $\int_a^{+\infty} h(x)\mathrm{d}x$ 也收敛.

6. 设 $f(x)$ 是 $[a,+\infty)$ 上的单调函数, 且当 $x \to +\infty$ 时有极限. 证明: 积分 $\int_a^{+\infty} f(x) \sin x^2\mathrm{d}x$ 收敛.

7. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上可微且导函数在任意有限区间 $[a,b]$ 上可积. 又设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调递减, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. 证明: 积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件是积分 $\int_a^{+\infty} xf'(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

8. 设 $f(x)$ 是 $[a,+\infty)$ 上的非负连续函数, 且积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 问能否据此推出以下结论:

   (1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$;　　(2) $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界.

9. (1) 设积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 且 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续, 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$;

   (2) 设积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^{+\infty} |f'(x)|\mathrm{d}x$ 都收敛, 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

10. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上恒取正值且在任意有限区间 $[a,b]$ 上可积. 又设

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln f(x)}{\ln x} = \mu.$$

证明: 当 $\mu < -1$ 时积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 当 $\mu > -1$ 时该积分发散.

11. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上恒取正值且在任意有限区间 $[a,b]$ 上可积. 又设存在常数 $M>0$ 使对任意 $t>0$ 成立

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-tx}\mathrm{d}x \leqslant M.$$

证明: 积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

12. 设 $f(x)$ 在任意有限区间 $[0,a]$ $(a>0)$ 上可积, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = c$. 证明:

    (1) $\lim\limits_{t\to0^+} t\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-tx}\mathrm{d}x = c$;　　(2) $\lim\limits_{t\to0^+} \int_0^{+\infty} \dfrac{tf(x)}{1+t^2x^2}\mathrm{d}x = c$.

13. 设 $f(x)$ 在任意有限区间 $[0,a]$ $(a>0)$ 上可积, 且积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

14. 设 $f(x)$ 在任意有限区间 $[a,b]$ 上可积, 且 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = B$. 证明: 对任意实数 a 都有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f(x+a) - f(x)]\mathrm{d}x = a(B-A).$$

9.2 瑕 积 分

9.2.1 瑕积分的定义

在第 7 章已经学习过, 无界函数是不可积的, 即其定积分不存在. 然而, 在许多实际和理论问题中, 却经常需要考虑无界函数的积分. 最简单的莫过于面积的计算. 我们已经知道, 由曲线 $y=\dfrac{1}{x^2}$、直线 $x=1$ 和 Ox 轴所围成的底边无限长的曲边三角形 (记作 S_1, 如图 9-2-1) 的面积为无穷积分

$$S=\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \lim_{a\to\infty}\int_1^a \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \lim_{a\to\infty}\left(1-\frac{1}{a}\right)=1.$$

如果把 Ox 轴和 Oy 轴互换, 即把 Oxy 平面以直线 $y=x$ 为对称轴作反射对称, 上述曲边三角形就变成了由曲线 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$、直线 $y=1$ 和 Oy 轴所围成的无限高的曲边三角形, 其面积当然还是 1, 进而由曲线 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$、直线 $x=1$ 和两条坐标轴所围成的两条边无限长曲边梯形 (记作 S_2, 如图 9-2-2) 的面积是 2 (= 曲边三角形S_1 的面积 + 其下方单位正方形的面积). 考虑到面积与积分的关系, 自然地可以认为函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 在区间 $(0,1]$ 上的积分等于 2, 即

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2. \tag{9.2.1}$$

由于函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 在区间 $(0,1]$ 上是无界的, 上述积分便不能理解为定积分. 那么, 这个积分应当怎样理解呢? 由于曲边三角形 S_1 的面积, 是通过把底边做有限截断, 用有限边长的曲边梯形做近似, 然后再取极限的方法得到的, 自然计算曲边梯形 S_2 的面积, 也可通过用直线 $y=n$ 对 S_2 进行截断做近似, 然后再令 $n\to\infty$ 取极限的方法来计算. 这种方法是可行的. 但是在采用这种方法做近似时, 需要每次都计算两个定积分的和

$$\int_0^{\frac{1}{n^2}} n\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{n^2}}^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \frac{1}{n} + 2\left(1-\frac{1}{n}\right), \quad n=1,2,\cdots.$$

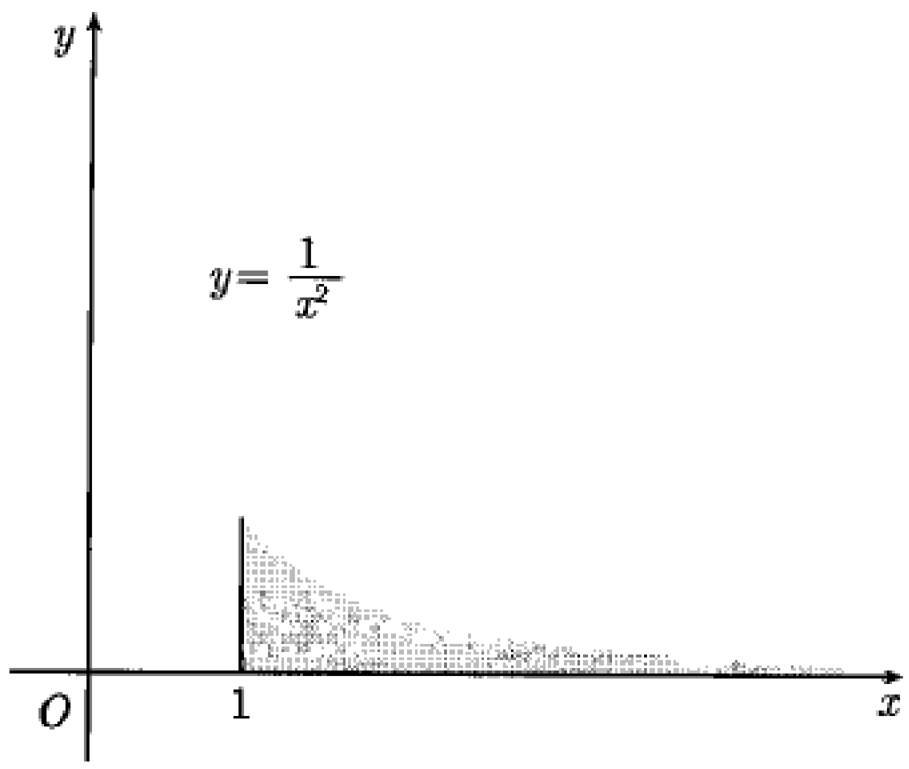


图 9-2-1 无穷积分

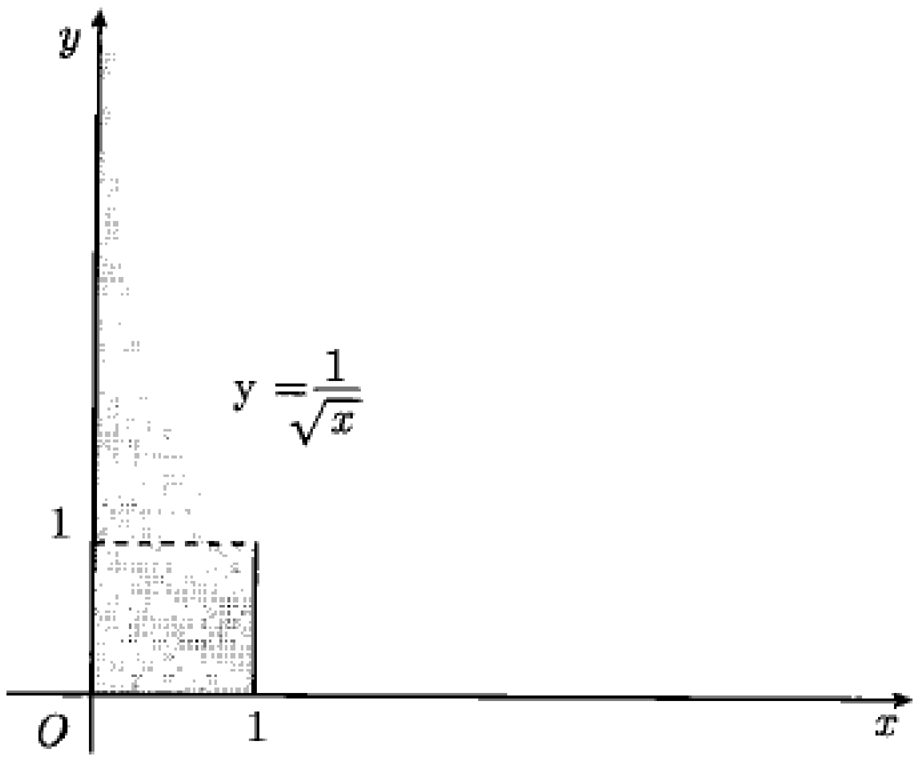


图 9-2-2 瑕积分

显然, 起主要作用的是上式右端第二项, 它是上式左端第二项定积分的值. 因此, 为使问题简单, 把式 (9.2.1) 中的积分直接定义为定积分 $\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 当 $\varepsilon \to 0^+$ 时的极限, 即定义

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+} 2\sqrt{x}\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0^+} 2(1-\sqrt{\varepsilon}) = 2.$$

几何上, 这相当于用由曲线 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$, 直线 $x=\varepsilon$ 和 $x=1$ 以及 Ox 轴所围成的每条边都有限长的曲边梯形的面积取极限来定义前述无限边长曲边梯形 S_2 的面积.

一般的无界函数的积分采用类似的方法定义. 先看最简单的情况: 函数 f 只在区间 $[a,b]$ 的左端点处无界.

定义 9.2.1 设函数 f 在区间 $(a,b]$ 上有定义且对任意充分小的 $\varepsilon>0$, 它在区间 $[a+\varepsilon,b]$ 上黎曼可积, 而在 $(a,a+\varepsilon)$ 上无界. 这时称符号

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

为以点 a 为瑕点的**瑕积分**. 如果极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x$$

存在, 就称这个瑕积分收敛, 并称上述极限值为它的积分值, 仍用符号 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示, 即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x.$$

如果上述极限不存在, 则称这个瑕积分发散.

如果函数 f 在 $[a,b]$ 上有界可积, 那么根据定积分关于下限的连续性, 有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x.$$

这说明瑕积分的定义包含了原来的积分定义, 是原来定义的推广.

如果瑕点不是点 a 而是点 b, 那么自然地定义

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x.$$

如果瑕点 c 不在区间的端点而在区间的内部 $a<c<b$, 则当 $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ 都收敛时便定义

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x,$$

这时称瑕积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛; 否则 $\left(\text{当}\int_a^c f(x)\mathrm{d}x\text{和}\int_c^b f(x)\mathrm{d}x\text{至少有一个发散时}\right)$ 就称它发散. 如果函数 f 在区间 $[a,b]$ 中有多个 (但只有有限多个) 瑕点, 可对这个区间进行分割, 使得分割成的每个小区间中最多只有 f 的一个瑕点, 并且这个瑕点是小区间的一个端点. 如果这样分割所得到的每个小区间上的瑕积分都收敛, 就称瑕积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛; 否则 (当至少有一个小区间上的瑕积分发散时) 就称 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散. 容易看出, 这个定义不依赖于分割的选取, 因而是合理的.

对于瑕点有无穷多个的情形, 问题变得很复杂. 这里不进行讨论, 因为后续课程实变函数中将在更一般的情形下对积分理论进行更深入的研究.

例 1 讨论瑕积分 $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解 当 $p\leqslant 0$ 时, 这是通常的积分. 当 $p>0$ 时是瑕积分, a 是瑕点. 当 $p\neq 1$ 时有

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}\mathrm{d}x &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b \frac{1}{(x-a)^p}\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{1-p}(x-a)^{1-p}\Big|_{a+\varepsilon}^b\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{1-p}[(b-a)^{1-p}-\varepsilon^{1-p}]\\ &=\begin{cases}\dfrac{1}{1-p}(b-a)^{1-p}, & \text{当 } p<1,\\ +\infty, & \text{当 } p>1.\end{cases}\end{aligned}$$

当 $p=1$ 时有

$$\int_a^b \frac{1}{x-a}\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b \frac{1}{x-a}\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\ln(x-a)\Big|_{a+\varepsilon}^b = +\infty.$$

所以当 $p<1$ 时 $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}\mathrm{d}x$ 收敛, 当 $p\geqslant 1$ 时它发散.

例 2 讨论瑕积分 $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解　这个积分有两个瑕点: 1 和 -1, 所以

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x+\int_{-1}^{0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x.$$

由于

$$\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{0}^{1-\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\arcsin x\Big|_{0}^{1-\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\arcsin(1-\varepsilon)=\frac{\pi}{2},$$

所以瑕积分 $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ 收敛且值为 $\dfrac{\pi}{2}$. 类似地,

$$\int_{-1}^{0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-1+\varepsilon}^{0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\big(-\arcsin(-1+\varepsilon)\big)=\frac{\pi}{2},$$

所以瑕积分 $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ 收敛且值也为 $\dfrac{\pi}{2}$. 因此瑕积分 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ 收敛且值为 π,

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x+\int_{-1}^{0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

9.2.2　瑕积分敛散性的判定

瑕积分理论与无穷积分理论是平行的. 对于无穷积分的每个定理, 在瑕积分理论中也有一个对应的定理, 并且证明方法也都类似. 下面逐一写出这些定理, 而把证明留给读者.

定理 9.2.1(瑕积分收敛的柯西准则)　设瑕积分 $\displaystyle\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x$ 只有一个瑕点 a. 则这个瑕积分收敛的充要条件是对任意给定的 $\sigma>0$, 存在相应的 $\delta>0$, 使对任意 $\varepsilon_1,\varepsilon_2\in(0,\delta)$ 都有

$$\left|\int_{a+\varepsilon_1}^{a+\varepsilon_2}f(x)\mathrm{d}x\right|<\sigma.$$

定理 9.2.2　对于瑕积分 $\displaystyle\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x$, 如果 $\displaystyle\int_{a}^{b}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛, 则 $\displaystyle\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛, 且有

$$\left|\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_{a}^{b}|f(x)|\mathrm{d}x.$$

根据这个定理, 引进下述概念

定义 9.2.2　对于瑕积分 $\displaystyle\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x$, 如果 $\displaystyle\int_{a}^{b}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛, 则称 $\displaystyle\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x$**绝对收敛**; 如果 $\displaystyle\int_{a}^{b}|f(x)|\mathrm{d}x$ 发散而 $\displaystyle\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则称 $\displaystyle\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x$**条件收敛**.

定理 9.2.3 (比较判别法 1)　对于瑕积分 $\displaystyle\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x$, 有下列结论:

(1) 如果存在非负函数 g 使成立

$$|f(x)| \leqslant g(x), \qquad \forall x \in (a,b),$$

且 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛;

(2) 如果 f 是非负函数, 且存在非负函数 g 使成立

$$f(x) \geqslant g(x), \qquad \forall x \in (a,b),$$

而 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 发散, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 也发散.

定理 9.2.4 (比较判别法 2) 对于瑕积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, 设它只有一个瑕点 a. 又设 f 非负且存在仅以点 a 为瑕点的非负连续函数 g 使成立

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

则有下列结论:

(1) 如果 $0 \leqslant l < +\infty$ 且 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛.

(2) 如果 $0 < l \leqslant +\infty$ 且 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 发散, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 也发散.

定理 9.2.5 (p 幂比较判别法) 对于瑕积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, 设它只有一个瑕点 a. 又设 f 非负且存在实数 p 使得

$$\lim_{x\to a^+}(x-a)^p f(x) = l.$$

则有下列结论:

(1) 如果 $0 \leqslant l < +\infty$ 且 $p < 1$, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

(2) 如果 $0 < l \leqslant +\infty$ 且 $p \geqslant 1$, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

定理 9.2.6 (狄利克雷判别法) 对于瑕积分 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$, 设它只有一个瑕点 a. 再设

(1) 函数 $c \mapsto \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ 在 (a,b) 上有界, 即存在 $M > 0$ 使

$$\left|\int_c^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant M, \qquad \forall c \in (a,b);$$

(2) 函数 g 在 (a,b) 上单调, 且 $\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = 0$.

则 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

定理 9.2.7 (阿贝尔判别法) 对于瑕积分 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$, 设它只有一个瑕点 a. 再设

(1) 瑕积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

(2) 函数 g 在 (a,b) 上单调且有界.

则 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

例 3 设 $p,q>0$. 讨论瑕积分 $\int_0^1 \frac{1}{x^p|\ln x|^q}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解 这个瑕积分的被积函数非负且有两个瑕点: 0 和 1, 所以写

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p|\ln x|^q}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^p|\ln x|^q}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x^p|\ln x|^q}\mathrm{d}x.$$

先看第一个瑕积分. 当 $p<1$ 时, 对任意 $q>0$ 都有

$$\lim_{x\to 0^+} x^p\frac{1}{x^p|\ln x|^q}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{|\ln x|^q}=0,$$

所以由 p 幂比较判别法知 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^p|\ln x|^q}\mathrm{d}x$ 收敛. 当 $p>1$ 时, 任取 $r\in(1,p)$, 则对任意 $q>0$ 都有

$$\lim_{x\to 0^+} x^r\frac{1}{x^p|\ln x|^q}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^{p-r}|\ln x|^q}=+\infty,$$

所以由 p 幂比较判别法知 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^p|\ln x|^q}\mathrm{d}x$ 发散. 当 $p=1$ 时, 对任意 $\varepsilon\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 有

$$\int_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x|\ln x|^q}\mathrm{d}x=-\int_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}|\ln x|}{|\ln x|^q}=\begin{cases}\dfrac{|\ln\varepsilon|^{1-q}}{1-q}-\dfrac{(\ln 2)^{1-q}}{1-q}, & \text{当 } q\neq 1,\\ \ln|\ln\varepsilon|-\ln\ln 2, & \text{当 } q=1.\end{cases}$$

可以看出

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x|\ln x|^q}\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{(\ln 2)^{1-q}}{q-1}, & \text{当 } q>1,\\ +\infty, & \text{当 } q\leqslant 1.\end{cases}$$

所以当 $q>1$时 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x|\ln x|^q}\mathrm{d}x$ 收敛, 而当 $q\leqslant 1$ 时它发散.

再看第二个瑕积分. 由于

$$\ln x=\ln[1-(1-x)]\sim-(1-x),\qquad 当\ x\to 1,$$

进而

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)^q\frac{1}{x^p|\ln x|^q}=1,$$

所以由 p 幂比较判别法知 $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{1}{x^p|\ln x|^q}\mathrm{d}x$ 当 $q<1$ 时收敛, 当 $q\geqslant 1$ 时发散.

综上即知瑕积分 $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^p|\ln x|^q}\mathrm{d}x$ 对任意 $p>0$ 和 $q>0$ 都发散.

例 4 设 $p>0$. 讨论瑕积分 $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^p}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解 这个瑕积分只有一个瑕点 0. 当 $p<1$ 时, 由不等式

$$\left|\frac{1}{x^p}\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant\frac{1}{x^p}$$

即知它是绝对收敛的. 当 $p\geqslant 1$ 时, 有

$$\frac{1}{x^p}\sin\frac{1}{x}=x^{2-p}\cdot\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}.$$

有

$$\left|\int_\varepsilon^1\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x\right|=\left|\int_\varepsilon^1\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)\right|=\left|\cos 1-\cos\frac{1}{\varepsilon}\right|\leqslant 2,$$

函数 x^{2-p} 单调, 且当 $p<2$ 时, 当 $x\to 0^+$ 时收敛到 0, 所以由狄利克雷判别法知当 $1\leqslant p<2$ 时瑕积分 $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^p}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 条件收敛. 当 $p=2$ 时,

$$\int_\varepsilon^1\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\cos 1-\cos\frac{1}{\varepsilon}$$

当 $\varepsilon\to 0^+$ 时没有极限, 所以瑕积分 $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 发散.

当 $p>2$ 时, 断言瑕积分 $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^p}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 发散. 因为若否, 则由

$$\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}=x^{p-2}\cdot\frac{1}{x^p}\sin\frac{1}{x},$$

与前类似地便可推知瑕积分 $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 收敛, 而这与已经证明的结论矛盾. 因此, 当 $p>2$ 时瑕积分 $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^p}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 必发散.

综合起来就是瑕积分 $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^p}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 当 $p<1$ 时绝对收敛, 当 $1\leqslant p<2$ 时条件收敛, 当 $p\geqslant 2$ 时发散.

9.2.3 瑕积分与无穷积分的关系

瑕积分与无穷积分的理论非常相像, 这自然会引致下列问题: 这两种积分之间有无关系? 答案是肯定的, 事实上它们可以通过适当的积分变换互化.

定理 9.2.8 (1) 设瑕积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 只有一个瑕点 a, 则这个瑕积分收敛的充要条件是无穷积分 $\int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} \frac{f\left(a+\frac{1}{y}\right)}{y^2}\mathrm{d}y$ 收敛, 而且收敛时它们的积分值相等

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} \frac{f\left(a+\frac{1}{y}\right)}{y^2}\mathrm{d}y.$$

(2) 无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件是瑕积分 $\int_0^1 \frac{f\left(a-1+\frac{1}{y}\right)}{y^2}\mathrm{d}y$ 收敛, 而且收敛时它们的积分值相等

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{f\left(a-1+\frac{1}{y}\right)}{y^2}\mathrm{d}y.$$

证明 (1) 对任意充分小的 $\varepsilon > 0$ 有

$$\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x = \left(\text{作积分变元变换 } y = \frac{1}{x-a}\right) \int_{\frac{1}{b-a}}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{f\left(a+\frac{1}{y}\right)}{y^2}\mathrm{d}y.$$

因此, 极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在的充要条件是极限 $\lim\limits_{c\to+\infty}\int_{\frac{1}{b-a}}^{c} \frac{f\left(a+\frac{1}{y}\right)}{y^2}\mathrm{d}y$ 存在, 并且当这两个极限都存在时它们相等. 这就证明了结论 (1). 结论 (2) 的证明类似. 证毕.

当然也可作其他积分变元变换把瑕积分变换为无穷积分, 或把无穷积分变换为瑕积分, 详见 9.3 节.

例 5 设 $p > 0$. 应用上述定理重新讨论瑕积分 $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解 作积分变元变换 $y = \frac{1}{x}$, 则得

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{\sin y}{y^{2-p}}\mathrm{d}y.$$

因此, 应用 9.1 节例 11 即知这个瑕积分当 $p<1$ 时绝对收敛, 当 $1\leqslant p<2$ 时条件收敛, 当 $p\geqslant 2$ 时发散.

习 题 9.2

1. 根据定义判断下列瑕积分的敛散性, 并在收敛的情况下, 求它们的值:

(1) $\displaystyle\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a-x}}$;　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \ln x\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}$;　　(4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(2+x)\sqrt{1-x}}$;

(5) $\displaystyle\int_0^1 \cot x\mathrm{d}x$;　　(6) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$;

(7) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-2}}$;　　(8) $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$;

(9) $\displaystyle\int_0^1 x\ln\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}x$;　　(10) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

2. 判别下列瑕积分的敛散性:

(1) $\displaystyle\int_0^1 |\ln x|^p\mathrm{d}x\ (p>0)$;　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{|\ln x|^p}\ (p>0)$;

(3) $\displaystyle\int_0^1 x^p\ln^q\frac{1}{x}\mathrm{d}x\ (p>0,\ q>0)$;　　(4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{|\ln x|^p}{(1-x^2)^q}\mathrm{d}x\ (p>0)$;

(5) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin^q x}{x^p}\mathrm{d}x\ (p>0,\ q>0)$;　　(6) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{(1-\cos x)^q}{x^p}\mathrm{d}x\ (p>0,\ q>0)$.

3. 判别下列广义积分的收敛性 (包括绝对收敛性和条件收敛性):

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln^q(1+x)}{x^p}\mathrm{d}x\ (p>0,\ q>0)$;　　(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan^q x}{x^p}\mathrm{d}x\ (p>0,\ q>0)$;

(3) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p\ln^q x}\ (p>0,\ q>0)$;　　(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p+x^q}\ (p\geqslant q>0)$;

(5) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p}\sin\frac{1}{x^q}\mathrm{d}x\ (p>0,\ q>0)$;　　(6) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^p\sin\frac{1}{x^q}\mathrm{d}x\ (p>0,\ q>0)$;

(7) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^q}{x^p}\mathrm{d}x\ (p>0,\ q>0)$;　　(8) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x\ (p>0)$.

4. 设 m,n 都是正整数. 计算下列积分:

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$;　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_0^1 x^m(\ln x)^n\mathrm{d}x$;　　(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2nx \ln\cos x\mathrm{d}x$.

5. 证明不等式:

(1) $\displaystyle\frac{\pi}{2\sqrt{2}} < \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}} < \frac{\pi}{2}$;　　(2) $\displaystyle\frac{3\pi}{8} < \int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x < \frac{\pi}{2}$;

(3) $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{6} < \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x < 1$;　　(4) $\displaystyle\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right) < \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x < 1 + \frac{1}{2\mathrm{e}}$.

6. 设 $f(x)$ 是区间 $(0,1]$ 上的单调函数, 且瑕积分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

7. 设 $f(x)$ 在 $(0,a]$ 上恒取正值且在每个区间 $[\varepsilon,a]$ $(0<\varepsilon<a)$ 上可积. 又设

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\ln f(x)}{\ln x} = \mu.$$

证明: 当 $\mu > -1$ 时积分 $\displaystyle\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 当 $\mu < -1$ 时该积分发散.

8. 设函数 $f(x)$ 对任意充分小的 $\varepsilon > 0$ 都在区间 $[a+\varepsilon, b]$ 上可积, 且对某个 $p > 1$ 瑕积分 $\displaystyle\int_a^b |f(x)|^p\mathrm{d}x$ 收敛. 证明: 瑕积分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛.

9. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(0,a]$ 上是单调的, 且瑕积分 $\displaystyle\int_0^a x^p f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 证明:

$$\lim_{x\to 0+} x^{p+1}f(x) = 0.$$

10. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(0,a]$ 上可微, 当 $x\to 0^+$ 时趋于正无穷大, 且存在常数 $p>0$ 和 $c>0$ 使得 $\displaystyle\lim_{x\to 0+} x^{p+1}f'(x) = -c$. 证明: 瑕积分 $\displaystyle\int_0^a f(x)\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 当 $0<p<1$ 时绝对收敛, 当 $1\leqslant p<2$ 时条件收敛, 当 $p>2$ 时发散.

11. 设 $f(x)$ 满足与习题 10 相同的条件, α, b 和 p 都是正常数. 证明:

(1) 瑕积分 $\displaystyle\int_0^a f(x)\sin\frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 当 $p<1$ 时绝对收敛, 当 $1\leqslant p<\alpha+1$ 时条件收敛, 当 $p>\alpha+1$ 时发散;

(2) 瑕积分 $\int_0^a f(x)\cos bx\sin\frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 当 $p<1$ 时绝对收敛, 当 $1\leqslant p<\alpha+1$ 时条件收敛, 当 $p>\alpha+1$ 时发散;

(3) 瑕积分 $\int_0^a f(x)\sin bx\cos\frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 当 $p<2$ 时绝对收敛, 当 $2\leqslant p<\alpha+2$ 时条件收敛, 当 $p>\alpha+2$ 时发散.

12. 设 α,β 和 p 都是正常数, a 和 b 是非零常数. 证明: 广义积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^p}\sin\Big(ax^\alpha+\frac{b}{x^\beta}\Big)\mathrm{d}x \qquad 和 \qquad \int_0^{+\infty}\frac{1}{x^p}\cos\Big(ax^\alpha+\frac{b}{x^\beta}\Big)\mathrm{d}x$$

当 $1-\alpha<p<1+\beta$ 时收敛, 在其他情况下发散.

9.3 一些定积分公式的推广

有了广义积分的概念, 便可考虑定义在任意区间 (a,b) (这里 a 可以等于 $-\infty$, b 可以等于 $+\infty$) 上的函数 f 的积分, 这里 f 既可以是有界函数, 也可以是无界函数, 但在无界的情形要求它最多只有有限个瑕点, 并且还要求它在不包含这些瑕点的任意有限闭区间上都是黎曼可积的. 以 $a=-\infty$, $b=+\infty$ 的情形为例, 设函数 f 的全部瑕点为 $x_1,x_2,\cdots,x_m$. 任取一组点 $y_1,y_2,\cdots,y_{m+1}$ 使 $y_1<x_1<y_2<x_2<\cdots<y_m<x_m<y_{m+1}$, 定义

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{y_1}f(x)\mathrm{d}x+\int_{y_1}^{x_1}f(x)\mathrm{d}x+\int_{x_1}^{y_2}f(x)\mathrm{d}x+\cdots+\int_{x_m}^{y_{m+1}}f(x)\mathrm{d}x+\int_{y_{m+1}}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x,$$

规定当上式右端的每个广义积分都收敛时, 积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 否则称它发散. 易知这个定义不依赖点 $y_1,y_2,\cdots,y_m,y_{m+1}$ 的选取, 因而是合理的. 这样就把积分的概念扩展了.

第 7 章建立的关于定积分的许多性质和公式, 都可推广到广义积分. 如积分的线性性、积分的保序性和绝对值不等式等, 都对广义积分也成立. 这些事实很显然, 其证明留给读者. 下面对积分的变元变换、分部积分以及牛顿–莱布尼茨公式进行详细讨论.

以下, 当谈到开区间 (a,b) 上的积分时, 总允许开区间的左端点 $a=-\infty$, 也允许右端点 $b=+\infty$. 同样对于开区间 (α,β), 既允许左端点 $\alpha=-\infty$, 也允许右端点 $\beta=+\infty$. 为了把第 7 章定义的定积分和这里定义的广义积分统一起来, 采用广义黎曼可积 (简称广义可积), 或积分存在, 或积分有意义这样的术语, 即函数 f 在区间 (a,b) 上**广义黎曼可积** (简称**广义可积**), 或积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ **存在或有意义**, 是指下列情况之一发生: (1) (a,b) 是有界区间且 f 是 $[a,b]$ 上的黎曼可积函数 (因而 f 是有界函

数). 这时 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示定积分. (2) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是收敛的广义积分. 此时 f 是 (a,b) 上的无界函数, 或者 (a,b) 是无界区间, 或者二者兼备.

首先, 牛顿–莱布尼茨公式可以推广到广义积分的情形.

定理 9.3.1(牛顿–莱布尼茨公式) 设函数 f 在区间 (a,b) 上广义可积, 且 f 有下列意义的原函数 F: F 在 (a,b) 上连续, 除至多有限个点外处处可微, 并且在可微的点处的导函数等于 f. 再设两个极限 $\lim\limits_{x\to a^+}F(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to b^-}F(x)$ 都存在. 则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = \lim_{x\to b^-}F(x) - \lim_{x\to a^+}F(x). \tag{9.3.1}$$

证明 先设 F 在整个区间 (a,b) 中可微, 且对任意有限的闭区间 $[c,d]\subseteq(a,b)$, f 在 $[c,d]$ 上黎曼可积. 这时在区间 $[c,d]$ 上应用定积分的牛顿–莱布尼茨公式, 得

$$\int_c^d f(x)\mathrm{d}x = F(d)-F(c).$$

令 $c\to a^+$, $d\to b^-$, 就得到

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\substack{c\to a^+\\ d\to b^-}}\int_c^d f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\substack{c\to a^+\\ d\to b^-}}[F(d)-F(c)] = \lim_{x\to b^-}F(x) - \lim_{x\to a^+}F(x).$$

再设 F 在 (a,b) 中有有限个不可微的点, f 在 (a,b) 中有有限个瑕点. 这时把区间 (a,b) 分成小区间的并, 使得 F 的不可微点和 f 的瑕点都在小区间的端点处. 对区间 (a,b) 作了这样的分割之后, 相应地把积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示成小区间上积分的和. 对每个小区间上的积分应用已证明的结论, 然后进行相加, 就得到了所需要的结论. 以 F 的不可微点与 f 的瑕点合起来总共只有一个点的情况为例, 设这个点是 c. 这时把积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$分成两个小区间 (a,c) 和 (c,b) 上积分的和, 然后在两个区间 (a,c) 和 (c,b) 上分别应用已证明的结论, 有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^c + F(x)\Big|_c^b = F(x)\Big|_a^b.$$

对于 F 的不可微点与 f 的瑕点有多个的情况, 证明是类似的. 证毕.

例 1 计算下列瑕积分、无穷积分和不连续函数的定积分:

$$(1)\ \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}}\mathrm{d}x;\quad (2)\ \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x;\quad (3)\ \int_a^b \operatorname{sgn}x\,\mathrm{d}x\ \ (a<0<b).$$

解 (1) $\dfrac{1}{\sqrt{|x|}}$ 的原函数为 $2\sqrt{|x|}\operatorname{sgn}x$, 它在 $[-1,1]$ 上连续, 在除 $x=0$ 以外的

点处都可微. 所以应用定理 9.3.1 得

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\mathrm{d}x = 2\sqrt{|x|}\,\mathrm{sgn}\,x\Big|_{-1}^{1} = 2-(-2) = 4.$$

(2) $\dfrac{1}{1+x^2}$ 的原函数为 $\arctan x$, 它在整个数轴上连续可微, 所以应用定理 9.3.1 得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x\Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

(3) $\mathrm{sgn}\,x$ 的原函数为 $|x|$, 它在 $[a,b]$ 上连续, 在除 $x=0$ 以外的点处都可微. 所以应用定理 9.3.1 得

$$\int_a^b \mathrm{sgn}\,x\mathrm{d}x = |x|\Big|_a^b = b-|a| = a+b.$$

必须强调, 定理 9.3.1 中**原函数 F 在 (a,b) 上连续的条件是不可减弱的**. 下面是一个典型的反例.

例 2 取 F 为符号函数:

$$F(x) = \begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0, \end{cases}$$

则 F 在区间 $[-1,1]$ 上满足定理 9.3.1 中除连续性以外的所有其他条件. 由于 $F'(x)=0$, $\forall x \in [-1,1]\backslash\{0\}$, 所以

$$\int_{-1}^{1} F'(x)\mathrm{d}x = 0.$$

但显然 $F(1)-F(-1)=2$, 可见

$$\int_{-1}^{1} F'(x)\mathrm{d}x \neq F(1)-F(-1).$$

之所以会发生这种情况, 是因为 $F(x)$ 在 $x=0$ 点发生了跨度为 2 的跳跃.

其次, 定积分的换元积分公式也可以推广到广义积分的情形. 仅考虑最简单的情况: 变换函数是严格单调的函数.

定理 9.3.2 (换元积分公式) 设 φ 是定义在开区间 (a,b) 上严格单调的连续函数, 且

$$\lim_{t\to a^+} \varphi(x) = \alpha, \qquad \lim_{t\to b^-} \varphi(x) = \beta,$$

其中 α 和 β 均可为 $\pm\infty$(但当它们都为无穷时须有相反的符号). 又设 φ 在区间 (a,b) 上除最多有限个点之外的其他点都可微, 且导函数 φ' 在 (a,b) 去掉这有限个点所得到的每个小区间上都连续并且最多只有有限个零点. 令 ψ 为 φ 的反函数: $\psi=\varphi^{-1}$. 则两个积分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\psi(y))\psi'(y)\mathrm{d}y$ 如果有一个是有意义的, 那么另一个也

有意义, 并且它们相等:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\psi(y))\psi'(y)\mathrm{d}y. \tag{9.3.2}$$

证明　不妨设 φ 是严格单调递增的函数, 因而 $\alpha < \beta$. 以下分不同的情况分别讨论.

(1) 先设 (a,b) 是有界区间, 而 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是定积分. 如果函数 φ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续可微 (这时根据连续函数的最大最小值定理, 其值域 $[\alpha,\beta]$ 是有界区间), 且 φ' 在 $[a,b]$ 上处处非零, 因而 ψ' 是区间 $[\alpha,\beta]$ 上的连续函数, 那么式 (9.3.2) 的两端都是定积分, 可运用定积分的定义、微分中值定理和关于可积函数乘积的可积性的定理 7.4.8 [特别是公式 (7.4.9)] 证明, 见习题 7.4 第 16 题. 如果函数 φ 在开区间 (a,b) 上连续可微, 且 φ' 在 (a,b) 上处处非零, 因而 ψ' 是开区间 (α,β) 上的连续函数, 而在区间 (a,b) 的端点处或者 φ 无界 (这时 α 或 β 等于无穷), 或者 φ 不可导, 或者 φ' 等于零因而 ψ' 等于无穷大, 这时 α 或 β 有可能是式 (9.3.2) 右端积分的瑕点, 那么

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ \varepsilon'\to 0^+}} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon'} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ \varepsilon'\to 0^+}} \int_{\varphi(a+\varepsilon)}^{\varphi(b-\varepsilon')} f(\psi(y))\psi'(y)\mathrm{d}y,$$

$$\int_\alpha^\beta f(\psi(y))\psi'(y)\mathrm{d}y = \lim_{\substack{\mu\to\alpha^+\\ \nu\to\beta^-}} \int_\mu^\nu f(\psi(y))\psi'(y)\mathrm{d}y$$

(当 $\alpha=-\infty$ 时, $\mu\to\alpha^+$ 是指 $\mu\to-\infty$; 同样当 $\beta=+\infty$ 时 $\nu\to\beta^-$ 是指 $\nu\to+\infty$; 下同). 由于 $\varepsilon\to 0^+$ 等价于 $\varphi(a+\varepsilon)\to\alpha^+$, 同样 $\varepsilon'\to 0^+$ 等价于 $\varphi(b-\varepsilon')\to\beta^-$, 所以上面两行等式中最右端的两个极限是相等的, 即同时存在或同时不存在, 且存在时极限值相等, 所以在这种情况下式 (9.3.2) 也成立. 如果函数 φ 在开区间 (a,b) 上有不可微的点, 或者 φ' 在 (a,b) 上有零点, 或者二者兼备, 那么通过把区间 $[a,b]$ 分成一些小区间的并, 进而把 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 写成一些小区间上积分的和, 可设使 φ 不可微的点或使 φ' 等于零因而 ψ' 等于无穷大的点在积分端点处, 进而把问题转化为已经讨论过的情况. 因此 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是定积分时式 (9.3.2) 总成立.

(2) 再设 (a,b) 是无界区间, 且 $a>-\infty$, $b=+\infty$, 并且对任意 $a<c<+\infty$, 函数 f 都在区间 $[a,c]$ 上黎曼可积, 即 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 是无穷积分. 取 $c>a$ 充分大, 使得函数 φ 的不可微点和使 φ' 等于零的点都在区间 (a,c) 中, 然后写

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

令 $\gamma=\varphi(c)$, 则 $\alpha<\gamma<\beta$. 相应于上式有

$$\int_\alpha^\beta f(\psi(y))\psi'(y)\mathrm{d}y=\int_\alpha^\gamma f(\psi(y))\psi'(y)\mathrm{d}y+\int_\gamma^\beta f(\psi(y))\psi'(y)\mathrm{d}y.$$

应用情况 (1) 讨论的结果有

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\gamma f(\psi(y))\psi'(y)\mathrm{d}y.$$

所以只需再证明

$$\int_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_\gamma^\beta f(\psi(y))\psi'(y)\mathrm{d}y. \tag{9.3.3}$$

事实上, 有

$$\int_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{d\to+\infty}\int_c^d f(x)\mathrm{d}x,\qquad \int_\gamma^\beta f(\psi(y))\psi'(y)\mathrm{d}y=\lim_{\eta\to\beta^-}\int_\gamma^\eta f(\psi(y))\psi'(y)\mathrm{d}y.$$

应用定积分的变元变换公式可知

$$\int_c^d f(x)\mathrm{d}x=\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(\psi(y))\psi'(y)\mathrm{d}y=\int_\gamma^\eta f(\psi(y))\psi'(y)\mathrm{d}y\quad(\eta=\varphi(d)),$$

而 $d\to+\infty=b$ 时 $\eta=\varphi(d)\to\beta^-$, 所以无穷积分 $\displaystyle\int_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛当且仅当积分 $\displaystyle\int_\gamma^\beta f(\psi(y))\psi'(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$ 存在, 并且当这两个积分存在时它们相等. 这就证明了式 (9.3.3), 进而也就证明了式 (9.3.2).

类似地可知, 当 $a=-\infty$, $b<+\infty$, 并且对任意 $-\infty<c<b$, 函数 f 都在区间 $[c,b]$ 上黎曼可积, 即 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$ 是下限无穷的无穷积分时, 式 (9.3.2) 也成立.

(3) 再设 (a,b) 是有界区间, 但 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是瑕积分, 并且 b 是唯一的瑕点. 取 $a<c<b$ 充分接近 b, 使得函数 φ 的不可微点和使 φ' 等于零的点都在区间 (a,c) 中, 即在区间 (c,b) 中函数 φ 连续可微且 φ' 没有零点. 令 $\gamma=\varphi(c)$, 则 $\alpha<\gamma<\beta$. 与前类似有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_\alpha^\beta f(\psi(y))\psi'(y)\mathrm{d}y=\int_\alpha^\gamma f(\psi(y))\psi'(y)\mathrm{d}y+\int_\gamma^\beta f(\psi(y))\psi'(y)\mathrm{d}y.$$

根据情况 (1) 讨论的结果可知以上两个等式右端的第一项积分相等 (两个积分同时存在或同时不存在, 且存在时积分值相等), 而类似于情况 (2) 的讨论有

$$\int_c^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_c^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varphi(c)}^{\varphi(b-\varepsilon)} f(\psi(y))\psi'(y)\mathrm{d}y = \int_\gamma^\beta f(\psi(y))\psi'(y)\mathrm{d}y,$$

所以式 (9.3.2) 仍然成立.

当 a 是唯一的瑕点时讨论类似.

(4) 最后来看最一般的情况. 这时可按本节开始时的方法把积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 分解成一些小区间上的积分的和, 使在每个小区间上的积分是上面 (2) 和 (3) 讨论的情形, 并对式 (9.3.2) 右端的积分作相应的分解. 通过对每个小区间上的积分应用 (2) 和 (3) 讨论的结论, 然后再合并, 就得到了一般情况下的式 (9.3.2). 证毕.

从以上定理看到, 有了广义积分的概念之后, 对定积分的变元变换可以减弱变换函数所应满足的条件: 变换函数的可微性可以减弱为允许有有限多个不可微的点, 而变换函数导数不取零值的条件也可以减弱为允许有有限多个零点. 只不过这样减弱了条件之后, 有可能把定积分变换成为广义积分. 实际上这些条件都可以进一步减弱, 这里不再深究. 另外, 变换函数 ψ 严格单调的条件也可以去掉, 只不过这时需要把函数 f 的条件加强为在 ψ 的值域 $\psi((\alpha,\beta))$ (当 $\alpha<\beta$) 或 $\psi((\beta,\alpha))$ (当 $\alpha>\beta$) 上是广义可积的, 因为这时 $\psi(t)$ 的值有可能取在区间 (a,b) 之外. 证明的方法是把区间 (α,β) (当 $\alpha<\beta$) 或 (β,α) (当 $\alpha>\beta$) 分解成使 ψ 单调的小区间的并集, 然后在每个小区间上分别应用上面已证明的结果, 然后再把所有小区间相加, 并注意对 ψ 取值多于一次的部分的积分进行正负相消. 细节这里从略.

必须说明, 尽管上述定理中的其他条件都有进一步减弱的余地, 但是**变换函数 ψ 连续的条件是不能减弱的**. 这一点务必注意.

例 3　设 $p>0$. 讨论积分 $\int_{-1}^1 \frac{1}{|x|^p}\sin\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{1}{x^p}\sin\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{1}{x^p}\sin\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x + \int_{-1}^0 \frac{1}{|x|^p}\sin\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x \quad \left(\text{作代换}\ \ y=\frac{1}{x^3}\right)\\ &=\frac{1}{3}\int_1^{+\infty} y^{\frac{p}{3}-\frac{4}{3}}\sin y\mathrm{d}y + \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{-1}|y|^{\frac{p}{3}-\frac{4}{3}}\sin y\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

由于最后这两个无穷积分当 $p<1$ 时绝对收敛, 当 $1\leqslant p<4$ 时条件收敛, 当 $p\geqslant 4$ 时发散, 所以原来的瑕积分当 $p<1$ 时绝对收敛, 当 $1\leqslant p<4$ 时条件收敛, 当 $p\geqslant 4$ 时发散.

例 4　证明积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\mathrm{d}x$ 收敛, 并求其值.

解　因为在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上 $0<\sin x<1$, 所以在此区间上 $\ln(\sin x)<0$. 因此只需证明积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\ln(\sin x)|\mathrm{d}x$ 收敛. 这是一个瑕积分, 瑕点为 0. 由于当 $x\to 0$ 时 $\sin x\sim$

x, 进而 $\ln(\sin x) \sim \ln x$, 而瑕积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\ln x|\mathrm{d}x$ 收敛, 所以瑕积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\ln(\sin x)|\mathrm{d}x$ 收敛. 这就证明了积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\mathrm{d}x$ 收敛.

为计算这个积分的值, 令 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\mathrm{d}x$. 作积分变元变换 $x = \pi - y$ 得

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin y)\mathrm{d}y = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin x)\mathrm{d}x.$$

所以

$$\begin{aligned}
I =& \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x \\
=& \frac{\pi}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln\left(\sin\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln\left(\cos\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x \\
=& \frac{\pi}{2}\ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin y)\mathrm{d}y + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos y)\mathrm{d}y \\
=& \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2I.
\end{aligned}$$

因此得 $I = -\frac{\pi}{2}\ln 2$.

分部积分公式也可推广到广义积分. 如前, 允许区间 (a, b) 的端点 $a = -\infty$, $b = +\infty$, 并且约定当 $a = -\infty$ 时, $c \to a^+$ 是指 $c \to -\infty$, 类似地当 $b = +\infty$ 时, $d \to b^-$ 是指 $d \to +\infty$.

定理 9.3.3(分部积分公式) 设函数 f 和 g 都在开区间 (a, b) 中连续, 且在除去有限个点的每个小区间上连续可微. 又设两个极限 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)g(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)g(x)$ 都存在. 这时记

$$f(x)g(x)\Big|_a^b = \lim_{x\to b^-} f(x)g(x) - \lim_{x\to a^+} f(x)g(x).$$

如果两个积分 $\int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x$ 有一个存在, 那么另一个也存在, 并且成立公式

$$\int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x. \tag{9.3.4}$$

证明 仅证明公式 (9.3.4), 因为定理的前一半结论从这个证明过程即可看出.

先设 f 和 g 都在整个开区间 (a, b) 中连续可微. 对任意有限的闭区间 $[c, d] \subseteq (a, b)$, 在 $[c, d]$ 上应用定积分的分部积分公式, 得

$$\int_c^d f'(x)g(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x)\Big|_c^d - \int_c^d f(x)g'(x)\mathrm{d}x.$$

令 $c \to a^+$, $d \to b^-$, 就得到

$$\begin{aligned}\int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x &= \lim_{\substack{c\to a^+\\ d\to b^-}} \int_c^d f'(x)g(x)\mathrm{d}x \\ &= \lim_{\substack{c\to a^+\\ d\to b^-}} f(x)g(x)\Big|_c^d - \lim_{\substack{c\to a^+\\ d\to b^-}} \int_c^d f(x)g'(x)\mathrm{d}x \\ &= f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

再设 f 和 g 在 (a,b) 中有不可微的点. 以有一个不可微点的情况为例, 设这个点是 c. 这时在两个区间 (a,c) 和 (c,b) 上分别应用已证明的结论, 有

$$\begin{aligned}\int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x &= \int_a^c f'(x)g(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x \\ &= \left[f(x)g(x)\Big|_a^c - \int_a^c f(x)g'(x)\mathrm{d}x\right] + \left[f(x)g(x)\Big|_c^b - \int_c^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x\right] \\ &= f(x)g(x)\Big|_a^b - \left[\int_a^c f(x)g'(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x\right] \\ &= f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

对于 (a,b) 中有 f 和 g 的多个不可微点的情况, 证明是类似的. 证毕.

定理 9.3.3 说明, 在扩展了积分的概念后, 定积分的分部积分公式 (定理 7.2.5) 中 f 和 g 都连续可微的条件可以减弱为允许它们在个别点处不可微. 但 f 和 g **都连续的条件是不能减弱的**. 忽视这一重要条件就会导致错误.

例 5 取 g 为符号函数:

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0, \end{cases}$$

f 取为区间 $[-1,1]$ 上的任意连续可微函数. 则

$$\int_{-1}^1 f'(x)g(x)\mathrm{d}x = -\int_{-1}^0 f'(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x = f(1)+f(-1)-2f(0).$$

而因 $g'(x)=0,\ \forall x\in[-1,1]\backslash\{0\}$, 所以

$$\int_{-1}^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x = 0,$$

进而

$$f(x)g(x)\Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(1)+f(-1).$$

可见当 $f(0)\neq 0$ 时,

$$\int_{-1}^{1} f'(x)g(x)\mathrm{d}x \neq f(x)g(x)\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} f(x)g'(x)\mathrm{d}x.$$

习 题 9.3

1. 应用牛顿–莱布尼茨公式结合变元变换和分布积分计算下列广义积分:

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$; (2) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$;

(3) $\displaystyle\int_0^a \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}}$; (4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x})^3}$;

(5) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\tan x}}$; (6) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{\tan x}}$;

(7) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ln\frac{x}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$; (8) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\arctan\sqrt{x}}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$;

(9) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arcsin \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$; (10) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}(1+\mathrm{e}^x)}\mathrm{d}x$.

2. 根据 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\ln 2$ 求下列积分的值:

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\ln(\sin x)\mathrm{d}x$; (2) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1-\cos x}\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\ln(\sin x)\mathrm{d}x$; (4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

3. 计算积分: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{|x|}}{a^2+x^2}\mathrm{d}x$.

4. 已知 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 求 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax^2-\frac{b}{x^2}}\mathrm{d}x$, 其中 $a,b>0$.

5. 设 $a,b>0$. 证明等式:

$$\int_0^{+\infty} f\Big(ax+\frac{b}{x}\Big)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f(\sqrt{x^2+4ab})\mathrm{d}x,$$

假设等式两端的积分都有意义.

在以下各题中, (a,b) 表示一般的有限或无限开区间.

6. (1) 设 $F(x)$ 在区间 (a,b) 上连续, 且极限 $F(a+)=\lim\limits_{x\to a+}F(x)$ 和 $F(b-)=\lim\limits_{x\to b-}F(x)$ 都存在. 又设 $F(x)$ 在 (a,b) 上除最多有限个点外处处有连续的

导数. 则导函数 $F'(x)$ 在 (a,b) 上广义可积, 且

$$\int_a^b F'(x)\mathrm{d}x = F(b-) - F(a+);$$

(2) 除以上条件外, 进一步设 $F(x)$ 在 (a,b) 上最多只有有限个零点. 则函数 $F'(x)\operatorname{sgn} F(x)$ 也在 (a,b) 上广义可积, 且

$$\int_a^b F'(x)\operatorname{sgn} F(x)\mathrm{d}x = |F(b-)| - |F(a+)|.$$

7. 计算下列积分:

(1) $\displaystyle\int_0^{4\pi} \cos x \operatorname{sgn}(\sin x)\mathrm{d}x$;　　(2) $\displaystyle\int_0^{4\pi} x\sin x \operatorname{sgn}(\cos x)\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{\operatorname{sgn} x}{\sqrt{|x|}}\mathrm{d}x$;　　(4) $\displaystyle\int_a^b (-1)^{[x]}\mathrm{d}x$.

8. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上广义可积. 令 $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, $\forall x \in (a,b)$. 证明:

(1) $F(x)$ 在区间 (a,b) 上连续;

(2) 如果对某点 $x_0 \in (a,b)$, $f(x)$ 在点 x_0 连续, 则 $F(x)$ 在点 x_0 可导, 且 $F'(x_0) = f(x_0)$.

9. 设 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上连续, $g(x)$ 在 (a,b) 上广义可积, 且 $g(x) > 0$, $\forall x \in (a,b)$. 又设 $f(x)g(x)$ 也在 (a,b) 上广义可积. 证明: 存在 $\xi \in (a,b)$ 使

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

10. 设 $f(x)$ 是 (a,b) 上的有界非负连续函数. 又设 $g(x)$ 在 (a,b) 上广义可积, 且 $g(x) > 0$, $\forall x \in (a,b)$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f^n(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} = \sup_{a<x<b} f(x).$$

11. 设 φ 是区间 (a,b) 上严格单调递增的凸函数, 它的值域是区间 (α,β). 令 ψ 为 φ 的反函数: $\psi = \varphi^{-1}$. 证明: 两个积分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\psi(y))\psi'(y)\mathrm{d}y$ 如果有一个是有意义的, 那么另一个也有意义, 并且它们相等:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\psi(y))\psi'(y)\mathrm{d}y.$$

建议先约化为定积分的情形, 然后应用定积分的定义证明.

12. 设 $f(x)$ 是 $[a,+\infty)$ 上的凸函数, 且当 $x \to +\infty$ 时 $\dfrac{f(x)}{x} \to +\infty$. 证明: 积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} \sin f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\displaystyle\int_a^{+\infty} \cos f(x)\mathrm{d}x$ 都收敛.

第 10 章

无 穷 级 数

无穷级数通常简称为级数, 是一种特殊的数列, 这种数列的每一项都是前面一项再加一个数. 既然无穷级数是特殊的数列, 那为什么不把它放在数列理论中, 而要专门在这一章进行讨论? 原因是两方面的. 一方面, 尽管无穷级数是一种特殊的数列, 但它却在实际和理论问题中经常出现, 有广泛的应用. 特别是, 它是用来表示和研究函数的一个重要工具, 所以值得专门讨论. 另一方面, 由于这种数列的特殊性, 其敛散性的判定和运算规律已经形成了一套专门的理论. 本章的目的就是介绍关于无穷级数的这些专门理论, 为第 11~13 章运用无穷级数来表示和研究函数做准备. 本章的核心问题是无穷级数敛散性的判定.

10.1 无穷级数的基本概念

10.1.1 级数问题的提出

所谓**无穷级数**, 简称级数, 是指用加号 “+” 把无穷多个数连接起来所得到的一个数学表达式:

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots,$$

简记作 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, 其中 $u_1,u_2,\cdots,u_n,\cdots$ 是一个给定的数列. 被加的每一项都叫做级数的一个**项**; 特别地, 代表一般项的 u_n 叫做级数的**通项**. 对每个正整数 n, 把级数的前 n 项加起来记作 S_n, 即

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k,\qquad n=1,2,\cdots,$$

则得一个数列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$. 这个数列叫做级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的**部分和数列**.

为什么要引进无穷级数的概念并研究它? 这是因为无穷级数在实际和理论问题中经常出现, 有广泛的应用. 我们来看几个具体的例子.

例 1 (实数的十进制表示) 任意正实数 a 都可表示成下列形式:

$$a = p_m p_{m-1} \cdots p_1 p_0 . q_1 q_2 \cdots q_n \cdots ,$$

其中 $p_0, p_1, \cdots, p_m$ 和 $q_1, q_2, \cdots, q_n, \cdots$ 都是 0 到 9 之间的整数, $p_m > 0$. 这个表示式的意义为

$$a = 10^m p_m + 10^{m-1} p_{m-1} + \cdots + 10 p_1 + p_0 + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{10^2} + \cdots + \frac{q_n}{10^n} + \cdots ,$$

即把 a 表示成了无穷级数.

例 2(圆周率的计算) 用 "割圆术" 计算圆周率 π 即单位圆的面积, 其过程如下: 首先用圆内接正六边形作圆的近似, 就得到 π 的第一个近似值

$$u_1 = 6 \times \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 2.598$$

显然, 用 u_1 作 π 的近似值误差很大, 这个误差等于图 10-1-1 中阴影部分的面积. 为了缩小误差, 在六边形的每条边上再作一个顶点在圆周上的等腰三角形, 就得到六个全等的等腰三角形, 它们的面积之和为

$$u_2 = 6 \times \frac{1}{2} \times 1 \times \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 0.402.$$

把 u_2 加到 u_1 上去, 就得到了 π 的第二个近似值 $u_1 + u_2 = 3$, 它比 u_1 更近似于 π. 这相当于用圆内接正十二边形作圆的近似. 为了得到 π 的比 $u_1 + u_2 = 3$ 更好的近似值, 再在这个正十二边形的每条边上作一个顶点在圆周上的等腰三角形, 就得到十二个新的全等的等腰三角形, 记它们的面积之和为 u_3. 把 u_3 加到 $u_1 + u_2 = 3$ 上去, 就得到了 π 的第三个近似值 $u_1 + u_2 + u_3$, 它比 $u_1 + u_2 = 3$ 更近似于 π. 反复不断地重复这个步骤, 就得到了一个无穷级数

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots ,$$

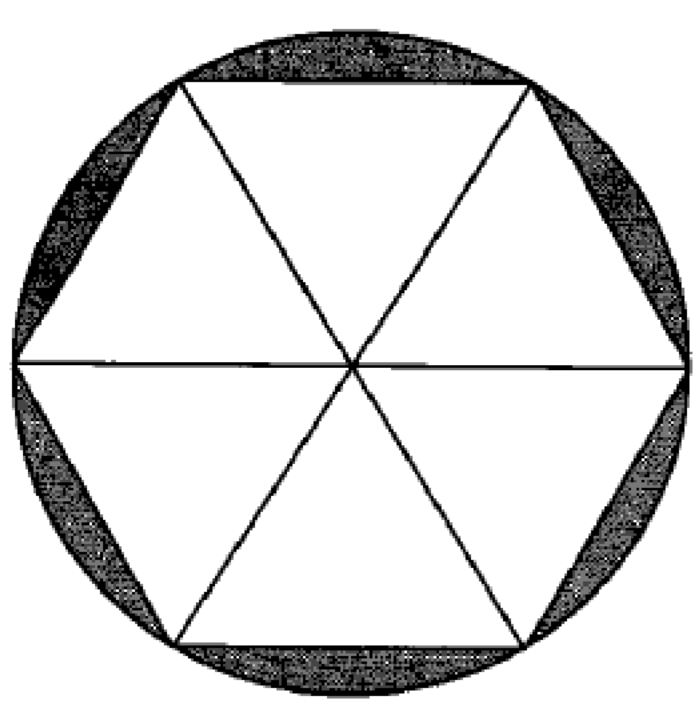


图 10-1-1 用正六边形作圆的第一次近似

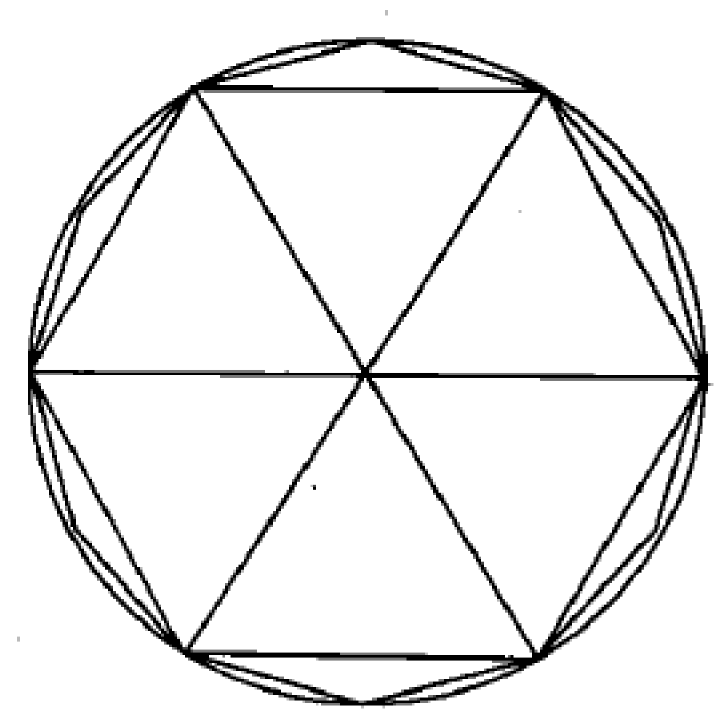


图 10-1-2 用正多边形逼近圆的过程

它的前 n 项的和 $u_1+u_2+\cdots+u_n$ 就是圆周率 π 的第 n 个近似值, 而 $\pi=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$.

例 3(函数的幂级数展开)　对于多项式函数

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n,$$

它的求值问题是很简单的：给定自变量 x 的一个值 x_0, 要求函数 f 的对应值 $f(x_0)$, 只需把 x 的值 x_0 代入上面的表达式, 则通过加、减、乘、除四则运算, 就可得到 $f(x_0)$ 的具体数值. 但是对于如指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数以及非整数次的幂函数等比较复杂的函数, 计算函数值的求值问题就不是这么简单了. 人们为此还专门制作了一些函数表, 以解决一些工程计算中常用函数的求值问题. 问题在于：这些表格是根据什么原理制作的? 这就相当于问：有没有可以用来求非多项式的函数之值 (当然是指近似值) 的一般方法?

5.7 节建立了指数函数 e^x 和正弦函数 $\sin x$ 等基本初等函数的 n 阶泰勒展开, 对任意实数 x 都成立

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\frac{\mathrm{e}^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}, \tag{10.1.1}$$

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}+(-1)^n\frac{\cos(\theta x)}{(2n+1)!}x^{2n+1}, \tag{10.1.2}$$

其中 $0<\theta<1$ (依赖于 x 和 n). 以指数函数为例, 由于对固定的 x 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}=0,$$

所以对给定的实数 x, 为了求 e^x 的值, 只需在式 (10.1.1) 中取 n 充分大, 并忽略余项 $\frac{\mathrm{e}^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$ (因为 θ 的值不确定), 则 $1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n$ 便是 e^x 的很好的近似值, 而且 n 取得越大则近似程度越高. 因此在式 (10.1.1) 中令 $n\to\infty$ 就得到

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n.$$

这样就把指数函数 e^x 表示成了每项都是自变量的整数幂函数的无穷级数, 用它可以计算函数 e^x 在每一点的函数值的近似程度可以任意地高的近似值. 类似地, 在式 (10.1.2) 中令 $n\to\infty$ 就得到

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1},$$

即正弦函数 $\sin x$ 也可以表示成每项都是自变量的整数幂函数的无穷级数. 以后将会看到 (第 12 章), 其他基本初等函数也都可以表示成类似的无穷级数.

例 4(微分方程的求解) 弹性力学、流体力学、电动力学、量子力学等学科领域的问题往往归结为一些微分方程的求解问题. 例如, 下面的**贝塞尔方程**(贝塞尔, Friedrich Wilhelm Bessel, 1784～1846, 德国人), 就是来源于这些学科领域的一个基本的微分方程

$$x^2y''+xy'+(x^2-m^2)y=0, \tag{10.1.3}$$

其中, x 是自变量, y 是待求的未知函数, y' 和 y'' 分别表示 y 的一阶和二阶导函数, m 是一个给定的常数. 作为例子, 只考虑 $m=1$ 的情况. 所谓求这个微分方程的**解**, 就是寻找函数 $y=y(x)$, 使得把它的表达式代入微分方程 (10.1.3) 时, 这个方程成为一个恒等式. 每个这样的函数 $y=y(x)$ 都叫做这个方程的一个解.

微分方程的求解一般而言是很困难的问题. 在 8.1 节借助变限积分所表示的函数, 求出了一阶微分方程 (只含未知函数及其一阶导数而不含未知函数的更高阶导数的方程)(8.1.1) 的解. 对于像方程 (10.1.3) 这样的二阶微分方程, 8.1 节的方法失效. 必须另辟蹊径. 考虑到指数函数 e^x 和正弦函数 $\sin x$ 等基本初等函数都可表示成形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的无穷级数, 尝试寻求方程 (10.1.3) 的用类似形式表示的解. 于是设

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,$$

其中 $a_0,a_1,\cdots,a_n,\cdots$ 都是待定的实数 (符号 x^0 表示恒取值 1 的函数). 这个式子表示的是无穷多个函数相加, 因而是否可以像有限多个函数相加那样进行诸如求一阶和二阶导数等计算, 是我们目前还不清楚的问题. 但为了获得对方程 (10.1.3) 的一些了解, 可以仿照对有限和的计算类似的方式形式地来做计算, 于是得到

$$y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1},\quad y''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}.$$

把这些表达式代入方程 (10.1.3) 计算, 则其左端为

$$\begin{aligned}x^2y''+xy'+(x^2-m^2)y&=-m^2a_0+(1-m^2)a_1x+\sum_{n=2}^{\infty}[n(n-1)a_n+na_n-m^2a_n+a_{n-2}]x^n\\&=-m^2a_0+(1-m^2)a_1x+\sum_{n=2}^{\infty}[(n^2-m^2)a_n+a_{n-2}]x^n.\end{aligned}$$

为使这个表达式对任意的 x 恒为零, 只有令每个 x^n 的系数都是零. 由于只考虑 $m=1$ 的情况, 所以得到下面一系列的等式:

$$a_0=0,\qquad (n^2-1)a_n+a_{n-2}=0,\quad n=2,3,\cdots.$$

这里关于 a_1 没有得到等式, 说明它可取任意实数. 令 $a_1=c$, 则应用数学归纳法就得到

$$a_{2k}=0,\qquad a_{2k+1}=\frac{(-1)^k c}{4^k k!(k+1)!},\quad k=0,1,2,\cdots.$$

这样就形式地得到了贝塞尔方程 (10.1.3) 当 $m=1$ 时的一个表示成无穷级数形式的解:

$$y(x)=c\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4^k k!(k+1)!}x^{2k+1},\tag{10.1.4}$$

其中 c 为任意常数.

以后会看到, 表达式 (10.1.4) 确实给出了一个对所有实数 x 都有定义的函数. 但是这个函数不是初等函数, 因而无法用基本初等函数通过有限次的四则运算和复合运算表示出来. 这也正是方程 (10.1.3) 不能用一些其他简单的方法求解的原因. 以后还将看到, 上面的形式运算其实都是合理的. 因此, 求出了方程 (10.1.3) 的一个用无穷级数形式表示的解. 注意虽然这个解的表达式 (10.1.4) 不是通过用基本初等函数的四则运算和复合等运算来表示的, 但应用这个表达式, 同样可进一步计算它的函数值和研究它的性质, 因此它其实与把初等函数用基本初等函数的四则运算和复合等运算来表示一样地有意义.

从以上几个例子可以看出, 无穷级数确实在很多实际问题中有重要的应用, 所以有必要对它进行专门的深入研究.

无穷级数在数学中远较微积分出现得早. 公元前 2 世纪阿基米德就已经知道

$$1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^n+\cdots=\frac{4}{3},$$

并把这个结果应用于计算由抛物线和直线相交所围成的抛物弓形的面积. 韦达 (Francois Vieta, 1540~1603) 明确地给出了一般的无穷几何级数的求和公式

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots=\frac{a_1^2}{a_1-a_2}\qquad(a_n=aq^{n-1}).$$

到 17 世纪后半叶牛顿和莱布尼茨发明微积分时, 无穷级数的概念早已形成. 牛顿在计算幂函数 x^α 的导数时, 就用到了关于 Δx 的函数 $(x+\Delta x)^\alpha$ 的无穷级数展开:

$$(x+\Delta x)^\alpha=x^\alpha+\alpha x^{\alpha-1}\Delta x+\frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}(\Delta x)^2+\cdots.$$

而正是微积分的发明, 把无穷级数理论的研究推向了热潮. 牛顿、莱布尼茨以及与他们同时代的许多其他人, 在深入研究微积分的同时, 也对无穷级数做了大量研究, 得到了 $\sin x$, $\cos x$, $\arcsin x$, $\arctan x$, e^x 等许多函数的幂级数形式的无穷级数展开. 其后的伯努利、欧拉、柯西、傅里叶、阿贝尔、魏尔斯特拉斯等, 更对无穷级数做了深入研究, 基本形成了现在的无穷级数理论 (包括第 11~13 章将要讨论的函数级数) 的最基础部分.

本章和第 11~13 章介绍无穷级数的基本理论. 在这一章先讨论数项级数, 第 11~13 章讨论函数级数.

10.1.2 无穷级数收敛与发散的概念

定义 10.1.1 对无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 如果它的部分和数列 $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \ (n = 1, 2, \cdots)$ 收敛, 即存在实数 S 使得 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, 则称这个级数**收敛**, 并称极限 S 为它的**和**, 记作 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$, 故

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k$$

(当右端的极限存在时). 当部分和数列没有极限时, 就称级数**发散**.

因此符号 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 具有两重意义: 一方面它表示一个无穷级数, 另一方面它也表示当这个级数收敛时的和.

在级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散的情形, 有一种特殊情况经常会遇到: 它的部分和数列趋于正的或负的无穷大. 这时分别记作

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = +\infty \qquad 和 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} u_n = -\infty,$$

并相应地称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散到正无穷大和发散到负无穷大.

例 5 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 收敛, 且和为 1.

解 先求级数的前 n 项的和. 有

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}, \qquad n = 1, 2, \cdots . \end{aligned}$$

因为 $\lim_{n\to\infty} S_n = 1$, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 收敛, 且和为 1, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

把一个级数的通项进行分拆, 使得相加时能够前后相消, 进而得到关于部分和数列的一个简单明晰的表达式, 是应用定义判断级数敛散性和求和的一个基本方法.

例 6 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ 发散.

解 该级数的前 n 项的和为

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})=\sqrt{n+1}-1,\quad n=1,2,\cdots.$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1)=+\infty$, 所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ 发散到正无穷大:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=+\infty.$$

这个例子说明, 一个级数可以通项趋于零, 但它却发散到无穷大.

例 7 讨论几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ax^{n-1}$ 的敛散性, a 是非零实数, 而 x 是任意实数.

解 先求级数的前 n 项的和. 有

$$S_n=a+ax+ax^2+\cdots+ax^{n-1}=\begin{cases}\dfrac{a-ax^n}{1-x}, & \text{当 } x\neq 1,\\ na, & \text{当 } x=1.\end{cases}$$

当 $|x|<1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{a}{1-x}$, 所以此时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ax^{n-1}$ 收敛, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty}ax^{n-1}=\frac{a}{1-x}.\tag{10.1.5}$$

当 $|x|>1$ 或 $x=1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$, 所以此时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ax^{n-1}$ 发散到无穷大. 当 $x=-1$ 时, 数列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的奇数项为 a, 偶数项为 0, 因此 S_n 没有极限, 从而级数发散.

综上, 当 $|x|<1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ax^{n-1}$ 收敛, 当 $|x|\geqslant 1$ 时该级数发散.

在处理涉及无穷级数的问题时, 最重要的一个步骤是确定级数的敛散性, 或确定出为使级数收敛, 其中所含的一些变量和参数的变化范围. 忽略这个步骤, 往往会得到一些错误的结论. 历史上曾出现过许多涉及无穷级数的悖论, 都是因为没有考虑级数的敛散性, 或者错误地把一些只适用于有限多个数相加的规律任意地使用于无穷级数这样的无穷多个数相加的问题而产生的. 下面就是两个例子:

考虑级数 $1-1+1-1+\cdots$, 记其和为 S. 则有

$$S=(1-1)+(1-1)+\cdots=0;$$

$$S=1-(1-1)-(1-1)-\cdots=1;$$

$$S=1-(1-1+1-1+\cdots)=1-S \quad\Rightarrow\quad S=\frac{1}{2}.$$

因此得到悖论：$0=1=\dfrac{1}{2}$.

在式 (10.1.5) 中特别令 $a=1$, 就得到下述公式

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}=\frac{1}{1-x}.$$

这个公式只对 $|x|<1$ 范围内的 x 才成立. 历史上, 这个公式是这样形式地得到的：因为

$$\begin{aligned}
&(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+\cdots)\\
=&(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+\cdots)-x(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+\cdots)\\
=&(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+\cdots)-(x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots)\\
=&1,
\end{aligned}$$

所以

$$1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+\cdots=\frac{1}{1-x}.$$

在以上计算中没有限定 $|x|<1$, 并且采用有限和的运算法则 (交换律、结合律等) 来运算无穷级数. 这样一来, 如果令 $x=-1$, 就重新得到了 $1-1+1-1+\cdots=\dfrac{1}{2}$; 而如果令 $x=2$, 则更加得到了这样的悖论：$+\infty=-1$.

上述这些悖论曾一度使包括一些知名数学家在内的许多 18 世纪的数学家迷惑不解. 直到 19 世纪初由波尔查诺、柯西等人引入无穷级数收敛与发散的严格定义, 才使这些悖论得到解决. 以后将会看到, 即使一个无穷级数收敛, 也不能对其中的项像做有限和的运算那样, 任意地交换它们的前后次序来运算. 这样的运算都是有条件的.

从数列极限的理论, 很容易得到关于级数的一些简单性质.

定理 10.1.1 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛, c 为任意实数. 则成立下列结论：

(1) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} cu_n$ 收敛, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} cu_n=c\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$;

(2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 收敛, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n\pm\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$.

证明 (1) 令 S_n 为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 n 项的和, 并令 $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. 则

$$\lim_{n\to\infty} S_n=S.$$

又令 T_n 为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} cu_n$ 的前 n 项的和, 则有

$$T_n = cu_1 + cu_2 + \cdots + cu_n = c(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = cS_n, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

进而

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} cS_n = c \lim_{n\to\infty} S_n = cS.$$

所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} cu_n$ 收敛, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} cu_n = c\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. 这就证明了结论 (1). 结论 (2) 的证明类似, 这里从略.

定理 10.1.2 任意改变级数中有限项的数值, 不改变级数的敛散性.

证明 这个定理是说: 对两个级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$, 如果存在一个正整数 N, 使对所有 $n > N$ 的项都有 $u_n = v_n$, 则它们的敛散性相同. 为证明这个结论, 记这两个级数的前 n 项的和分别为 S_n 和 T_n, 并记

$$R = (u_1 - v_1) + (u_2 - v_2) + \cdots + (u_N - v_N).$$

则对任意的 $n > N$ 我们有

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_2 + \cdots + u_n \\ &= [(u_1 - v_1) + (u_2 - v_2) + \cdots + (u_N - v_N)] + (v_1 + v_2 + \cdots + v_n) \\ &= R + T_n. \end{aligned}$$

所以数列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ 具有相同的敛散性. 证毕.

定理 10.1.3(级数收敛的必要条件) 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则其通项收敛于零:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

证明 令 S_n 为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 n 项的和, 并令 $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. 则 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. 注意到当 $n \geqslant 2$ 时, $u_n = S_n - S_{n-1}$, 所以

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

定理 10.1.3 常被用来证明一些级数的发散性. 例如, 对于几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ax^{n-1}$, 当 $|x| \geqslant 1$ 时, 其通项 ax^{n-1} 不收敛于零, 所以根据定理 10.1.3 就可直接断定这个级数当

$|x| \geqslant 1$ 时是发散的, 而无需再通过求其部分和数列, 看部分和数列是否有极限来判断其敛散性. 例 6 说明, 通项收敛于零仅是级数收敛的必要条件, 这个条件不是充分的.

例 8 考察级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2\sqrt[n]{n}}{n^2+1}$ 的敛散性.

解 该级数的通项 $u_n=\dfrac{n^2\sqrt[n]{n}}{n^2+1}$ 当 $n\to\infty$ 时不收敛于零, 所以根据定理 10.1.3 知这个级数发散.

注意对例 8 中的级数, 是无法求出其部分和数列的比较简单的表达式的, 但是, 仅通过考察它的通项 u_n 当 $n\to\infty$ 时的变化性态, 就可以判断出这个级数是发散的. 这就引出下面的问题: 有无一般的方法, 使得对于那些通项 u_n 收敛于零的级数, 也能够仅通过考察通项 u_n 当 $n\to\infty$ 时的变化性态, 来推断出级数是收敛的还是发散的? 学习了第 9 章广义积分, 很容易想到, 这个问题的答案应当是肯定的. 10.2 和 10.3 两节就介绍这方面的理论.

习 题 10.1

1. 根据定义证明以下级数收敛, 并求它们的和:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4n^2-1}$;　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{9n^2-3n-2}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n(n+2)}$;　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$;　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n(n+2)}(\sqrt{n}+\sqrt{n+2})}$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\dfrac{1}{n^2+n+1}$;　(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\dfrac{4}{4n^2+3}$;

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\arctan\dfrac{2}{n^2}$;　(10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\dfrac{1}{2n^2}$;

(11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin\dfrac{2}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}$;　(12) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\arccos\dfrac{n\sqrt{n^2-4}+1}{n^2-1}$.

2. 利用 $(x^n)'=nx^{n-1}$, $(x^n)''=n(n-1)x^{n-2}$ 等导数公式求下列级数的部分和, 进而讨论它们的敛散性, 并在收敛时求其和:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$;　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^n$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$;　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^5+2n^3+1}{n(n-1)}x^n$;　　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\mathrm{e}^{-nx}$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}$;　　(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{a^n}\ (a>0)$;

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{4n+1}}{4n+1}$;　　(10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)}$.

对于无法求出初等函数表达式的积分, 建议进行估计.

3. 应用欧拉公式 $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}=\ln n+c+\varepsilon_n$, $c=0.577216\cdots$, $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$ (习题 2.4 第 3 题) 求下列级数的部分和, 进而讨论它们的敛散性, 并在收敛时求其和:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n^2+n-1}$;　　(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n^2-n}$.

4. 应用积化和差公式

$$\sin nx\sin\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}\Big[\cos\Big(n-\frac{1}{2}\Big)x-\cos\Big(n+\frac{1}{2}\Big)x\Big],$$

$$\sin nx\cos x=\frac{1}{2}\Big[\sin(n+1)x+\sin(n-1)x\Big]$$

等, 求下列级数的部分和, 进而讨论它们的敛散性, 并在收敛时求其和:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin nx$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos nx$;　　(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a^n\sin nx$;　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a^n\cos nx$.

5. 应用欧拉公式 $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}=\ln n+c+\varepsilon_n$ 证明:

(1) 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=a\neq 0$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散到正或负无穷大;

(2) 以各项为正的等差级数的倒数为通项的级数发散到正无穷大.

6. (1) 证明: 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 则把该级数的项不改变次序地组合而得到的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ (其中 $A_n=\sum\limits_{i=k_n}^{k_{n+1}-1}a_i$, $1=k_1<k_2<\cdots$) 也收敛, 但反过来的结论不真, 举例说明;

(2) 证明: 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的各项都非负, 且把该级数的项不改变次序地组合而得到的某个级数收敛, 则该级数本身也收敛并有相同的和.

7. 设 m 是正整数. 证明:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+m)}=\frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}\right)$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}=\frac{1}{m!m}$.

8. 证明下列级数发散到正无穷大:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{1+a^n}\ (a\geqslant 1)$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\mathrm{e}^n}{n^n}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{-n}$;　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\cos^n\frac{1}{n}$.

10.2　正项级数

本节和 10.3 节建立一些判定准则, 以便能够仅通过考察通项 u_n 当 $n\to\infty$ 时的变化性态, 来得到级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的敛散性. 本节考虑一种特殊情况, 即每一项都是非负实数的级数, 10.3 节再研究一般项的级数.

10.2.1　正项级数的概念及其敛散性准则

定义 10.2.1　如果一个级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的每一项都非负, 即 $u_n\geqslant 0$, $n=1,2,\cdots$, 则称这个级数为**正项级数**.

正项级数敛散性的所有判别法, 都是从数列收敛的单调有界原理导出的. 显然, 正项级数的部分和数列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是单调递增数列:

$$S_1\leqslant S_2\leqslant\cdots\leqslant S_n\leqslant\cdots.$$

因此, 根据数列收敛的单调有界原理知, 如果 S_n 有上界, 则它有极限, 从而级数收敛. 反之, 如果 S_n 无上界, 则它显然无极限, 进而级数发散. 这就得到.

定理 10.2.1　正项级数收敛的充要条件是其部分和数列有上界.

从上面的分析可知, 正项级数级数如果发散, 则必发散到无穷大. 这是一个有用的结论.

例 1　证明 p 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$$

当 $p>1$ 时收敛, 当 $p\leqslant 1$ 时发散.

证明一 由于当 $p \leqslant 0$ 时级数的通项不趋于零, 所以这时级数是发散的. 下面只考虑 $p > 0$ 的情况.

先看 $p \leqslant 1$ 的情况. 对任意正整数 $n \geqslant 2$, 都有正整数 k 使得 $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$. 这时把部分和 S_n 中的项从第二项起, 依次按 $1, 2, 4, 8, \cdots, 2^{k-1}$ 项组合起来, 并舍弃从 2^k+1 项 (当 $n > 2^k$) 开始后面各项, 就得到

$$\begin{aligned}S_n =&1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p}\\ \geqslant&1 + \frac{1}{2^p} + \left(\frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p}\right) + \left(\frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} + \frac{1}{8^p}\right) + \cdots\\ &+ \left(\frac{1}{(2^{k-1}+1)^p} + \frac{1}{(2^{k-1}+2)^p} + \cdots + \frac{1}{2^{kp}}\right)\\ \geqslant&1 + \frac{1}{2^p} + \frac{2}{4^p} + \frac{4}{8^p} + \cdots + \frac{2^{k-1}}{2^{kp}}\\ =&1 + \frac{1}{2}\left(2^{1-p} + 2^{2(1-p)} + 2^{3(1-p)} + \cdots + 2^{k(1-p)}\right),\end{aligned}$$

从而

$$S_n \geqslant \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{2^{1-p}(2^{k(1-p)}-1)}{2^{1-p}-1}, & \text{当 } p < 1,\\ 1 + \dfrac{k}{2}, & \text{当 } p = 1.\end{cases}$$

由于当 $n \to \infty$ 时 $k \to \infty$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$. 因此当 $p \leqslant 1$ 时级数发散.

当 $p > 1$ 时, 类似地我们有

$$\begin{aligned}S_n =&1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p}\\ \leqslant&1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}\right) + \cdots\\ &+ \left(\frac{1}{2^{kp}} + \frac{1}{(2^k+1)^p} + \cdots + \frac{1}{(2^{k+1}-1)^p}\right)\\ \leqslant&1 + \frac{2}{2^p} + \frac{4}{4^p} + \cdots + \frac{2^k}{2^{kp}}\\ =&1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^k\\ =&\frac{1 - \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^{k+1}}{1 - \frac{1}{2^{p-1}}} \leqslant \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{p-1}}} = \frac{2^{p-1}}{2^{p-1}-1}.\end{aligned}$$

表明部分和数列有界, 所以级数收敛.

证明二 先看 $p = 1$ 的情况. 由不等式 $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e} < \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$, 有下列不等式

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n},$$

进而

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$$

(这个不等式也可应用微分中值定理得到). 因此

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > \sum_{k=1}^{n} [\ln(k+1) - \ln k] = \ln(n+1),$$

据此可知 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$. 所以当 $p=1$ 时级数发散.

当 $p \neq 1$ 时, 采用类似的思想考虑. 注意到 $(x^{1-p})' = (1-p)x^{-p}$, 所以应用微分中值定理可知

$$(n+1)^{1-p} - n^{1-p} = (1-p)\xi^{-p},$$

其中 $n < \xi < n+1$. 据此得到当 $p<1$ 时,

$$\frac{1}{(n+1)^p} < \frac{1}{1-p}[(n+1)^{1-p} - n^{1-p}] < \frac{1}{n^p},$$

而当 $p>1$ 时,

$$\frac{1}{(n+1)^p} < \frac{1}{p-1}[n^{1-p} - (n+1)^{1-p}] < \frac{1}{n^p}.$$

因此当 $p<1$ 时,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1-p}[(k+1)^{1-p} - k^{1-p}] = \frac{1}{1-p}(n+1)^{1-p},$$

推知 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$. 所以当 $p<1$ 时级数发散. 当 $p>1$ 时,

$$\begin{aligned} S_n =& \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} < 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{p-1}[(k-1)^{1-p} - k^{1-p}] \\ =& 1 + \frac{1}{p-1}[1 - n^{1-p}] < 1 + \frac{1}{p-1} = \frac{p}{p-1}, \end{aligned}$$

表明部分和数列有界, 所以级数收敛.

从定理 10.2.1 出发, 可导出关于正项级数敛散性的一系列的判别方法. 这些判别法分为三类: 第一类是将需要判定敛散性的级数与一个已知敛散性或敛散性容易确定的级数进行比较; 第二类是根据级数自己的通项收敛于零的速度的快慢来判别级数的敛散性; 第三类是把级数敛散性的判定问题转化为广义积分的敛散性的判定问题. 第三类比较特殊, 只适用于通项单调递减的正项级数. 下面就逐一介绍这些判别法.

10.2.2 比较判别法

定理 10.2.2(比较判别法 1) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数, 且存在正整数 N 使对所有 $n \geqslant N$ 的项都成立

$$u_n \leqslant v_n. \tag{10.2.1}$$

则有下列结论:

(1) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;

(2) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

证明 因为去掉级数的有限项不改变级数的敛散性, 所以不妨设 $N=1$. 用 S_n 和 T_n 分别表示级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的前 n 项的和. 则由式 (10.2.1) 可知

$$S_n \leqslant T_n, \qquad n=1,2,\cdots.$$

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则 T_n 有上界, 从而由上式知 S_n 也有上界, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛. 反过来, 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则 S_n 无界, 从而 T_n 也无界, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散. 证毕.

定理 10.2.3(比较判别法 2) 设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数, 其中 $v_n>0$, $n=1,2,\cdots$, 且存在 $0 \leqslant l \leqslant \infty$ 使成立

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n}=l. \tag{10.2.2}$$

则有下列结论:

(1) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 且 $0 \leqslant l<\infty$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;

(2) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 且 $0<l \leqslant \infty$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散.

证明 如果 $0<l<\infty$, 则由式 (10.2.2) 知存在正整数 N 使当 $n \geqslant N$ 时,

$$\frac{l}{2} v_n \leqslant u_n \leqslant 2 l v_n.$$

而级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{2} v_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} 2 l v_n$ 都和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 有相同的敛散性, 所以根据定理 10.2.1 知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也有相同的敛散性.

如果 $l=0$, 则由式 (10.2.2) 知存在正整数 N 使当 $n \geqslant N$ 时

$$u_n \leqslant v_n.$$

故由定理 10.2.1 知由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛可推知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛.

如果 $l=\infty$, 则由式 (10.2.2) 知存在正整数 N 使当 $n \geqslant N$ 时

$$u_n \geqslant v_n.$$

故由定理 10.2.1 知由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散可推知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散. 证毕.

定理 10.2.4(比较判别法 3) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数, 其中 $u_n, v_n > 0$, $n=1,2,\cdots$, 且存在正整数 N 使对所有 $n \geqslant N$ 的项都成立

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}. \tag{10.2.3}$$

则有下列结论:

(1) 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;

(2) 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

证明 由条件 (10.2.3) 知对任意 $n > N$ 的项都成立

$$\frac{u_n}{u_N} = \frac{u_n}{u_{n-1}} \cdot \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \cdot \cdots \cdot \frac{u_{N+1}}{u_N} \leqslant \frac{v_n}{v_{n-1}} \cdot \frac{v_{n-1}}{v_{n-2}} \cdot \cdots \cdot \frac{v_{N+1}}{v_N} = \frac{v_n}{v_N},$$

进而当 $n > N$ 时,

$$u_n \leqslant \frac{u_N}{v_N} v_n.$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{u_N}{v_N} v_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 有相同的敛散性, 所以应用定理 10.2.1 即得本定理的结论, 证毕.

例 2 证明级数 $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}$ 收敛.

证明 由于

$$(\ln\ln n)^{\ln n} = \mathrm{e}^{\ln n \ln\ln\ln n} = \mathrm{e}^{\ln n^{\ln\ln\ln n}} = n^{\ln\ln\ln n} \geqslant n^2 \qquad \text{当 } n > \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^2}},$$

所以

$$\frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}} \leqslant \frac{1}{n^2} \qquad \text{当 } n > \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^2}}.$$

而级数 $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 所以由比较判别法即知级数 $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}$ 收敛.

例 3 证明级数 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$ 发散.

证明 由于

$$(\ln n)^{\ln\ln n}=\mathrm{e}^{\ln\ln n\ln\ln n}=\mathrm{e}^{(\ln\ln n)^2},$$

而当 $n\to\infty$ 时 $\ln\ln n$ 的任意正幂次趋于无穷大的速度都比 $\ln n$ 慢, 特别 $(\ln\ln n)^2$ 趋于无穷大的速度比 $\ln n$ 慢, 所以一定存在 N 使当 $n\geqslant N$ 时 $(\ln\ln n)^2\leqslant\ln n$, 进而

$$\frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}=\frac{1}{\mathrm{e}^{(\ln\ln n)^2}}\geqslant\frac{1}{\mathrm{e}^{\ln n}}=\frac{1}{n}.$$

这样由级数 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散, 应用比较判别法即知级数 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$ 也发散. 因此, 剩下的问题只在于严格地证明存在 N 使当 $n\geqslant N$ 时 $(\ln\ln n)^2\leqslant\ln n$, 亦即 $\ln\ln n\leqslant\sqrt{\ln n}$. 令 $x=\ln n$, 则问题化为证明: 存在 M 使当 $x\geqslant M$ 时成立

$$\ln x\leqslant\sqrt{x}.$$

为了证明最后这个不等式, 考察函数 $f(x)=\ln x-\sqrt{x}$. 求导数有

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{2}\right)<0\quad 当\quad x>4.$$

这表明函数 $f(x)$ 在 $x\geqslant 4$ 时单调递减. 而 $f(4)=\ln 4-\sqrt{4}=2\ln 2-2<0$, 所以当 $x\geqslant 4$ 时 $f(x)<0$. 这就得到了所需证明的结论. 证毕.

例 4 设 $p>0$. 考察级数 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\left[\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^p$ 的敛散性.

解 首先有下列泰勒展开:

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+O(x^3),\qquad \mathrm{e}^x=1+x+O(x^2),\qquad 当\quad x\to 0.$$

应用这些泰勒展开式, 有

$$\begin{aligned}\mathrm{e}-(1+x)^{\frac{1}{x}}&=\mathrm{e}-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}=\mathrm{e}-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}[x-\frac{1}{2}x^2+O(x^3)]}\\&=\mathrm{e}-\mathrm{e}^{1-\frac{1}{2}x+O(x^2)}=\mathrm{e}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x+O(x^2)}\right)\\&=\mathrm{e}\left[1-\left(1-\frac{1}{2}x+O(x^2)\right)\right]\\&=\frac{\mathrm{e}}{2}x+O(x^2),\qquad 当\quad x\to 0.\end{aligned}$$

因此

$$\left[\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^p=\left[\frac{\mathrm{e}}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]^p,\qquad 当\quad n\to\infty,$$

进而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left[\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^p}{\frac{1}{n^p}}=\lim_{n\to\infty}n^p\left[\frac{\mathrm{e}}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]^p=\left(\frac{\mathrm{e}}{2}\right)^p.$$

这样应用比较判别法和例 1 即知, 当 $p>1$ 时级数收敛, 而当 $p\leqslant 1$ 时级数发散.

10.2.3 检比法和检根法

比较判别法虽然提供了一种判别正项级数敛散性的强有力工具, 但应用它需要预先知道一个可以与给定的级数相比较且敛散性已经确定或容易确定的级数. 这往往并不方便. 下面给出的两个判别法, 只需考虑级数的通项当 $n \to \infty$ 时的性态, 就可在一定范围内获知级数的敛散性, 从而使用起来更加方便.

定理 10.2.5(达朗贝尔检比法) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数, 其中 $u_n > 0, n = 1, 2, \cdots$, 且存在 $0 \leqslant l \leqslant \infty$ 使成立

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l. \tag{10.2.4}$$

则有下列结论:

(1) 如果 $0 \leqslant l < 1$, 则级数收敛;

(2) 如果 $1 < l \leqslant \infty$, 则级数发散.

证明 先设 $0 \leqslant l < 1$. 取实数 r 使得 $l < r < 1$, 再令 $v_n = r^n$, $n = 1, 2, \cdots$. 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} r^n$ 收敛. 注意到 $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = r > l = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, 所以存在正整数 N 使当 $n \geqslant N$ 时,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n},$$

进而应用定理 10.2.4 即知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

再设 $1 < l \leqslant \infty$. 取实数 r 使得 $1 < r < l$ (当 $l = \infty$ 时任取 $r > 1$ 即可), 再令 $v_n = r^n, n = 1, 2, \cdots$. 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} r^n$ 发散. 注意到 $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = r < l = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, 所以存在正整数 N 使当 $n \geqslant N$ 时,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \frac{v_{n+1}}{v_n},$$

进而应用定理 10.2.4 即知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散. 证毕.

注意当 $l = 1$ 时, 不能确定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性. 这是因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ 都满足条件 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, 但前者收敛而后者发散. 所以当 $l = 1$ 时达朗贝尔检比法失效.

定理 10.2.6(柯西检根法) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数, 且存在 $0 \leqslant l \leqslant \infty$ 使成立

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l. \tag{10.2.5}$$

则有下列结论:

(1) 如果 $0\leqslant l<1$, 则级数收敛;

(2) 如果 $1<l\leqslant\infty$, 则级数发散.

证明 先设 $0\leqslant l<1$. 取实数 r 使得 $l<r<1$. 则由 $\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l<r$ 知, 存在正整数 N, 使当 $n\geqslant N$ 时 $\sqrt[n]{u_n}\leqslant r$, 即 $u_n\leqslant r^n$. 而由 $r<1$ 知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}r^n$ 收敛, 所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛.

再设 $1<l\leqslant\infty$. 取实数 r 使得 $1<r<l$. 则由 $\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l>r$ 知, 存在 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的子列 $\{u_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 使得

$$\sqrt[n_k]{u_{n_k}}\geqslant r,\qquad k=1,2,\cdots.$$

因此 $u_{n_k}\geqslant r^{n_k}$, $k=1,2,\cdots$. 因 $r>1$, 这意味着 $\lim\limits_{k\to\infty}u_{n_k}=+\infty$. 因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的通项不趋于零, 所以它发散. 证毕.

与达朗贝尔检比法类似, 柯西检根法在 $l=1$ 时也失效. 这是因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 都满足条件 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=1$, 但前者收敛而后者发散.

在数列的极限部分我们已经知道 (习题 2.3 的第 2题), 如果 $u_n>0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=l$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$. 所以用达朗贝尔检比法能够判别敛散性的级数, 也一定能够用柯西检根法判别. 但是在许多场合, 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ 比 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$ 更容易计算.

当达朗贝尔检比法与柯西检根法失效时, 为了确定级数的敛散性, 需要对级数的通项 u_n 在 $n\to\infty$ 时的变化情况做更加仔细的分析. 实际上, 由于这两个判别法都是用几何级数做比较级数, 但几何级数在收敛的情形其通项收敛于零的速度是很快的 (以指数阶速度收敛于零 —— 注意当 $0<r<1$ 时 $r^n=\mathrm{e}^{-n|\ln r|}$), 而当它发散时通项实际上并不收敛于零, 而是趋于无穷大. 所以对那些通项收敛于零、但却不是以指数阶速度收敛于零的级数, 如对于 p 级数, 这两个判别法注定是不可用的. 在这种情况下, 换用 p 级数做比较级数往往会使问题得到解决. 下面的判别法就是从这个思想出发得到的.

定理 10.2.7(高斯检比法) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 是正项级数, 其中 $u_n>0$, $n=1,2,\cdots$, 且

存在常数 $0 \leqslant \lambda < \infty$ 和 $-\infty < \mu < \infty$ 使成立

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \text{当 } n \to \infty. \tag{10.2.6}$$

则有下列结论:

(1) 如果 $\lambda > 1$, 则级数收敛;

(2) 如果 $0 \leqslant \lambda < 1$, 则级数发散;

(3) 如果 $\lambda = 1$, 则当 $\mu > 1$ 时级数收敛, 而当 $\mu < 1$ 时级数发散.

证明 由于 $\lambda \neq 1$ 的情况已由达朗贝尔检比法得到解决, 所以这里只考虑 $\lambda = 1$ 的情况. 先设 $\mu > 1$. 这时取实数 p 使得 $1 < p < \mu$, 再令 $v_n = \dfrac{1}{n^p}$, $n = 1, 2, \cdots$. 则级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛. 注意到

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} = \frac{(n+1)^p}{n^p} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p = 1 + \frac{p}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \text{当 } n \to \infty,$$

而 $p < \mu$, 所以存在正整数 N 使当 $n \geqslant N$ 时,

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} < \frac{u_n}{u_{n+1}}, \qquad \text{即} \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

因此应用定理 10.2.4 即知级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

再设 $\mu < 1$. 这时取实数 p 使得 $\mu < p < 1$, 再令 $v_n = \dfrac{1}{n^p}$, $n = 1, 2, \cdots$. 则级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 发散. 注意到

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} = \frac{(n+1)^p}{n^p} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p = 1 + \frac{p}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \text{当 } n \to \infty,$$

而 $p > \mu$, 所以存在正整数 N 使当 $n \geqslant N$ 时,

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} > \frac{u_n}{u_{n+1}}, \qquad \text{即} \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

因此应用定理 10.2.4 即知级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散. 证毕.

在上述判别法中, 如果不仅 $\lambda = 1$, 而且 $\mu = 1$, 则需要对式 (10.2.6) 中的右端第三项 $o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 有更精细的信息, 然后在此基础上更加仔细分析, 才能确定级数的敛散性. 关于这些讨论留给读者自己完成.

例 5 设 $a > 0$. 讨论级数 $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n!a^n}{n^n}$ 的敛散性.

解 令 $u_n = \dfrac{n!a^n}{n^n}$, 则

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!a^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \Big/ \frac{n!a^n}{n^n} = a\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \to \frac{a}{\mathrm{e}} \qquad 当\ n \to \infty.$$

所以由达朗贝尔判别法知当 $a < \mathrm{e}$ 时级数收敛, 当 $a > \mathrm{e}$ 时级数发散. 当 $a = \mathrm{e}$ 时达朗贝尔判别法失效, 这时换用高斯判别法. 有

$$\begin{aligned}\frac{u_n}{u_{n+1}} &= \frac{1}{\mathrm{e}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln(1+\frac{1}{n})-1} = \mathrm{e}^{n[\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+O(\frac{1}{n^3})]-1} \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2n}+O(\frac{1}{n^2})} = 1 - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \qquad 当\quad n \to \infty.\end{aligned}$$

由于 $\lambda = 1$, $\mu = -\dfrac{1}{2} < 1$ 时, 所以由高斯判别法知级数发散.

10.2.4 积分判别法

如果级数的通项是单调递减的, 则它的敛散性问题可以化归为无穷积分的敛散性问题. 这就是下述由柯西和麦克劳林各自独立地发现的判别法.

定理 10.2.8 (积分判别法) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数, 其通项 $u_n = f(n)$, $n = 1, 2, \cdots$, 其中 f 是定义在区间 $[1, \infty)$ 上的单调递减函数. 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充要条件是无穷积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

证明 显然 $f(x) \geqslant 0$, $\forall x \geqslant 1$, 所以 $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$ 是区间 $[1, \infty)$ 上的单调递增函数. 因此无穷积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 或者收敛, 或者发散到无穷大. 而由 f 是单调递减函数和 $u_n = f(n)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 可知

$$u_{n+1} = f(n+1) \leqslant f(x) \leqslant f(n) = u_n, \quad \forall x \in [n, n+1]$$

$(n = 1, 2, \cdots)$. 所以

$$u_{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x \leqslant u_n, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

进而

$$\sum_{n=2}^{\infty} u_n \leqslant \int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} u_n. \tag{10.2.7}$$

从这个不等式即知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n < \infty$ 的充要条件是 $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x < \infty$. 这就证明了定理的结论.

积分判别法有一个简单的几何解释. 如图 10-2-1 所示, 积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 表示曲线 $y=f(x)$ 下方位于直线 $x=1$ 右侧的底边无限长曲边三角形的面积. 从图 10-2-1 可以看出, 这个面积夹在两个阶梯形图形的面积之间, 即不等式 (10.2.7) 成立. 定理 10.2.8 的意思是这个面积有限当且仅当两个阶梯形图形的面积有限.

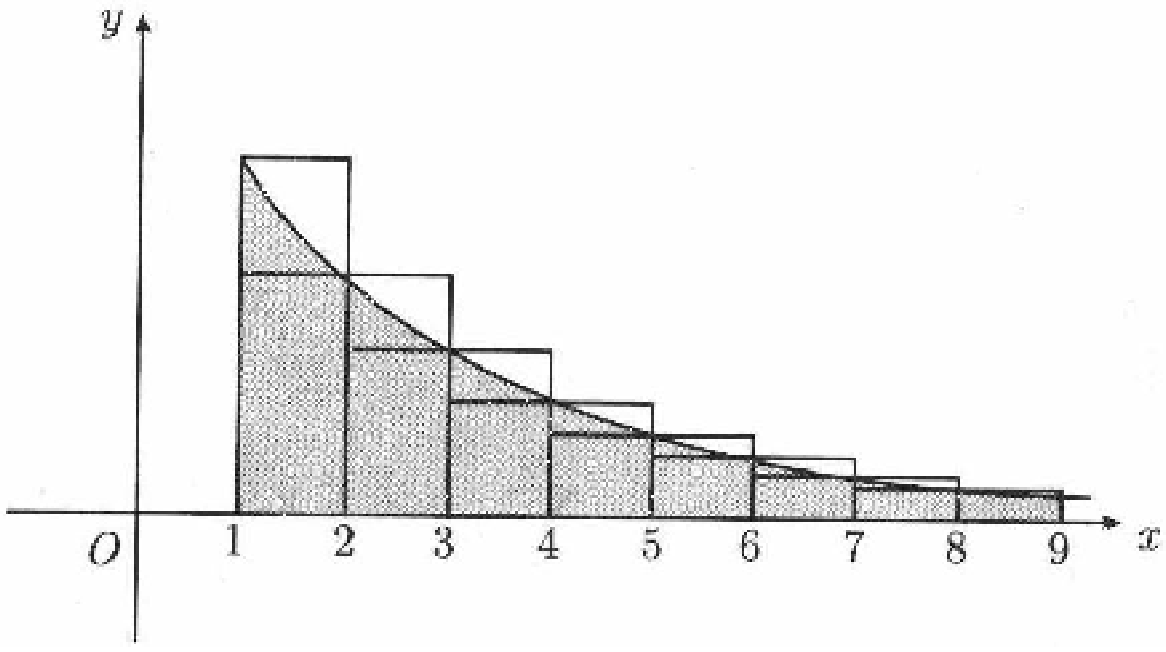


图 10-2-1 积分判别法的几何解释

应用积分判别法可以给出 p 级数敛散性的简单证明. 这时 $f(x)=\dfrac{1}{x^p}$. 由于从第 9 章引理 9.1.1 已经知道积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 收敛当且仅当 $p>1$, 所以应用积分判别法即知 p 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛当且仅当 $p>1$.

例 6 证明级数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^q}$ 当 $q>1$ 时收敛, 当 $q\leqslant 1$ 时发散.

证明 令$f(x)=\dfrac{1}{x(\ln x)^q}$, $\forall x\geqslant 2$. 则 f 是区间 $[a,\infty)$ 上的单调递减函数, 其中 $a=\max\{2,\mathrm{e}^{-q}\}$, 且$\dfrac{1}{n(\ln n)^q}=f(n)$, $n=2,3,\cdots$. 根据引理 9.1.1 知, 当 $q>1$ 时无穷积分 $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^q}\mathrm{d}x$ 收敛, 而当 $q\leqslant 1$ 时它发散, 所以级数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^q}$ 当 $q>1$ 时收敛, 当 $q\leqslant 1$ 时发散. 证毕.

习 题 10.2

1. 运用比较判别法判断下列级数的敛散性:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$; (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n-1}\ (a>1)$; (4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1\right)$; (6) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^p-1\right]\ (p>0)$;

(7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[\ln(\sqrt[n]{n}+1)]^n}$; (8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[\ln(\sqrt[n]{n}+2)]^n}$;

(9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$; (10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$;

(11) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{2\pi}{3^n}$; (12) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \tan\frac{\pi}{2^{n+1}}$;

(13) $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin\frac{2}{n\sqrt{n+1}}$; (14) $\sum_{n=2}^{\infty} \arctan\frac{\sqrt{n+1}-1}{\sqrt{n(n+1)}}$;

(15) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$; (16) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}}{n}$;

(17) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\ (p>0)$; (18) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan a^n}{n^p}\ (a>0, p>0)$.

2. 设 $p>0$. 用泰勒公式估计通项趋于零的阶以判断下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[6]{n^3+3n^2+n}-\sqrt[4]{n^2+2n-1})^p$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^p\ln\frac{n+1}{n+2}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^p \sec\frac{1}{n}$; (4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{n^p}}}{n^p}$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}(\cot\frac{n\pi}{4n-2}-\sin\frac{n\pi}{2n+1})^p$; (6) $\sum_{n=1}^{\infty}(n^{\frac{1}{n^2+1}}-1)^p$;

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{1}{n^p}\right)^n$; (8) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^p}$;

(9) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^p\left(\cosh\frac{1}{n}\sec\frac{1}{n}\right)$; (10) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ln\frac{1}{n^p}-\ln\sin\frac{1}{n^p}\right)$;

(11) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{p\ln n}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}$; (12) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos^n\frac{1}{n}\right)^p$.

3. 运用达朗贝尔检比或柯西检根法判断下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} a^n n^2\ (a>0)$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{\sqrt{n}}\ (a>0)$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$; (4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!2^n}{n^n}$;　　(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!3^n}{n^n}$;

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n!a^n}{n^n}\right)^p \ (p>0)$;　　(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{1+a^n} \ (a>0)$;

(9) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^n$;　　(10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^{\frac{n+1}{2}}}{(2n+1)^n}$;

(11) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{3n+1}}{3n^3} \ (a>0)$;　　(12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n^2-n)^{\frac{n+1}{2}}}{(3n^3+2n)^{\frac{n}{3}}}$.

4. 运用高斯检比法判断下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{2n+1}$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p \ (p>0)$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^n}{n!e^n}\right)^p \ (p>0)$;　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!e^n}{n^{n+p}} \ (p>0)$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\left(1-\frac{a\ln n}{n}\right)^n \ (a>0,\ p>0)$;

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}{(1+b)(1+b^2)\cdots(1+b^n)} \ (a>0,\ b>0)$;

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!n^{-p}}{q(q+1)\cdots(q+n)} \ (p>0,\ q>0)$;

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q(q+1)\cdots(q+n-1)}{n!n^p} \ (p>0,\ q>0)$;

(9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+c)(a+2c)\cdots(a+nc)}{b(b+c)(b+2c)\cdots(b+nc)} \ (a>0,\ b>0,\ c>0)$.

5. 设 $p>0,\ q>0$. 用柯西积分判别法判断下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p(\ln n)^q}$;　　(2) $\sum_{n=9}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^p}$;

(3) $\sum_{n=9}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}$;　　(4) $\sum_{n=3^9}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^p(\ln\ln\ln n)^q}$.

6. 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个单调递增的有界正数列. 证明:

(1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ 收敛;

(2) 对任意 $\mu,\nu\in\mathbf{R}$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}^{\mu}a_n^{\nu}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$ 收敛.

7. 已知正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛. 证明:

(1) 对任意正整数 m, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[m]{u_n u_{n+1} \cdots u_{n+m-1}}$ 收敛;

(2) 对任意 $p>1$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^p$ 收敛;

(3) 对任意满足 $\mu+\nu \geqslant 1$ 的 $\mu>0$ 和 $\nu>0$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n^\mu}{n^\nu}$ 收敛.

8. 已知两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛. 证明:

(1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{u_n v_n}$ 收敛;

(2) 对任意 $p>1$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{u_n^2+v_n^2}$ 收敛;

(3) 对任意满足 $\mu+\nu \geqslant 1$ 的 $\mu>0$ 和 $\nu>0$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^\mu v_n^\nu$ 收敛.

9. (1) 设两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛, 问级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \min\{u_n, v_n\}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \max\{u_n, v_n\}$ 敛散性如何?

(2) 设两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都发散, 问级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \min\{u_n, v_n\}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \max\{u_n, v_n\}$ 敛散性如何?

10. 已知 $\lim_{n\to\infty} u_n = l$. 证明: 当 $l>1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{u_n}}$ 收敛, 当 $l<1$ 时该级数发散. 问当 $l=1$ 时能否判定该级数的敛散性? 请举例说明.

11. (1) 任意取定 $0<x_1<1$, 然后递推地定义 $x_{n+1}=x_n(1-x_n)$, $n=1,2,\cdots$. 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^p$ 当 $p>1$ 时收敛, 当 $p\leqslant 1$ 时发散;

(2) 任意取定 $0<x_1<\pi$, 然后递推地定义 $x_{n+1}=\sin x_n$, $n=1,2,\cdots$. 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^p$ 当 $p>2$ 时收敛, 当 $p\leqslant 2$ 时发散.

12. (1) 证明: 如果通项单调递减的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\lim_{n\to\infty} n u_n = 0$;

(2) 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的通项如下:

$$u_n = \frac{1}{2^n} \quad 当\ n\ 不是\ 2\ 的整幂, \qquad u_n = \frac{1}{n} \quad 当\ n\ 是\ 2\ 的整幂.$$

证明该级数收敛, 但 $\lim_{n\to\infty} nu_n \neq 0$, 更确切地说有子列使 $\lim_{k\to\infty} n_k u_{n_k} = 1$;

(3) 举例说明, 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在收敛的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 其通项有子列满足 $\lim_{k\to\infty} n_k^{\varepsilon} u_{n_k} = 1$.

13. (1) 设 $f(x)$ 是定义在 $[1, +\infty)$ 上恒取正值的单调递减函数, 证明: 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛, 则其余项 $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k)$ 有以下估计:

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x < R_n < f(n+1) + \int_{n+1}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x;$$

(2) 设 $p > 1$. 则 p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 的余项 $R_n(p) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ 有以下估计:

$$\frac{1}{(p-1)(n+1)^{p-1}} < R_n(p) < \frac{n+p}{(p-1)(n+1)^p};$$

(3) 设 $p > 0$. 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n^p}$ 的余项 $\bar{R}_n(p) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin \frac{1}{k^p}$ 有以下估计:

$$\frac{1}{p(n+1)^p} - \frac{n+3p+1}{18p(n+1)^{3p}} < \bar{R}_n(p) < \frac{n+p+1}{p(n+1)^{p+1}}.$$

14. 设 $f(x)$ 是定义在 $[1, +\infty)$ 上恒取正值的单调递减函数, 且

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x f(\mathrm{e}^x)}{f(x)} = \lambda.$$

证明: 当 $\lambda < 1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 当 $\lambda > 1$ 时该级数发散.

15. 设 $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots$. 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$ 有相同的敛散性.

10.3 任意项级数

10.2 节研究了正项级数, 即各项都是非负实数的级数. 本节研究任意项的级数. 对于任意项的级数, 由于没有单调有界原理可用, 所以当部分和数列的极限不好直接计算时, 就只有应用柯西收敛准则来确定其敛散性了. 回忆数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛的柯西

准则是：对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 都存在相应的正整数 N, 使对所有 $m, n > N$ 的项都成立

$$|x_m - x_n| < \varepsilon.$$

由于对于无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 而言，其部分和数列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的两个项 S_m 与 S_n(不妨设 $m > n$) 的差为

$$S_m - S_n = \sum_{k=n+1}^{m} u_m = \sum_{k=1}^{p} u_{n+k},$$

其中 $p = m - n$. 所以把数列收敛的柯西准则应用于无穷级数就得到

定理 10.3.1(级数收敛的柯西准则)　级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充要条件是对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 都存在相应的正整数 N, 使对任意满足 $n > N$ 的正整数 n 和任意正整数 p 都成立

$$\left|\sum_{k=1}^{p} u_{n+k}\right| < \varepsilon.$$

定理 10.3.1 的一个简单但却十分有用的推论是

定理 10.3.2　如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛.

因此，类似于无穷积分的情形引进下列概念.

定义 10.3.1　如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$**绝对收敛**；如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **条件收敛**.

把定理 10.3.2 和 10.2 节介绍的关于正项级数敛散性的判别法结合起来使用，就可以在许多情况下解决任意项级数的收敛性问题. 这样得到的级数的收敛是绝对收敛. 如果一个级数仅条件收敛而不绝对收敛，那么这种方法便失效. 下面从柯西收敛准则出发，导出一些新的判别法. 这些判别法都充分考虑了级数的项变号因而能够正负相消，以致在一定的条件下级数的部分和 S_n 当 n 充分大时变化不会很大的特性. 因此，这些判别法常用来证明一些仅条件收敛而不绝对收敛的级数的收敛性.

首先看一种特殊情况：级数的项正负相间. 这样的级数称为**交错级数**.

定理 10.3.3(莱布尼茨判别法)　如果交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ $(u_n > 0,\ n = 1, 2, \cdots)$ 中的数列 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调递减趋于零，则这个级数收敛.

证明　对任意正整数 n 和 p, 应用数列 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的单调递减性有

$$\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k-1}u_{n+k}=\begin{cases}(u_{n+1}-u_{n+2})+\cdots+(u_{n+p-2}-u_{n+p-1})+u_{n+p}, & \text{当 } p \text{ 是奇数}\\(u_{n+1}-u_{n+2})+\cdots+(u_{n+p-1}-u_{n+p}), & \text{当 } p \text{ 是偶数}\end{cases}$$
$$\geqslant 0.$$

因此

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{k=1}^{p}(-1)^{n+k-1}u_{n+k}\right|\\=&\left|\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k-1}u_{n+k}\right|=\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k-1}u_{n+k}\\=&\begin{cases}u_{n+1}-(u_{n+2}-u_{n+3})-\cdots-(u_{n+p-1}-u_{n+p}), & \text{当 } p \text{ 是奇数}\\u_{n+1}-(u_{n+2}-u_{n+3})-\cdots-(u_{n+p-2}-u_{n+p-1})-u_{n+p}, & \text{当 } p \text{ 是偶数}\end{cases}\\\leqslant& u_{n+1}.\end{aligned}$$

又由于 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$, 所以对任意给定的 $\varepsilon>0$, 都存在相应的正整数 N, 使当 $n>N$ 时, $u_{n+1}<\varepsilon$, 从而由上面的不等式可知任意满足 $n>N$ 的正整数 n 和任意正整数 p 都成立

$$\left|\sum_{k=1}^{p}(-1)^{n+k}u_{n+k}\right|<\varepsilon.$$

因此由柯西收敛准则知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 收敛. 证毕.

例 1 根据莱布尼茨判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ 收敛. 由于这个级数通项取绝对值所得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散, 所以这个级数条件收敛. 下面来求它的和.

记 $A_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$. 断言: 数列 $A_n-\ln n$ $(n=1,2,\cdots)$ 单调递减有下界, 从而有极限. 事实上, 由第 10.2 节例 1 成立不等式

$$\frac{1}{n+1}<\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}.$$

由此可知 $A_n-\ln n>\ln(n+1)-\ln n>0$, $n=1,2,\cdots$, 并且

$$(A_{n+1}-\ln(n+1))-(A_n-\ln n)=\frac{1}{n+1}-(\ln(n+1)-\ln n)<0,\quad n=1,2,\cdots,$$

表明断言成立. 因此, 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(A_n-\ln n)$ 存在, 记作 c. 则得

$$A_n=\ln n+c+\varepsilon_n,\quad n=1,2,\cdots,\tag{10.3.1}$$

其中 $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$.

用 S_n 表示级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 的前 n 项的和. 则有

$$\begin{aligned}S_{2n}=&1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\\=&1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\\&-2\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\Big)\\=&A_{2n}-A_n=[\ln(2n)+c+\varepsilon_{2n}]-(\ln n+c+\varepsilon_n)\\=&\ln 2+(\varepsilon_{2n}-\varepsilon_n).\end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=\ln 2$. 由于 S_n 收敛, 可知 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\ln 2$, 即

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\cdots=\ln 2. \tag{10.3.2}$$

等式 (10.3.1) 中的常数 c 叫**欧拉常数**. 数值计算表明 $c=0.57721566490\cdots$.

如果把交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 中的数列 $(-1)^{n-1}$ 换为任意使级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 的部分和有界的数列 v_n, 而不改变数列 u_n 所满足的条件, 则仍然可得一个收敛的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_nv_n$. 这就是下面的**狄利克雷判别法**:

定理 10.3.4(狄利克雷判别法) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 的部分和有界, 并且数列 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调且趋于零, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_nv_n$ 收敛.

把以上关于级数的狄利克雷判别法与无穷积分的狄利克雷判别法相比较, 可见它们是平行的. 与此类似, 相应于无穷积分的阿贝尔判别法, 也有关于级数的**阿贝尔判别法**①.

定理 10.3.5(阿贝尔判别法) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛, 并且数列 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调且有界, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_nv_n$ 收敛.

定理 10.3.4 和定理 10.3.5 的证明类似, 所以放在一起证明. 证明的关键是对级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_nv_n$ 的部分和采用**阿贝尔变换**作适当的变换.

① 历史上, 先有无穷级数理论, 后有广义积分理论. 所以关于广义积分的狄利克雷判别法和阿贝尔判别法是无穷级数的相应判别法的推广.

引理 10.3.1(阿贝尔变换)　设 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 和 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 是两组数. 记 $B_k=\sum_{j=1}^{k}b_j,\ k=1,2,\cdots,m$. 则成立等式

$$\sum_{k=1}^{m}a_kb_k=a_mB_m+\sum_{k=1}^{m-1}(a_k-a_{k+1})B_k. \tag{10.3.3}$$

证明　记 $B_0=0$. 则 $b_k=B_k-B_{k-1},\ k=1,2,\cdots,m$. 所以

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m}a_kb_k&=\sum_{k=1}^{m}a_k(B_k-B_{k-1})=\sum_{k=1}^{m}a_kB_k-\sum_{k=1}^{m}a_kB_{k-1}\\&=\sum_{k=1}^{m}a_kB_k-\sum_{k=0}^{m-1}a_{k+1}B_k=a_mB_m+\sum_{k=1}^{m-1}(a_k-a_{k+1})B_k.\end{aligned}$$

证毕.

阿贝尔变换与定积分的分部积分公式在原理上是类似的. 对于一个给定的有限数列 $a_1,a_2,\cdots,a_m$, 令 $a_0=0$, 并记 $\Delta a_k=a_k-a_{k-1},\ k=1,2,\cdots,m$. 数列 $\{\Delta a_k\}$ 叫做数列 $\{a_k\}$ 的**一阶差分**, 简称**差分**, 它相当于对自变量 k 取整数值的离散函数 a_k 求"一阶导数"($\Delta a_k=\dfrac{a_k-a_{k-1}}{k-(k-1)}$). 按照这些记号, 等式 (10.3.3) 可改写成

$$\sum_{k=1}^{m}a_k\Delta B_k=a_kB_k\Big|_0^m-\sum_{k=1}^{m-1}\Delta a_{k+1}B_k.$$

等式 (10.3.3) 有一个简单的几何解释. 为简单起见, 只考虑 $a_1>a_2>\cdots>a_m>0$ 且 $b_k>0\ (k=1,2,\cdots,m)$ 的情况. 这时, 等式 (10.3.3) 的左端表示图 10-3-1 中以 $b_k=B_k-B_{k-1}$ 为底、以 a_k 为高的 m 个矩形的面积之和, 因而正好是图中以 Oa_1 为高和 OB_m 为底的阶梯形的面积. 但是这个阶梯形的面积也等于以 B_k 为底、以 a_k-a_{k+1}(规定 $a_{m+1}=0$) 为高的 m 个矩形的面积之和, 后者正是式 (10.3.3) 的右端.

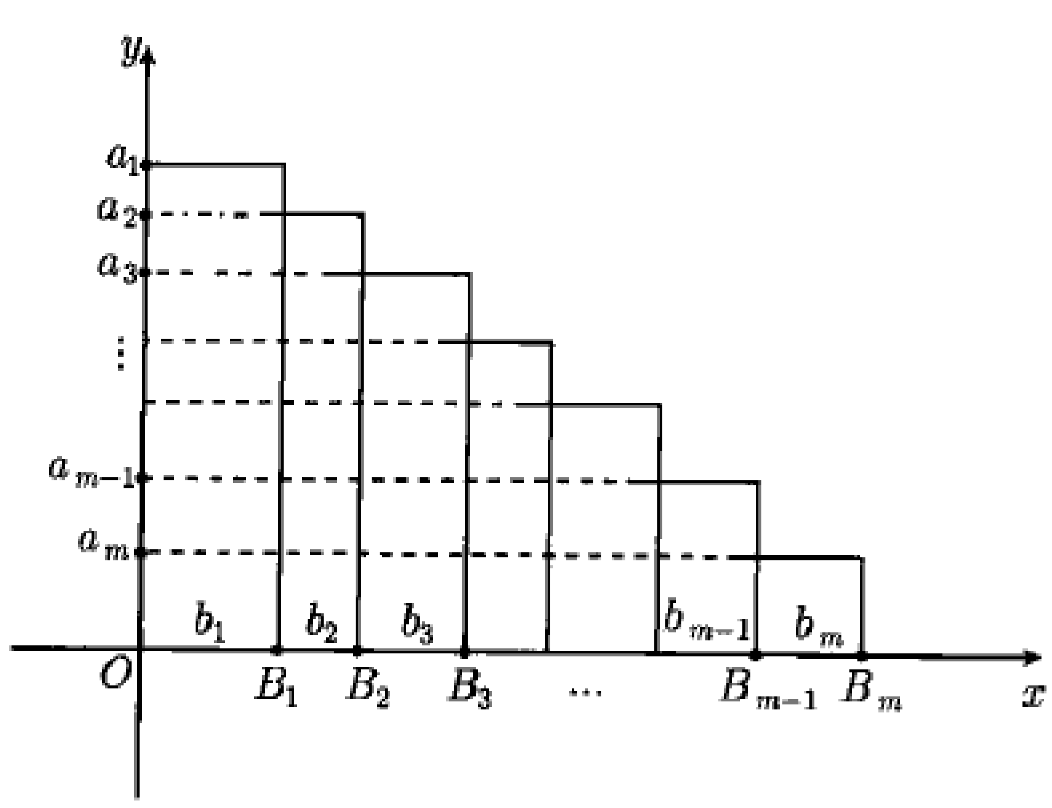


图 10-3-1　阿贝尔变换的几何解释

狄利克雷判别法和阿贝尔判别法的证明： 不妨设数列 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调递减. 这是因为, 如果 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调递增, 则对级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 的各项都乘以 -1, 就化成 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调递减的情况. 另外, 在阿贝尔判别法的情形, 还可假设 u_n 非负, 因为否则取实数 c 使 $u_n \geqslant c$, $n=1,2,\cdots$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n = \sum_{n=1}^{\infty}(u_n - c)v_n + \sum_{n=1}^{\infty} cv_n.$$

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} cv_n$ 是收敛的, 所以从上式知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 收敛当且仅当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n - c)v_n$ 收敛, 因此便化为 u_n 非负的情况. 在狄利克雷判别法的情形, 由 u_n 单调递减且趋于零可知条件 u_n 非负自然满足.

根据柯西准则只需证明: 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在相应的正整数 N, 使对任意满足 $n > N$ 的正整数 n 和任意正整数 p 都成立

$$\left|\sum_{k=1}^{p} u_{n+k} v_{n+k}\right| < \varepsilon.$$

用 S_n 表示级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 的部分和, 并记

$$B_{nk} = \sum_{j=1}^{k} v_{n+j} = S_{n+k} - S_n, \qquad k = 1,2,\cdots.$$

则由阿贝尔变换可知, 对任意正整数 n 和 p 有

$$\sum_{k=1}^{p} u_{n+k} v_{n+k} = u_{n+p} B_{np} + \sum_{k=1}^{p-1}(u_{n+k} - u_{n+k+1}) B_{nk}.$$

因此

$$\left|\sum_{k=1}^{p} u_{n+k} v_{n+k}\right| \leqslant u_{n+p}|B_{np}| + \sum_{k=1}^{p-1}(u_{n+k} - u_{n+k+1})|B_{nk}|. \tag{10.3.4}$$

在狄利克雷判别法的情形, 由假设知 S_n 有界, 设 $|S_n| \leqslant M$, $n = 1,2,\cdots$. 则有 $|B_{nk}| \leqslant 2M$, $n,k = 1,2,\cdots$. 于是由式 (10.3.4) 得

$$\left|\sum_{k=1}^{p} u_{n+k} v_{n+k}\right| \leqslant 2M\Big(u_{n+p} + \sum_{k=1}^{p-1}(u_{n+k} - u_{n+k+1})\Big) = 2M u_{n+1}.$$

再由数列 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 趋于零, 推知对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在相应的正整数 N, 使当 $n > N$ 时

$$u_n < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

因此对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 当 $n > N$ 时, 对任意正整数 p 都有

$$\left|\sum_{k=1}^{p} u_{n+k}v_{n+k}\right| < 2M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

根据柯西准则即知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 收敛. 在阿贝尔判别法的情形, 由数列 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有界, 设 $u_n \leqslant M$, $n = 1, 2, \cdots$. 又由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 应用柯西准则知对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在相应的正整数 N, 使对任意满足 $n > N$ 的正整数 n 和任意正整数 k 都成立

$$\left|\sum_{j=1}^{k} v_{n+j}\right| < \frac{\varepsilon}{M},$$

因此当 $n > N$ 时, 对任意正整数 k 都有 $|B_{nk}| < \dfrac{\varepsilon}{M}$. 于是由式 (10.3.4) 知对任意 $n > N$ 和任意正整数 p 都成立

$$\left|\sum_{k=1}^{p} u_{n+k}v_{n+k}\right| < \frac{\varepsilon}{M}\left(u_{n+p} + \sum_{k=1}^{p-1}(u_{n+k} - u_{n+k+1})\right) = \frac{\varepsilon}{M}u_{n+1} \leqslant \frac{\varepsilon}{M}M = \varepsilon.$$

根据柯西准则仍然得到级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 收敛. 证毕.

如果不采用阿贝尔变换, 则很难证明以上两个判别法. 一个简单的技巧 —— 把求一系列竖着放的矩形面积之和的问题, 转化为求一系列横着放的矩形的面积之和, 却发挥了巨大的威力. 19 世纪末、20 世纪初的法国数学家勒贝格 (Henri Lebesque, 1875~1941), 正是采用类似的思想, 把黎曼积分理论发展成为勒贝格积分理论, 使得分析数学领域许多原来人们束手无策的问题得到了解决 (关于勒贝格积分, 将在后续课程 “实变函数” 中学习).

例 2 设 $p > 0$, x 是不等于 $2m\pi$(m 表示整数) 的实数. 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n^p}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n^p}$ 的敛散性.

解 先考虑第一个级数. 令 $u_n = \dfrac{1}{n^p}$, $v_n = \sin nx$, $n = 1, 2, \cdots$, 则数列 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调递减且趋于零. 所以根据狄利克雷判别法, 只需再证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 的部分和有界, 便可推知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n^p}$ 收敛. 根据三角函数的积化和差公式, 有

$$\sin kx \sin\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\left[\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x-\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right],$$

进而

$$\sum_{k=1}^{n}\sin kx\sin\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\left[\cos\frac{1}{2}x-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right].$$

因此对任意 $x\neq 2m\pi$ 有

$$\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\frac{\cos\frac{1}{2}x-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}},$$

据此推知

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|\leqslant\left|\sin\frac{x}{2}\right|^{-\frac{1}{2}},\qquad n=1,2,\cdots.$$

这就证明了对任意 $x\neq 2m\pi$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin nx$ 的部分和有界. 因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}$ 对所有实数 x 都收敛 (当 $x=2m\pi$ 时, 该级数的各项都等于零, 自然是收敛的).

类似地, 可以证明下列等式

$$\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\sin\frac{x}{2}-\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\qquad(x\neq 2m\pi).$$

应用这个等式同样可以证明, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos nx$ 的部分和有界. 因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^p}$ 对任意 $x\neq 2m\pi$ 都收敛.

此外, 由不等式 $\left|\frac{\sin nx}{n^p}\right|\leqslant\frac{1}{n^p}$ 和 $\left|\frac{\cos nx}{n^p}\right|\leqslant\frac{1}{n^p}$ 可知, 当 $p>1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^p}$ 对所有实数 x 都是绝对收敛的. 当 $0<p\leqslant 1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}$ 对任意 $x\neq m\pi$ 只是条件收敛而不绝对收敛. 这是因为

$$\left|\frac{\sin nx}{n^p}\right|\geqslant\frac{\sin^2 nx}{n^p}=\frac{1}{2n^p}-\frac{\cos nx}{2n^p}.$$

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{2n^p}$ 收敛而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^p}$ 发散, 所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 nx}{n^p}$ 发散. 因此由上面的不等式知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin nx}{n^p}\right|$ 发散. 类似地, 当 $0<p\leqslant 1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^p}$ 对任意

$x \neq 2m\pi$ 只是条件收敛而不绝对收敛的.

例 3 例 2 可推广如下: 设数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调递减且趋于零. 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ 对所有实数 x 都收敛, 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ 对所有不等于 $2m\pi$ 的实数 x 都收敛.

证明与例 2 完全类似, 故从略.

习 题 10.3

1. 运用莱布尼茨判别法判断下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} n}{\sqrt{n^2+1}}$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}+10}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p} \sin \dfrac{n\pi}{2}$ $(p>0)$;

(4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\ln^3(n+2)}{n+1} \cos \dfrac{n\pi}{2}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt{n}+(-1)^{n-1}}$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}+(-1)^{n-1}}$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}+(-1)^{n-1}}$ $(\alpha>0)$;

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}\sqrt[n]{n}}$ $(\alpha>0)$;

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} a^n}{1+a^n}$ $(a>0)$;

(10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p$ $(p>0)$;

(11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}$;

(12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.

2. 运用狄利克雷判别法或阿贝尔判别法判断下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{[\frac{n}{4}]}}{n^{\alpha}}$ $(\alpha>0)$;

(2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \sin \dfrac{\pi}{n} \cos n$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \tan\left(\dfrac{(-1)^{n-1}\pi}{3\sqrt{n}}\right) \sin 2n$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{n^{\alpha}}\right) \cos \dfrac{n\pi}{3}$ $(\alpha>0)$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{\cos^2 n}{n^{\alpha}}$ $(\alpha>0)$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin^3 2n}{\sqrt{n^{\alpha}+1}}$ $(\alpha>0)$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[n]{n}} \sin \dfrac{1}{n^{\alpha}}$ $(\alpha>0)$;

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}\sqrt[n]{3n}}$ $(\alpha>0)$;

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} \left(\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}\right) \sin \dfrac{n\pi}{4}$;

(10) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{\ln n} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$;

(11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n \sin n^2}{n^{\alpha}}$ $(\alpha>0)$;

(12) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)}{\ln^{\alpha} n}$ $(\alpha>0)$.

3. 借助泰勒展开讨论下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}\right)\ (\alpha>0)$;　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha+\frac{1}{n}}\ (\alpha>0)$;

(3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p}\ (p>0)$;　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{[\sqrt{n}+(-1)^{n-1}]^p}\ (p>0)$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p+\sin\frac{n\pi}{4}}\ (p>0)$;　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right)^n\ (p>0)$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \ln\left(1+\frac{\sin n}{n^p}\right)\ (p>0)$;　(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n^2-1}{n^2+1}} \arctan\left(\frac{\cos n}{n^p}\right)\ (p>0)$.

4. 设 a,b 是两个正数. 证明数列

$$x_n=\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+2b}+\cdots+\frac{1}{a+nb}-\frac{1}{b}\ln(a+nb),\qquad n=1,2,\cdots$$

有极限, 并利用这个结果研究下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+3(-1)^{n-1}}$;　(2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3[\frac{n}{2}]+(-1)^{n-1}}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\frac{n}{2}]}}{n}$;　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\frac{n}{3}]}}{2n+1}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$;　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt[3]{n}]}}{2n+1}$.

5. 设 $a>0,\ b>0,\ 0<\alpha<1$. 证明数列

$$x_n=\frac{1}{(a+b)^\alpha}+\frac{1}{(a+2b)^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(a+nb)^\alpha}-\frac{(a+nb)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)b},\qquad n=1,2,\cdots$$

有极限, 并利用这个结果研究下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{[n+(-1)^{n-1}]^\alpha}$;　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{[2n+(-1)^{n-1}]^\alpha}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\frac{n}{2}]}}{n^\alpha}$;　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\frac{n}{3}]}}{[2n+(-1)^{[\frac{n}{3}]}]^\alpha}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^\alpha}$;　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt[3]{n}]}}{(2n-1)^\alpha}$.

6. 讨论下列级数的绝对收敛性和条件收敛性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 3^n x}{2^n}$;　(2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^p}\ (p>0)$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{x^n}{n^p}\right)\ (p>0)$;　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p+\frac{1}{n}}\ (p>0)$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^p} \sin\left(\frac{x}{3}\right)^n \quad (p>0)$;　(6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)^n}{n!}$.

7. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛, 而 $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$, $n=1,2,\cdots$. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ 也收敛.

8. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足下列条件: (1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛; (2) $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. 证明该级数收敛.

9. 设交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ (其中 $u_n>0$, $n=1,2,\cdots$) 条件收敛而不绝对收敛. 令 $S_{2n-1}=\sum_{k=1}^{n} u_{2k-1}$, $S_{2n}=\sum_{k=1}^{n} u_{2k}$, $n=1,2,\cdots$. 证明: $\lim_{n\to\infty}\frac{S_{2n-1}}{S_{2n}}=1$.

10. 判断下列命题的正误. 如果正确则给出证明; 错误则举出反例:

(1) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 且 $\lim_{n\to\infty} v_n = 1$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 也收敛;

(2) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛, 且 $\lim_{n\to\infty} v_n = 1$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 也绝对收敛;

(3) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 也收敛;

(4) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 且 $u_n \geqslant 0$ $(n=1,2,\cdots)$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 也收敛;

(5) 如果 $u_n \geqslant 0$ $(n=1,2,\cdots)$, 且 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛;

(6) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 而 $u_n \sim v_n$ (当 $n\to\infty$), 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也收敛.

11. (1) 问能否由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛推出级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛? 请举例说明;

(2) 问能否由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛推出级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^3$ 收敛? 请举例说明;

(3) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^3$ 绝对收敛.

12. 对数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, 如果存在常数 $M>0$ 使成立 $\sum_{k=2}^{n}|x_k-x_{k-1}| \leqslant M$, $n=2,3,\cdots$, 则称 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为具有有限变差的数列, 简称有限变差数列. 证明以下命题:

(1) 设 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是具有有限变差且收敛于零的数列, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 的部分和有界, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 收敛;

(2) 设 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是具有有限变差的数列, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 收敛;

(3) 设 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是具有有限变差且收敛于零的数列, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} u_n$ 收敛.

本题说明, 狄利克雷判别法 (定理 10.3.3)、阿贝尔判别法 (定理 10.3.4) 和莱布尼茨判别法 (定理 10.3.1) 中 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是单调数列的条件都可以减弱为 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是有限变差数列.

10.4 级数的代数运算

有限个实数相加, 具有以下基本的规律.

(1) 交换律: 有限个实数相加, 可以任意排列它们的前后次序, 相加的结果都是相同的, 如

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n &= a_2 + a_1 + a_3 + \cdots + a_n \\ &= a_3 + a_2 + a_1 + \cdots + a_n. \end{aligned}$$

(2) 结合律: 有限个实数相加, 可以任意把它们中间某些项先行相加, 然后再与其他项相加, 所得结果都是相同的, 如

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n &= (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4 + a_5) + \cdots + a_n \\ &= (a_1 + a_2 + a_3) + (a_4 + \cdots + a_n), \end{aligned}$$

即可以在和式中任意添加括号.

(3) 分配律: 两组有限个实数各自相加之后再相乘, 与先把这两组数逐个相乘之后再相加的结果是相同的, 即

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_m)(b_1 + b_n + \cdots + b_n) = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} a_i b_j.$$

那么无穷级数作为无穷多个数相加的和, 其运算过程是否也满足类似的规律呢? 无穷级数作为无穷和, 与有限和的主要区别在于它包含了极限运算

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

所以有限个实数相加所满足的基本规律并不是都可以无条件地推广到无穷级数的运算. 本节讨论上述三个运算规律在什么条件下对无穷级数也成立.

先来考虑结合律. 前面已经看到, 对于发散级数, 适当添加括号既可以使其成为收敛级数, 而且不同的添加括号的方式还可得到不同的和. 例如, 对级数 $1-1+1-1+\cdots$, 既可以通过添加括号使得

$$(1-1)+(1-1)+\cdots=0,$$

也可以通过添加括号使得

$$1+(-1+1)+(-1+1)+\cdots=1.$$

因此, 对于发散级数不能使用结合律进行运算. 但若已经知道了一个无穷级数是收敛的, 则可以通过任意添加括号来求其和, 即成立以下定理.

定理 10.4.1　设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 和为 S. 则对其项不改变次序地任意组合所得到的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n$ 也收敛, 而且和也为 S. 这里

$$U_n=\sum_{k=p_{n-1}+1}^{p_n}u_k=u_{p_{n-1}+1}+u_{p_{n-1}+2}+\cdots+u_{p_n},\qquad n=1,2,\cdots,$$

其中 $p_0=0$, 而 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个严格单增的正整数序列, 即 $0=p_0<p_1<p_2<\cdots$. 换言之, 当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛时, 有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}u_n=&(u_1+u_2+\cdots+u_{p_1})+(u_{p_1+1}+u_{p_1+2}+\cdots+u_{p_2})+\cdots\\&+(u_{p_{n-1}+1}+u_{p_{n-1}+2}+\cdots+u_{p_n})+\cdots.\end{aligned}$$

证明　令 S_n 为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的前 n 项的和

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k,n=1,2,\cdots,$$

再令 T_n 为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n$ 的前 n 项的和

$$T_n=\sum_{k=1}^{n}U_k,n=1,2,\cdots.$$

则由定义可知

$$T_n=S_{p_n},\qquad n=1,2,\cdots,$$

即数列 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的子数列, 因此由 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ 知 $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = S$, 说明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ 收敛, 而且和为 S. 证毕.

定理 10.4.1 表明, 收敛级数可以任意添加括号, 不改变级数的收敛性及其和. 但是必须注意定理 10.4.1 不能倒过来用, 即由添加括号后得到的级数收敛并求出其和, 不能得出结论说原来的级数收敛于所求得的和.

再来考虑交换律. 设映射 $n \mapsto j_n$, $\forall n \in \mathbf{N}$ 是自然数集合 $\mathbf{N}$ 到其自身的一个双射. 这时称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_{j_n}$ 为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的一个**重排**. 注意级数的重排只是对级数的一部分或全部的项交换了它们的前后次序, 而没有改变这些项的数值及符号, 也没有增添新的项或减少某些项. 下面的定理 10.4.2 和定理 10.4.3 告诉我们, 对于绝对收敛的级数 (特别是对收敛的正项级数), 可以任意地进行重排, 而不改变级数的收敛性及其和; 但对于条件收敛而不绝对收敛的级数, 则不能任意地进行重排: 某些重排将改变级数的收敛性, 某些重排将改变级数的和.

定理 10.4.2 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛, 和为 S. 则其任意重排 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_{j_n}$ 也绝对收敛, 而且和也为 S.

证明 先证绝对收敛性. 由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n| < \infty$. 记 $M = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$. 对任意正整数 m, 因为 $|u_{j_1}|, |u_{j_2}|, \cdots, |u_{j_m}|$ 只是数列 $|u_1|, |u_2|, \cdots$ 中的一部分, 所以

$$\sum_{k=1}^{m} |u_{j_k}| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = M, \qquad m = 1, 2, \cdots.$$

这说明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_{j_n}|$ 的部分和数列有界, 因而有极限. 所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_{j_n}|$ 收敛, 即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_{j_n}$ 绝对收敛.

再证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_{j_n}$ 的和等于 S. 因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛, 所以对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在相应的正整数 N, 使

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |u_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S$, 所以

$$\left|\sum_{k=1}^{N} u_k - S\right| = \left|\sum_{k=N+1}^{\infty} u_k\right| \leqslant \sum_{k=N+1}^{\infty} |u_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

令 $m = \max\{i : 1 \leqslant j_i \leqslant N\}$. 则当 $n > m$ 时, 和式 $\sum\limits_{k=1}^{n} u_{j_k}$ 中包含了所有 $u_1, u_2, \cdots, u_N$ 作为其被加项. 当然可能还包含其他一些项, 不过那些项的足标 j_k 都大于 N, 记它们的和为 A_n. 则

$$\sum_{k=1}^{n} u_{j_k} = \sum_{k=1}^{N} u_k + A_n.$$

而由 A_n 中的被加项的足标都大于 N 知

$$|A_n| \leqslant \sum_{k=N+1}^{\infty} |u_k| < \frac{\varepsilon}{2},$$

所以

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u_{j_k} - S\right| = \left|\left(\sum_{k=1}^{N} u_k + A_n\right) - S\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{N} u_k - S\right| + |A_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_{j_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} u_{j_k} = S$. 证毕.

定理 10.4.3(黎曼重排定理) 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛而不绝对收敛. 则有下列结论:

(1) 适当重排, 可使新级数发散到 $+\infty$, 也可使新级数发散到 $-\infty$;

(2) 对任意给定的实数 S, 存在 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的重排, 使其收敛且和为 S.

证明 我们分三步来证明这个定理.

第一步对每个自然数 n, 记

$$u_n^+ = \max\{u_n, 0\}, \qquad u_n^- = \min\{u_n, 0\}.$$

即当 $u_n > 0$ 时记 u_n 为 u_n^+, 当 $u_n < 0$ 时记 u_n 为 u_n^-, 而如果 $u_n = 0$, 则 u_n 既记为 u_n^+, 也记为 u_n^-. 下证

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+ = +\infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} u_n^- = -\infty. \tag{10.4.1}$$

事实上, 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛而不绝对收敛, 说明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 因而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n + |u_n|)$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n - |u_n|)$ 都发散. 但由

$$u_n = u_n^+ + u_n^-, \qquad |u_n| = u_n^+ - u_n^-$$

可知

$$u_n^+=\frac{1}{2}(u_n+|u_n|),\qquad u_n^-=\frac{1}{2}(u_n-|u_n|).$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^+$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^-$ 都发散. 因 $u_n^+\geqslant 0,\ u_n^-\leqslant 0,\ n=1,2,\cdots$, 故有式 (10.4.1) 成立.

第二步证明对级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 适当重排, 可使新级数发散到 $+\infty$. 为此在 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^+$ 中取足够多的项, 如取 n_1 项, 使其和大于 1, 把这 n_1 项作为新级数的前 n_1 项, 然后取 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^-$ 的第一项作为新级数的第 n_1+1 项, 再在 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^+$ 剩下的项中依顺序取 n_2 项, 使它们与前面已取出的 n_1+1 项相加的和大于 2, 并把它们作为新级数的第 n_1+2 至 n_1+n_2+1 项. 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^+=+\infty$, 这是可以办到的. 然后取 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^-$ 的第二项作为新级数的第 n_1+n_2+2 项, 接着再在 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^+$ 剩下的项中依顺序取 n_3 项, 使它们与前面已取出的 n_1+n_2+2 项相加的和大于 3. 如此一直做下去, 应用数学归纳法, 就得到了对级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的一个重排, 其部分和数列趋于正无穷大.

类似地, 调换 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^+$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^-$ 的位置进行讨论, 便可得到级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的另一个重排, 其部分和数列趋于负无穷大.

第三步证明对任意给定的实数 S, 存在级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的重排, 使其收敛且和为 S.

不妨设 $S>0$. 先依次在 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^+$ 中取 n_1 项, 使其和 T_{n_1} 刚好大于或等于 S. 这里, "刚好" 大于或等于 S 的意思是: 这 n_1 项的和 T_{n_1} 大于或等于 S, 而少取一项即去掉第 n_1 项之后剩下的 n_1-1 项的和则小于 S. 然后在 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^-$ 中取 n_2-n_1 项, 使它们与前面已经取定的 n_1 项的和 T_{n_2} 刚好小于 S. 然后再在 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^+$ 中取 n_3-n_2 项, 使它们与前面已经取定的 n_2 项的和 T_{n_3} 刚好大于或等于 S, 并接着在 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^-$ 中取 n_4-n_3 项, 使它们与前面已经取定的 n_3 项的和 T_{n_4} 刚好小于 S. 如此一直做下去, 应用数学归纳法, 就得到了对级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的一个重排. 用 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ 表示这样重排

后所得到的新级数的部分和数列. 则前面的构造表明, 数列 $\{T_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的子数列, 且当 $n_k \leqslant n < n_{k+1}$ 时, T_n 夹在 T_{n_k} 和 $T_{n_{k+1}}$ 之间. 另外, 前面的构造意味着, S 夹在 T_{n_k} 和 T_{n_k-1} 之间, 因此

$$|T_{n_k} - S| \leqslant |T_{n_k} - T_{n_k-1}| = |u_{j_{n_k}}|, \tag{10.4.2}$$

这里 $u_{j_{n_k}}$ 表示重排后的新级数的第 n_k 项. 由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛知 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, 据此推知 $\lim\limits_{k\to\infty} u_{j_{n_k}} = 0$. 因此由式 (10.4.2) 知 $\lim\limits_{k\to\infty} T_{n_k} = S$, 进而 $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = S$. 证毕.

把定理 10.4.2 和定理 10.4.3 结合起来, 便得到

推论 10.4.1　以下三个条件互相等价:

(1) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛;

(2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的任意重排都收敛;

(3) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的任意重排都收敛, 而且和都相等.

证明　根据定理 10.4.2, 有 (1)⇒(3). 又显然 (3)⇒(2). 而由定理 10.4.3 知, 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 不绝对收敛, 则存在至少它的一个重排是发散的. 因此, 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的所有重排都收敛时, 它必绝对收敛, 即 (2)⇒(1). 这就证明了, (1)⇒(3)⇒(2)⇒(1). 所以这三个条件互相等价. 证毕.

这个推论给出了绝对收敛这一概念的新的解释: 所谓级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$"绝对收敛", 即无论怎样排列它的各项, 所得级数都是收敛的并且都有相同的和, 因此这个级数的收敛是绝对的, 不会因为对它进行了重排而改变其收敛性与和.

再来看分配律, 即考虑两个无穷级数的乘积.

对给定的两个无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$, 先作出它们的各项所有可能的乘积 $u_m v_n$ $(m, n = 1, 2, \cdots)$, 把这些乘积写成下列无穷矩阵:

$$\begin{array}{ccccc}
u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 & u_1v_4 & \cdots \\
u_2v_1 & u_2v_2 & u_2v_3 & u_2v_4 & \cdots \\
u_3v_1 & u_3v_2 & u_3v_3 & u_3v_4 & \cdots \\
u_4v_1 & u_4v_2 & u_4v_3 & u_4v_4 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots
\end{array}$$

这些乘积可以按各种不同的排列顺序求和而得到不同的无穷级数. 最常见的排列方式有两种, 一种是斜对角线顺序:

$$\begin{array}{ccccccccc}
u_1v_1 & & u_1v_2 & & u_1v_3 & & u_1v_4 & & \cdots \\
& \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & & \\
u_2v_1 & & u_2v_2 & & u_2v_3 & & u_2v_4 & & \cdots \\
& \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & & \\
u_3v_1 & & u_3v_2 & & u_3v_3 & & u_3v_4 & & \cdots \\
& \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & & \\
u_4v_1 & & u_4v_2 & & u_4v_3 & & u_4v_4 & & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \cdots
\end{array} \tag{10.4.3}$$

这样得到的是级数 $u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_1 + u_1v_3 + u_2v_2 + u_3v_1 + \cdots$; 另一种是正方形顺序:

$$\begin{array}{ccccc}
u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 & u_1v_4 & \cdots \\
u_2v_1 & u_2v_2 & u_2v_3 & u_2v_4 & \cdots \\
u_3v_1 & u_3v_2 & u_3v_3 & u_3v_4 & \cdots \\
u_4v_1 & u_4v_2 & u_4v_3 & u_4v_4 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots
\end{array}$$

这样得到的是级数 $u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_2 + u_2v_1 + u_1v_3 + u_2v_3 + u_3v_3 + u_3v_2 + u_3v_1 + \cdots$.

一般来说, 不同排列对级数的收敛性及和是有影响的. 但是如果两个级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都绝对收敛, 则不同排列对级数的收敛性及和都没有影响. 这就是下述定理.

定理 10.4.4(柯西乘积定理) 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都绝对收敛, 和分别为 S 和 T. 则它们各项的乘积 u_mv_n $(m, n = 1, 2, \cdots)$ 按任何顺序排列后相加所得到的级数都绝对收敛, 且和为 ST.

证明 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$ 是把所有乘积 u_mv_n $(m, n = 1, 2, \cdots)$ 按某种方式排列所得到的一个级数. 考虑这个级数各项都取绝对值而得到的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |w_n|$, 记其前 k 项的和为 W_k. 则

$$W_k = \sum_{j=1}^{k} |w_j| = \sum_{j=1}^{k} |u_{m_j}v_{n_j}|.$$

令

$$N = \max\{m_1, m_2, \cdots, m_k, n_1, n_2, \cdots, n_k\}.$$

则 W_k 中所有各项 $|u_{m_j}v_{n_j}|$ $(j=1,2,\cdots,k)$ 都包含在 $|u_iv_j|$ $(i,j=1,2,\cdots,N)$ 中,因此

$$W_k=\sum_{j=1}^{k}|u_{m_j}v_{n_j}|\leqslant\sum_{i,j=1}^{N}|u_iv_j|=\Big(\sum_{i=1}^{N}|u_i|\Big)\Big(\sum_{j=1}^{N}|v_j|\Big)\leqslant M_1M_2,$$

其中, $M_1=\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|<+\infty$, $M_2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}|v_n|<+\infty$. 这说明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|w_n|$ 的部分和数列有界, 从而是收敛的. 这就证明了级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}w_n$ 绝对收敛. 根据定理 10.4.2 可知无论怎样排列 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}w_n$ 的项, 所得级数都绝对收敛, 而且和不变.

为了完成定理的证明, 只需再证明, 存在 u_mv_n $(m,n=1,2,\cdots)$ 的一种排列方式, 使按此方式排列后相加所得到的级数的和等于 ST. 为此考虑按正方形顺序排列所得到的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}w_n'$. 显然这个级数的前 k^2 项的和为

$$W_{k^2}'=\sum_{j=1}^{k^2}w_k'=\sum_{i,j=1}^{k}u_iv_j=\Big(\sum_{i=1}^{k}u_i\Big)\Big(\sum_{j=1}^{k}v_j\Big)=S_kT_k,$$

其中 S_k 和 T_k 分别表示级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 的前 k 项的和. 因为 $\lim\limits_{k\to\infty}S_k=S$, $\lim\limits_{k\to\infty}T_k=T$, 所以由上式得 $\lim\limits_{k\to\infty}W_{k^2}'=ST$. 因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}w_n'$ 的和等于 ST. 证毕.

综合本节的讨论可以看出, 对于绝对收敛的级数, 可以像有限和那样进行运算, 即结合律、交换律和分配律都是成立的; 但对于条件收敛而不绝对收敛的级数, 这些规律就不是可以任意地搬来使用了.

最后, 作为级数重排理论的一个应用, 简单地讨论一下二重级数.

形如 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{mn}$ 的级数叫做**二重级数**. 只有当以下两个条件同时满足时, 才称这个二重级数是收敛的:

(1) 对每个自然数 m, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{mn}$ 都收敛;

(2) 级数 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}A_m$ 收敛, 其中 A_m 是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{mn}$ 的和.

这时, 把级数 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}A_m$ 的和叫做二重级数 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{mn}$ 的和, 并也用符号 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{mn}$

表示.

必须注意 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{mn}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty}u_{mn}$ 是两个不同的二重级数, 其中一个收敛不能推出另外一个收敛, 而且即使它们两个都收敛, 和也不一定相等.

把 $\{u_{mn}: m,n=1,2,\cdots\}$ 排成无穷矩阵:

$$\begin{matrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & \cdots \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{matrix} \tag{10.4.4}$$

显然级数 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{mn}$ 是先把每一行依顺序相加然后再把各行的和依顺序相加, 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty}u_{mn}$ 则是先把每一列依顺序相加然后再把各列的和依顺序相加. 我们也可按下述与此完全不同的方式对上述无穷矩阵中的元素进行求和: 先把它们依一定的顺序排成一个数列, 然后对这样得到的数列依顺序求和, 即把二重级数重排成为一个单重级数. 假如把上述无穷矩阵中的元素依任意顺序排列所得到的单重级数都收敛而且和都相等, 则称二重级数 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{mn}$ **绝对收敛**. 这时用符号 $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty}u_{mn}$ 表示这些收敛的单重级数中的任意一个以及它们公共的和.

定理 10.4.5 设二重级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty}u_{mn}$ 绝对收敛. 则有下列结论:

(1) 各项取绝对值所得二重级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty}|u_{mn}|$ 也绝对收敛;

(2) 两个二重级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty}u_{mn}$ 与 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{mn}$ 都收敛, 且成立等式:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}u_{mn}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}u_{mn}=\sum_{m,n=1}^{\infty}u_{mn}. \tag{10.4.5}$$

反过来, 假如 $u_{mn}\geqslant 0, m,n=1,2,\cdots$, 则由两个二重级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty}u_{mn}$ 与 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{mn}$ 中任意一个收敛都可推出它们绝对收敛并成立等式 (10.4.4).

证明 先设二重级数 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{mn}$ 绝对收敛. 如果 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_{mn}|$ 不绝对收敛, 则

因正项级数的敛散性及和不依赖于其项的排列顺序, 所以必有 $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty}|u_{mn}|=+\infty$, 即把无穷矩阵 (10.4.3) 中的数取绝对值后按任意顺序排列成数列所得单重级数都发散到无穷大. 而按假设, 不取绝对值时这样的级数是收敛的, 说明不取绝对值时得到的级数只是条件收敛. 因此根据黎曼重排定理, 存在对无穷矩阵 (10.4.3) 按某种方式的排列, 使得所得级数是发散的, 而且按不同方式进行排列可以得到收敛于不同和的单重级数. 这与 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{mn}$ 绝对收敛的假设相矛盾. 因此结论 (1) 成立.

其次, 记 $M=\sum\limits_{m,n=1}^{\infty}|u_{mn}|$. 则对任意正整数 m,n 都成立

$$\sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{k=1}^{n}|u_{jk}|\Big)\leqslant M.$$

令 $n\to\infty$, 得到

$$\sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}|u_{jn}|\Big)\leqslant M,\qquad m=1,2,\cdots.$$

特别取 $m=1$, 即知对每个正整数 m, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{mn}$ 都绝对收敛, 因此它本身也收敛. 记 $A_m=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{mn}$, $M_m=\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_{mn}|$, $m=1,2,\cdots$. 则上式蕴涵着正项级数 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}M_m$ 收敛. 而

$$|A_m|\leqslant M_m,\qquad m=1,2,\cdots,$$

所以级数 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}A_m$ 绝对收敛, 自然其本身也收敛. 这就证明了, 二重级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty}u_{mn}$ 收敛. 同理可证二重级数 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{mn}$ 也收敛.

再来证明式 (10.4.4). 记 $A=\sum\limits_{m,n=1}^{\infty}u_{mn}$. 则对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在相应的正整数 N, 使当 $m,n>N$ 时,

$$A-\varepsilon\leqslant\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}u_{jk}\leqslant A+\varepsilon.$$

对每个固定的 $m>N$, 令 $n\to\infty$ 得

$$A-\varepsilon\leqslant\sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}u_{jk}\Big)\leqslant A+\varepsilon.$$

再令 $m\to\infty$, 得到

$$A-\varepsilon\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}u_{jk}\Big)\leqslant A+\varepsilon.$$

由 ε 的任意性, 据此推知 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{mn}=A$. 同理可证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty}u_{mn}=A$. 这就证明了式 (10.4.4).

现在反过来设二重级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty}u_{mn}$ 收敛, 但假定 $u_{mn}\geqslant 0,\ m,n=1,2,\cdots$, 证明它绝对收敛. 事实上, 显然对任意正整数 m,n 都成立

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}u_{jk}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}u_{mn}.$$

据此易见, 矩阵 (10.4.3) 中的元素无论如何排列, 所得级数的部分和数列都是有界数列, 从而是收敛的. 正项级数的敛散性及和不依赖于其项的排列顺序, 所以 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{mn}$ 绝对收敛. 证明了绝对收敛性, 应用前面已证明的结论即知等式 (10.4.4) 成立. 证毕.

习　题　10.4

1. 不用柯西准则, 证明如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛.

2. 证明: 如果在级数中添加括号所得到的级数收敛, 并且同一括号中的各项有相同的符号, 则去掉括号后的级数也收敛.

3. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{j_n}$ 是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的一个重排. 证明: 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_{j_n}=0$.

4. 证明: 如果对级数进行重排时, 每一项移动的位置都不超过一个固定的数 N, 则这样的重排不改变级数的敛散性及其和.

5. 对级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$ 的各项进行重排, 重排的方法: 先依次取 m 个正项, 再依次取 n 个负项, 再依次取 m 个正项, 再依次取 n 个负项, 如此一直做下去. 应用公式 $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}=\ln n+c+\varepsilon_n$($c$ 是欧拉常数, $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$) 证明: 这样重排后的级数收敛, 且和等于 $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{m}{n}+\ln 2$.

6. 两个级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 的乘积 $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n\right)\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n\right)$ 定义为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}w_n$, 其中,

$$w_n=u_1v_n+u_2v_{n-1}+\cdots+u_{n-1}v_2+u_nv_1,\qquad n=1,2,\cdots.$$

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}w_n$ 中的项是由排列 (10.4.2) 中位于同一斜对角线上的各项相加所得. 设

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛，和分别为 A 和 B，且至少有一个绝对收敛. 证明：这两个级数的乘积也收敛，且和等于 AB.

7. 证明：两个收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ $(p>0)$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^q}$ $(q>0)$ 的乘积当 $p+q>1$ 时收敛，当 $p+q\leqslant 1$ 时发散.

8. 设数列 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ 都单调递减趋于零. 令 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}w_n$ 为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}v_n$ 的乘积，其中，

$$w_n = u_1v_n + u_2v_{n-1} + \cdots + u_{n-1}v_2 + u_nv_1, \qquad n=1,2,\cdots.$$

证明以下三个条件互相等价：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}w_n$ 收敛；

(2) $\lim_{n\to\infty} w_n = 0$;

(3) $\lim_{n\to\infty} U_nv_n = 0$ 且 $\lim_{n\to\infty} V_nu_n = 0$，其中，$U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, $V_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$, $n=1,2,\cdots$.

9. 证明：

(1) $\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!}$ $(x, y$ 为任意实数$)$;

(2) $\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)^2 := \left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ $(|x|<1)$;

(3) $\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)^3 := \left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)^2\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n$ $(|x|<1)$.

这里符号 $a:=b$ 的意思是 a 定义为 b.

10. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，其中 $u_n \geqslant 0$, $n=1,2,\cdots$. 证明二重级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nu_n}{n^2+k^2}$ 收敛.

11. 已知当 $-1\leqslant x<1$ 时成立 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$. 记 $S_n = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^n}$. 证明下列等式：

(1) $\sum_{n=2}^{\infty} S_n = 1$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} S_{2n} = \frac{3}{4}$; (3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_n}{n} = 1-c$; (4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_{2n}}{n} = \ln 2$.

其中 c 为欧拉常数.

10.5 零测集和勒贝格定理

本节先应用无穷级数给出零测集的概念, 然后介绍一个定理, 这个定理给出了非负的黎曼可积函数积分等于零的一个充要条件, 它将在 13.3 节用到. 最后再介绍积分理论中著名的勒贝格定理, 这个定理给出了黎曼可积函数的刻画: 区间 $[a,b]$ 上的有界函数 f 在 $[a,b]$ 上黎曼可积的充要条件是 f 的全体不连续点的集合是零测集.

定义 10.5.1 设 E 是一个非空的实数集合. 如果对任意给定的 $\varepsilon>0$, 都存在一列相应的开区间 $\{(a_n,b_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 覆盖 E, 并且这些开区间的总长度小于 ε, 即

$$E\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)\qquad 且\qquad \sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)<\varepsilon,$$

则称 E 是**零测集**.

显然任意有限的实数集合都是零测集. 又显然零测集的任意非空子集是零测集, 并且有限个零测集的并集也是零测集. 最后这个结论有以下非平凡的推广.

引理 10.5.1 设 E_k $(k=1,2,\cdots)$ 是一列零测集. 则它们的并集 $E=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$ 是零测集.

证明 需要证明对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在一列相应的开区间 $\{(a_n,b_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 使

$$E\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)\qquad 且\qquad \sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)<\varepsilon.$$

对任意给定的 $\varepsilon>0$ 和每个正整数 k, 由 E_k 是零测集知存在相应的开区间列 $\{(a_{kn},b_{kn})\}_{n=1}^{\infty}$ 使

$$E_k\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_{kn},b_{kn})\qquad 且\qquad \sum_{n=1}^{\infty}(b_{kn}-a_{kn})<\frac{\varepsilon}{2^k}.$$

把所有这样得到的开区间 (a_{kn},b_{kn}) $(k,n=1,2,\cdots)$ 按以下方式排成一个序列:

$$\begin{array}{ccccccccc}
(a_{11},b_{11}) & & (a_{12},b_{12}) & & (a_{13},b_{13}) & & (a_{14},b_{14}) & & \cdots\\
& \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & & \\
(a_{21},b_{21}) & & (a_{22},b_{22}) & & (a_{23},b_{23}) & & (a_{24},b_{24}) & & \cdots\\
& \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & & \\
(a_{31},b_{31}) & & (a_{32},b_{32}) & & (a_{33},b_{33}) & & (a_{34},b_{34}) & & \cdots\\
& \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & & \\
(a_{41},b_{41}) & & (a_{42},b_{42}) & & (a_{43},b_{43}) & & (a_{44},b_{44}) & & \cdots\\
\cdots\cdots & & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & & \cdots
\end{array}$$

并把它们改记作 $(a_1,b_1),(a_2,b_2),\cdots,(a_n,b_n),\cdots$, 即 $(a_1,b_1)=(a_{11},b_{11})$, $(a_2,b_2)=(a_{12},b_{12})$, $(a_3,b_3)=(a_{21},b_{21})$, $(a_4,b_4)=(a_{13},b_{13}),\cdots$. 则显然有

$$E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\subseteq\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_{kn},b_{kn})=\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n),$$

且由 10.4 节的定理 10.4.5 知

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)=\sum_{k,n=1}^{\infty}(b_{kn}-a_{kn})=\sum_{k=1}^{\infty}\Big[\sum_{n=1}^{\infty}(b_{kn}-a_{kn})\Big]<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^k}=\varepsilon.$$

所以 E 是零测集. 证毕.

一个集合 A, 如果它的所有元素可以排成一个序列, 即 A 可以和由全体自然数组成的集合 $\mathbf{N}$ 建立一一对应, 则称 A 为**可数集**. 不是可数集的无限集合叫做**不可数集**. 引理 10.5.1 表明, 可数多个零测集的并集是零测集. 由于只含一个实数的集合显然是零测集, 所以引理 10.5.1 的一个直接推论是由可数多个实数组成的集合是零测集. 由于由全体有理数组成的集合 $\mathbf{Q}$ 是可数集 (本节习题 3), 因此 $\mathbf{Q}$ 是零测集, 自然它的任意子集也都是零测集.

定理 10.5.1 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上黎曼可积. 则有下列结论:

(1) 如果 f 在一个零测集 $E\subseteq[a,b]$ 外恒等于零, 则 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$;

(2) 反过来, 如果 $f\geqslant 0$ 且 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$, 则 f 在一个零测集 $E\subseteq[a,b]$ 外恒等于零.

证明 先设 f 在一个零测集 $E\subseteq[a,b]$ 外恒等于零, 下证 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$. 反证而设 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\neq 0$. 不妨设 $f\geqslant 0$ (否则用 $|f|$ 代替 f 进行讨论). 这时 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$. 记这个积分值为 ε_0. 取 $[a,b]$ 的一列分割 Δ_n:

$$a=x_{n0}<x_{n1}<x_{n2}<\cdots<x_{nm_n}=b,$$

使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|\Delta_n\|=0$, 并令 $\underline{S}(f,\Delta_n)$ 表示函数 f 关于分割 Δ_n 的达布下和, 即

$$\underline{S}(f,\Delta_n)=\sum_{k=1}^{m_n}A_{nk}(x_{nk}-x_{n\,k-1}),\qquad A_{nk}=\inf_{x_{n\,k-1}\leqslant x\leqslant x_{nk}}f(x).$$

则由 f 在 $[a,b]$ 上黎曼可积知

$$\lim_{n\to\infty}\underline{S}(f,\Delta_n)=\underline{\int_a^b}f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\varepsilon_0.$$

因 $\varepsilon_0>0$, 所以当 n 充分大时有

$$\underline{S}(f,\Delta_n)\geqslant\frac{\varepsilon_0}{2}.$$

把小区间 $[x_{n\,k-1}, x_{nk}]$ 分为两类, 一类使得 $A_{nk} \geqslant \dfrac{\varepsilon_0}{4(b-a)}$, 另一类则使得 $A_{nk} < \dfrac{\varepsilon_0}{4(b-a)}$. 用 E_n 表示第一类即使得 $A_{nk} \geqslant \dfrac{\varepsilon_0}{4(b-a)}$ 的小区间 $[x_{n\,k-1}, x_{nk}]$ 的并集, 并用 $\sum'$ 表示 $\underline{S}(f, \Delta_n)$ 中相应的和, 而用 $\sum''$ 表示第二类小区间所对应的 $\underline{S}(f, \Delta_n)$ 中的和, 再用 $|E_n|$ 表示第一类小区间的长度之和. 设 $f(x) \leqslant M, \forall x \in [a,b]$. 则有

$$\sum{}' A_{nk}(x_{nk} - x_{n\,k-1}) \leqslant M|E_n|,$$

$$\sum{}'' A_{nk}(x_{nk} - x_{n\,k-1}) < \frac{\varepsilon_0}{4(b-a)} \cdot (b-a) = \frac{\varepsilon_0}{4}.$$

因此, 由 $\underline{S}(f, \Delta_n) = \sum' A_{nk}(x_{nk} - x_{n\,k-1}) + \sum'' A_{nk}(x_{nk} - x_{n\,k-1}) \geqslant \dfrac{\varepsilon_0}{2}$ 得到

$$M|E_n| \geqslant \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{\varepsilon_0}{4} = \frac{\varepsilon_0}{4},$$

进而 $|E_n| \geqslant \dfrac{\varepsilon_0}{4M} > 0$. 但在 E_n 上 $f(x) \geqslant \dfrac{\varepsilon_0}{4(b-a)} > 0$, 这与 f 在一个零测集 $E \subseteq [a,b]$ 外恒等于零的假设相矛盾. 因此必有 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$.

再设 $f \geqslant 0$ 且 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$. 下证使 $f(x) \neq 0$ 的点 x 组成的集合 E 如果非空, 则它必是零测集. 为此对每个正整数 m, 令

$$E_m = \{x \in [a,b]:\ f(x) \geqslant \frac{1}{m}\}.$$

则 $E = \displaystyle\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$. 根据引理 10.5.1, 只需证明每个非空的 E_m 都是零测集. 为此取 $[a,b]$ 的一列分割 Δ_n:

$$a = x_{n0} < x_{n1} < x_{n2} < \cdots < x_{nm_n} = b,$$

使得 $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0$. 令 $\overline{S}(f, \Delta_n)$ 表示函数 f 关于分割 Δ_n 的达布上和, 即

$$\overline{S}(f, \Delta_n) = \sum_{k=1}^{m_n} B_{nk}(x_{nk} - x_{n\,k-1}), \qquad B_{nk} = \sup_{x_{n\,k-1} \leqslant x \leqslant x_{nk}} f(x).$$

则由 f 在 $[a,b]$ 上黎曼可积知

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, \Delta_n) = \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

因此对任意给定的正整数 m 和 $\varepsilon > 0$, 存在相应的正整数 N 使当 $n > N$ 时,

$$\overline{S}(f, \Delta_n) < \frac{\varepsilon}{m}.$$

令 E_{mn} 表示分割 Δ_n 中所有那些在其上$B_{nk} \geqslant \dfrac{1}{m}$ 的小区间 $[x_{n\,k-1}, x_{nk}]$ 的并集, 并

用 $\sum'$ 表示 $\overline{S}(f,\Delta_n)$ 中相应于这些小区间的项的和, 而用 $|E_{mn}|$ 表示所有这些小区间的长度总和. 则有

$$\overline{S}(f,\Delta_n) \geqslant \sum{}' B_{nk}(x_{nk}-x_{n\,k-1}) \geqslant \frac{1}{m}|E_{mn}|.$$

因此当 $n>N$ 时 $|E_{mn}|<\varepsilon$. 而显然有 $E_m \subseteq E_{mn}$, 所以就证明了对任意给定的 $\varepsilon>0$, E_m 都可被有限个总长度小于 ε 的闭区间所覆盖. 因此 E_m 是零测集. 证毕.

定义 10.5.2 定义在实数集合 E 上的函数 f 如果在 E 的一个零测子集之外恒等于零, 则称 f 在 E 上**几乎处处为零**. 定义在 E 上的两个函数 f 和 g, 如果它们的差 $f-g$ 在 E 上几乎处处为零, 则称 f 和 g 在 E 上**几乎处处相等**.

由于全体有理数组成的集合是可数集因而是零测集, 所以黎曼函数 $R(x)$ 和狄利克雷函数 $D(x)$ 都在整个实数轴上几乎处处为零. 定理 10.5.1 表明, 几乎处处为零的可积函数的积分等于零, 并且反过来, 如果一个非负的可积函数的积分为零, 则这个函数几乎处处为零.

定理 10.5.2(勒贝格定理) 设 f 是区间 $[a,b]$ 上的有界函数. 则 f 在 $[a,b]$ 上黎曼可积的充要条件是存在一个零测集 $E\subseteq[a,b]$, 使得 f 在 $[a,b]\backslash E$ 中的各点都连续.

证明 先设 f 在 $[a,b]$ 上黎曼可积. 对任意 $x_0\in[a,b]$, 记

$$\omega(x_0,f)=\lim_{\delta\to0^+}\Big[\sup_{\substack{|x-x_0|<\delta\\ x\in[a,b]}} f(x)-\inf_{\substack{|x-x_0|<\delta\\ x\in[a,b]}} f(x)\Big],$$

并令

$$E=\{x_0\in[a,b]:\omega(x_0,f)>0\}.$$

由于 f 在 x_0 点连续当且仅当 $\omega(x_0,f)=0$, 所以只需证明 E 如果不是空集则必为零测集. 对每个正整数 m, 令

$$E_m=\left\{x\in[a,b]:\ \omega(x_0,f)\geqslant\frac{1}{m}\right\}.$$

则 $E=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}E_m$. 根据引理 10.5.1, 只需证明每个 E_m 都是零测集. 为此取 $[a,b]$ 的一列分割 Δ_n:

$$a=x_{n0}<x_{n1}<x_{n2}<\cdots<x_{nm_n}=b,$$

使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|\Delta_n\|=0$. 因为 f 在 $[a,b]$ 上黎曼可积, 所以由达布定理知

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m_n}\omega_{nk}(f)(x_{nk}-x_{n\,k-1})=0,$$

其中 $\omega_{nk}(f)$ 表示函数 f 在区间 $[x_{n\,k-1},x_{nk}]$ 上的振幅

$$\omega_{nk}(f)=\sup_{x_{n\,k-1}\leqslant x\leqslant x_{nk}} f(x)-\inf_{x_{n\,k-1}\leqslant x\leqslant x_{nk}} f(x).$$

因此对任意给定的正整数 m 和 $\varepsilon>0$, 当 n 充分大时有

$$\sum_{k=1}^{m_n}\omega_{nk}(f)(x_{nk}-x_{n\,k-1})<\frac{\varepsilon}{m}.$$

令 E_{mn} 表示分割 Δ_n 中所有那些在其上 $\omega_{nk}(f)\geqslant\dfrac{1}{m}$ 的小区间 $[x_{n\,k-1},x_{nk}]$ 的并集, 并用 $\sum'$ 表示和式 $\sum\limits_{k=1}^{m_n}\omega_{nk}(f)(x_{nk}-x_{n\,k-1})$ 中相应于这些小区间的项的和, 而用 $|E_{mn}|$ 表示所有这些小区间的长度总和. 则有

$$\sum_{k=1}^{m_n}\omega_{nk}(f)(x_{nk}-x_{n\,k-1})\geqslant\sum{}'\omega_{nk}(f)(x_{nk}-x_{n\,k-1})\geqslant\frac{1}{m}|E_{mn}|.$$

因此当 n 充分大时有 $|E_{mn}|<\varepsilon$. 而显然 $E_m\subseteq E_{mn}$, 这说明对任意给定的 $\varepsilon>0$, E_m 都可被有限个总长度小于 ε 的闭区间所覆盖, 所以 E_m 是零测集, 进而 E 是零测集.

反过来设 f 的全体不连续点的集合是零测集, 我们来证明 f 在 $[a,b]$ 上黎曼可积. 反证而设 f 在 $[a,b]$ 上不可积. 则由达布定理知, 存在 $\varepsilon_0>0$ 使得

$$\overline{\int_a^b}f(x)\mathrm{d}x-\underline{\int_a^b}f(x)\mathrm{d}x\geqslant\varepsilon_0.$$

取 $[a,b]$ 的一列分割 Δ_n:

$$a=x_{n0}<x_{n1}<x_{n2}<\cdots<x_{nm_n}=b,$$

使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|\Delta_n\|=0$, 并对每个正整数 n, Δ_{n+1} 都是 Δ_n 的加细. 则

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m_n}\omega_{nk}(f)(x_{nk}-x_{n\,k-1})=\overline{\int_a^b}f(x)\mathrm{d}x-\underline{\int_a^b}f(x)\mathrm{d}x\geqslant\varepsilon_0.$$

因此存在正整数 N 使当 $n>N$ 时,

$$I_n=\sum_{k=1}^{m_n}\omega_{nk}(f)(x_{nk}-x_{n\,k-1})\geqslant\frac{\varepsilon_0}{2}.$$

对每个 $n>N$, 用 E_n 表示所有使得 $\omega_{nk}(f)\geqslant\dfrac{\varepsilon_0}{4(b-a)}$ 的小区间 $[x_{n\,k-1},x_{nk}]$ 的并集, 并用 $|E_n|$ 与 $\sum'$ 分别表示这些小区间的长度总和与和式 I_n 中相应于这些小区间的项的和, 而用 $\sum''$ 表示和式 I 中其余项的和. 设 $|f(x)|\leqslant M$, $\forall x\in[a,b]$. 则有

$$\sum{}'\omega_{nk}(f)(x_{nk}-x_{n\,k-1})\leqslant 2M|E_n|,$$

$$\sum{}''\omega_{nk}(f)(x_{nk}-x_{n\,k-1})<\frac{\varepsilon_0}{4(b-a)}\cdot(b-a)=\frac{\varepsilon_0}{4}.$$

因此

$$2M|E_n| > I_n - \frac{\varepsilon_0}{4} \geqslant \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{\varepsilon_0}{4} = \frac{\varepsilon_0}{4},$$

进而 $|E_n| > \dfrac{\varepsilon_0}{8M}$. 现在令 $E = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. 由于 Δ_{n+1} 是 Δ_n 的加细, 所以 $E_{n+1} \subseteq E_n$. 因此对每个点 $x_0 \in E$, 都存在一列长度趋于零的闭区间

$$[x_1, y_1] \supseteq [x_2, y_2] \supseteq \cdots \supseteq [x_n, y_n] \supseteq [x_{n+1}, y_{n+1}] \supseteq \cdots,$$

使得 $x_0 \in [x_n, y_n]$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 且函数 f 在每个 $[x_n, y_n]$ 上的振幅 $\geqslant \dfrac{\varepsilon_0}{4(b-a)}$, 进而

$$\omega(x_0, f) \geqslant \frac{\varepsilon_0}{4(b-a)}.$$

这说明 E 中的点都是 f 的不连续点. 但是不难证明, E 不是零测集 (本节习题 5). 矛盾. 因此, 当 f 的全体不连续点的集合是零测集时, 它必在 $[a,b]$ 上黎曼可积. 证毕.

习 题 10.5

1. 根据定义直接证明: 可数的实数集合是零测集.
2. 含有有限个或可数多个元素的集合叫做至多可数集. 证明: 至多可数个可数集的并集是可数集.
3. 证明: (1) 全体整数组成的集合是可数集;

   (2) 全体有理数组成的集合是可数集;

   (3) 平面上全体坐标为有理数的点组成的集合是可数集;

   (4) 全体有理系数的多项式组成的集合是可数集.
4. 证明: 单调函数的全体不连续点组成的集合如果不空则是至多可数集.
5. 设 E_n $(n = 1, 2, \cdots)$ 是一列实数集合, 满足以下条件:

   (1) 对每个 n, E_n 都是有限个闭区间的并集, 且这些闭区间的总长度不小于一个固定的正数 ε_0;

   (2) $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \cdots \supseteq E_n \supseteq E_{n+1} \supseteq \cdots$.

   证明: 集合 $E = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ 不是零测集.
6. 设 E 是一个这样的实数集合: 对任意 $x \in E$, 存在相应的 $\delta > 0$, 使得 $E \bigcap B_\delta(x)$ 是零测集. 证明: E 是零测集.
7. 设函数 f 在 $[a,b]$ 上黎曼可积, 且对任意 $[c,d] \subseteq [a,b]$ 都成立 $\displaystyle\int_c^d f(x)\mathrm{d}x = 0$. 证明: f 在 $[a,b]$ 上几乎处处为零.
8. 设函数 f 和 g 都在 $[a,b]$ 上黎曼可积, 且在 $[a,b]$ 上几乎处处成立 $f \geqslant g$, 即存在一个零测集 $E \subseteq [a,b]$, 使对任意 $x \in [a,b] \backslash E$ 都成立 $f(x) \geqslant g(x)$. 证明:

$$\int_c^d f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_c^d g(x)\mathrm{d}x.$$

9. 设函数 f 在 $[a,b]$ 上黎曼可积. 令 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,\ \forall x\in[a,b]$. 证明:

(1) 函数 F 在 $[a,b]$ 上几乎处处可导, 且在 $[a,b]$ 上几乎处处成立 $F'=f$, 即存在一个零测集 $E\subseteq[a,b]$, 使对任意 $x\in[a,b]\backslash E$, F 都在点 x 可导, 而且 $F'(x)=f(x)$;

(2) 设 g 是另一个在 $[a,b]$ 上黎曼可积的函数. 令 $G(x)=\int_a^x g(t)\mathrm{d}t,\ \forall x\in[a,b]$. 则成立分部积分公式

$$\int_a^b F(x)g(x)\mathrm{d}x=F(b)G(b)-\int_a^b f(x)G(x)\mathrm{d}x.$$

特别, 如果 φ 在 $[a,b]$ 上可导且导函数连续, 则有

$$\int_a^b F(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x=F(b)\varphi(b)-\int_a^b f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

第 11 章

函数序列和函数级数

如果不要求无穷级数中的各项都是具体的数，而是一些具有公共定义域的函数，就得到了一个函数项的无穷级数，简称**函数级数**．当然，这里要求级数中的所有函数的自变元都是相同的．今后，为了把第 10 章讨论过的数值型的无穷级数与本章将要讨论的函数级数区别，我们把第 10 章讨论的级数叫做**数值级数**．由于把函数级数中每一项函数的自变元取为它们的公共定义域中的一个值时，就得到了一个数值级数，所以函数级数在一定程度上可以化归为数值级数来研究．但问题不完全如此．例如，通项为连续函数的函数级数，它的和函数是不是也是连续函数？通项为可微函数或可积函数的函数级数，它的和函数是不是也是可微函数或可积函数？如果是，和函数的导数和积分该怎么计算？这些问题显然都没有在第 10 章考虑过．本章的主要任务就是研究这些问题．

与数值级数一样，函数级数也是通过考虑它的部分和序列来研究的．由于函数级数的部分和序列是一个函数序列，所以为了研究函数级数，就必须先研究函数序列．本章的内容分为两部分：前面一部分讨论函数序列，后面一部分讨论函数级数．必须说明的是，尽管这里似乎是把函数序列的理论作为函数级数理论的准备展开的，但实际上，函数序列的理论有独立的意义．函数序列理论与函数级数理论同等重要且相辅相成．之所以把函数序列放在这一章而没有在前面单独讨论，是因为把它与函数级数放在一起讨论明显地比分开讨论更合适．

11.1 函数序列的一致收敛

11.1.1 问题的提出

一个序列，如果它的每一项都是函数，就称这个序列为**函数序列**．与数列的情形一样，序列中的每一个函数都叫做一个**项**．在今后的讨论中，总是假定函数序列中的所有项有公共的定义域．

设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个函数序列, 它的每一项 f_n 都在实数集 D 上有定义. 对每个 $x \in D$, 考虑所有函数 f_n 在 x 点的值, 就得到一个数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. 如果这个数列收敛, 即极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ 存在, 就称点 x 是函数序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的**一个收敛点**; 而如果数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 发散, 就称点 x 是这个函数序列的一个**发散点**. 函数序列的全体收敛点组成的集合叫做它的**点态收敛域**或**逐点收敛域**, 它是定义域 D 的一个子集合.

设函数序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的点态收敛域是 $S \subseteq D$. 对每个 $x \in S$, 数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 都有一个极限值, 记作 $f(x)$. 这样就得到了以 S 为定义域的一个函数 f. 称这个函数为函数序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的**点态极限**或**逐点极限**, 即

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \qquad \forall x \in S.$$

更一般地, 可以考虑函数序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在其点态收敛域 $S \subseteq D$ 的某个子集 $S_0 \subseteq S$ 上的极限. 这样考虑问题往往在以下两种情况下发生: 其一, 点态收敛域 S 难以确定; 其二, 不需要知道函数序列在整个收敛域 S 上的极限情况, 而只需了解它在 S 的某个子集 S_0 上的极限性态. 引进下列概念:

定义 11.1.1 设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个函数序列, 它的每一项 f_n 都在实数集 D 上有定义. 又设 f 是定义在 D 的子集 S_0 上的一个函数. 如果对每个 $x \in S_0$ 都成立

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

则称函数序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在集合 S_0 上**逐点收敛**于函数 f, 也称 f 是 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在集合 S_0 上的**逐点极限**.

定义 11.1.1 中, 特意在 "收敛于"、"极限" 等术语前面冠以 "逐点" 二字, 是为了把这里引入的收敛概念与以后将要引进的其他收敛概念如积分平均收敛等加以区别. 为使术语不致冗繁, 下面将经常地省略这些概念中的 "逐点" 二字, 而简单地说 "收敛域" 和 "极限函数" 等. 但读者需牢记, 我们说的 "收敛域" 是指 "逐点收敛域"; "极限函数" 是指的 "逐点极限函数".

显然, 求函数序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的逐点极限的问题, 等同于对每个给定的 x, 求数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 的极限的问题: 当这个数列有极限时, 函数序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的极限函数 f 就在这个点 x 有定义, 并且 $f(x)$ 的值就等于这个数列的极限值; 当这个数列没有极限时, 极限函数 f 便在这个 x 点没有定义. 现在的问题是怎样从函数序列中的每一个函数 f_n 的性质出发, 来推断极限函数 f 的性质? 即在极限运算下, 函数的一些重要性质, 如连续性、可微性、可积性等, 是否都能保存下来? 能否通过对函数序列的每一项求导数再取极限, 来求极限函数的导数? 同样能否通过对函数序列的每一项求积分再取极限, 来求极限函数的积分? 为了研究这些问题, 我们先看一些例子.

例 1 考虑函数序列

$$f_n(x) = x^n, \qquad n = 1, 2, \cdots.$$

由图 11.1.1 易见它的收敛域为 $(-1, 1]$, 极限函数为

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } -1<x<1,\\ 1, & \text{当 } x=1.\end{cases}$$

虽然函数列中的每项 f_n 都连续甚至无穷可微, 但极限函数却在 $x=1$ 点不连续, 自然也就不可微了.

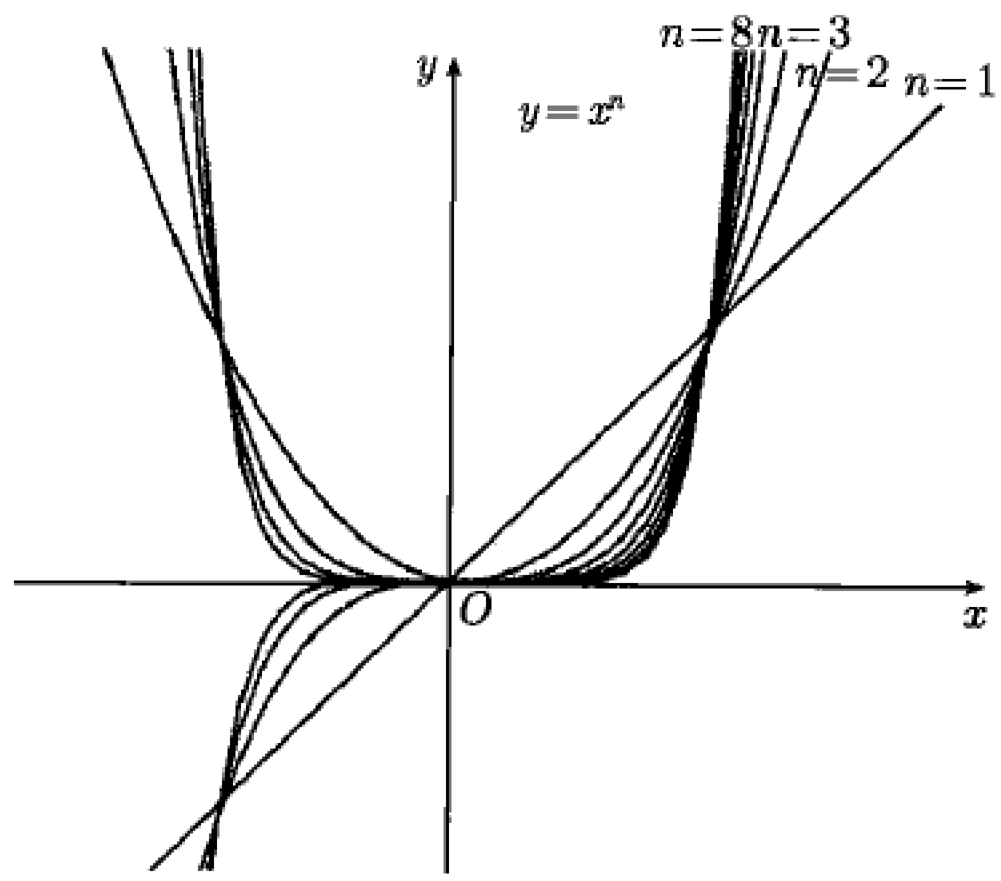


图 11-1-1 例 1 中的函数列

例 2 考虑区间 $[0,1]$ 上的函数序列

$$f_n(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } n!x=\text{整数},\\ 0, & \text{对于其他的 } x,\end{cases}\qquad n=1,2,\cdots.$$

如果 x 是 $[0,1]$ 中的无理数, 则显然 $f_n(x)=0$, $n=1,2,\cdots$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$. 如果 x 是 $[0,1]$ 中的有理数, 设 $x=\dfrac{p}{q}$, 这里 p 是非负整数, q 是正整数, 则对所有 $n\geqslant q$ 的正整数 n, $n!x$ 都是整数, 所以当 $n\geqslant q$ 时 $f_n(x)=1$, 于是 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=1$. 因此这个函数序列的收敛域为 $[0,1]$, 极限函数为

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 是 } [0,1] \text{ 中的有理数},\\ 0, & \text{当 } x \text{ 是 } [0,1] \text{ 中的无理数}.\end{cases}$$

f 是狄利克雷函数, 它在区间 $[0,1]$ 上不是黎曼可积的. 另一方面, 对每个正整数 n, 区间 $[0,1]$ 中使得 $n!x=$ 整数的 x 只有有限多个, 它们是

$$x=\frac{m}{n!},\qquad m=0,1,2,\cdots,n!.$$

这说明函数 f_n 在区间 $[0,1]$ 上只有有限多个不连续的点, 所以它在 $[0,1]$ 上黎曼可积. 因此, 这个例子说明, 黎曼可积函数列的逐点极限不一定是黎曼可积函数 (见图 11-1-2).

例 3 考虑函数序列

$$f_n(x)=\frac{\sin nx}{\sqrt{n}},\qquad n=1,2,\cdots.$$

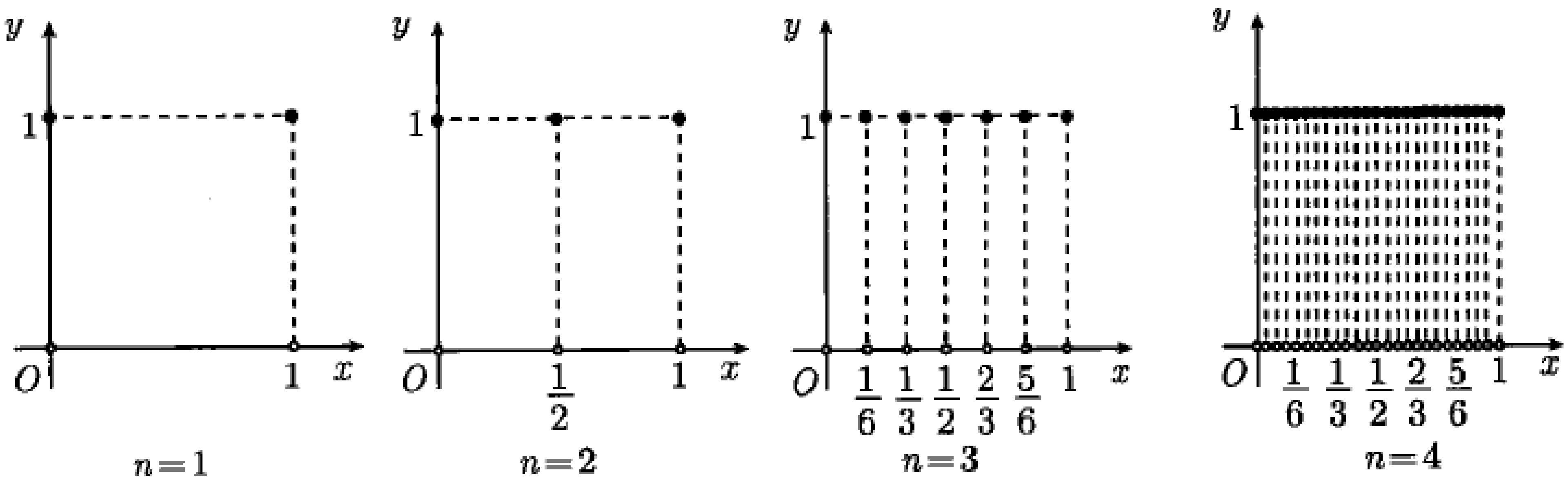


图 11-1-2 例 2 中的函数列

易见它的收敛域为 $(-\infty,+\infty)$, 极限函数为 $f(x)=0$, $\forall x\in\mathbf{R}$. 显然有 $f'(x)=0$, $\forall x\in\mathbf{R}$. 对每项 f_n 求导得

$$f_n'(x)=\sqrt{n}\cos nx,\quad \forall x\in\mathbf{R},\quad n=1,2,\cdots.$$

易见对每个实数 x, 当 $n\to\infty$ 时 $f_n'(x)$ 都没有极限. 因此不能采用对每项求导数再取极限的方法来求极限函数的导数 (见图 11-1-3).

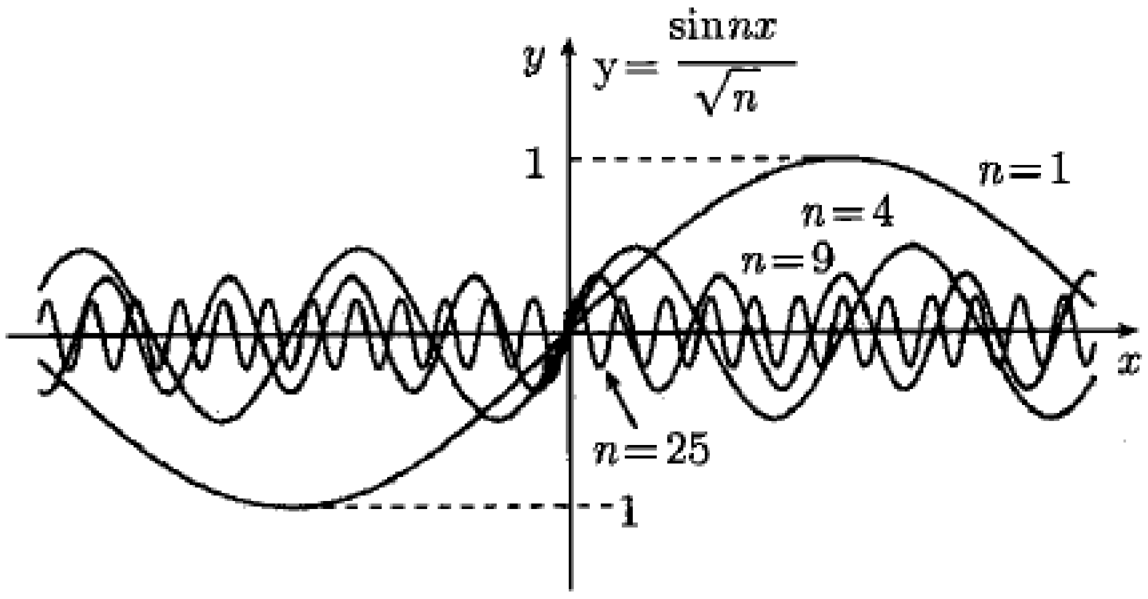


图 11-1-3 例 3 中的函数列

例 4 考虑函数序列

$$f_n(x)=x\mathrm{e}^{-nx^2},\qquad n=1,2,\cdots.$$

当 $x=0$ 时, $f_n(0)=0$, $n=1,2,\cdots$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(0)=0$. 当 $x\neq 0$ 时, 也容易看出 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$. 所以这个函数序列的收敛域为 $(-\infty,+\infty)$, 极限函数为 $f(x)=0$, $\forall x\in\mathbf{R}$. 显然有 $f'(x)=0$, $\forall x\in\mathbf{R}$. 对每项 f_n 求导得

$$f_n'(x)=\mathrm{e}^{-nx^2}-2nx^2\mathrm{e}^{-nx^2},\quad \forall x\in\mathbf{R},\quad n=1,2,\cdots.$$

当 $x=0$时, $f_n'(0)=1$, $n=1,2,\cdots$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n'(0)=1$. 当 $x\neq 0$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}f_n'(x)=$

0.(见图 11-1-4). 可见虽然 f_n' 当 $n\to\infty$ 时有极限, 但在 $x=0$ 处它的极限不等于 $f'(0)=0$, 即一般而言

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x)\neq[\lim_{n\to\infty} f_n(x)]'.$$

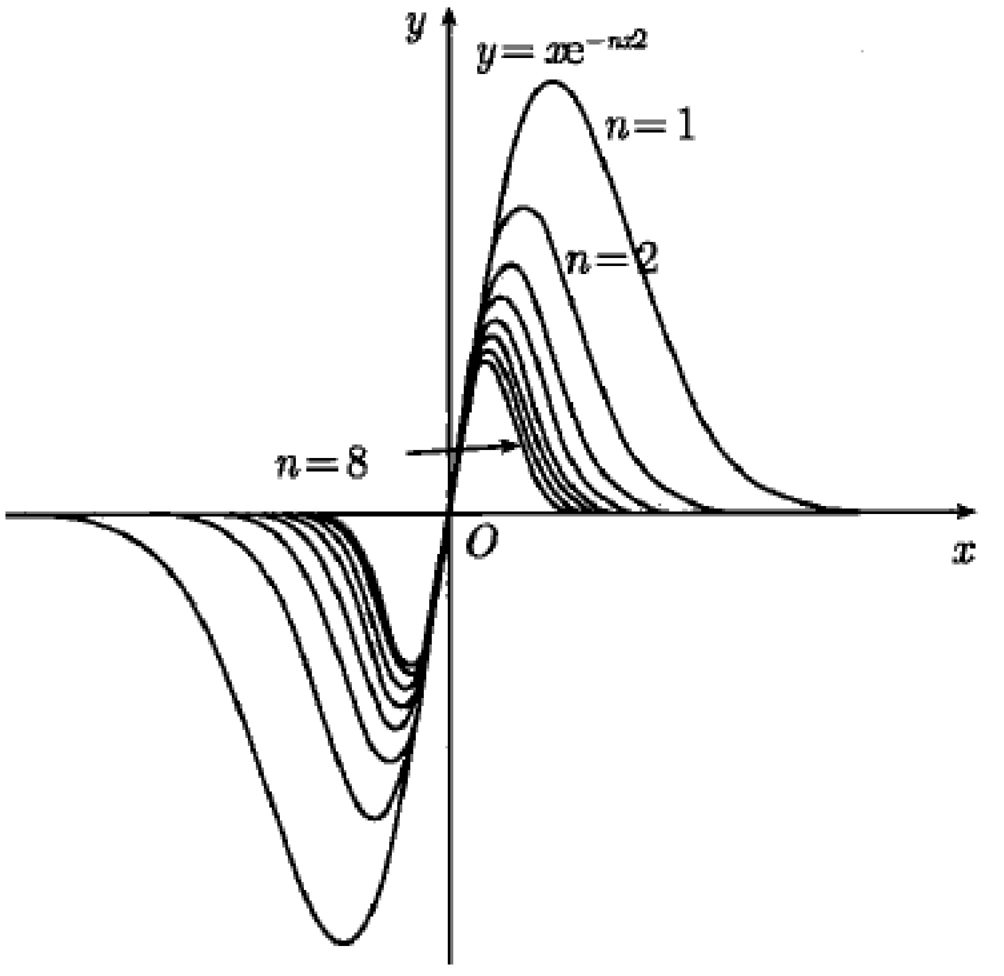


图 11-1-4　例 4 中的函数列

例 5　考虑函数序列

$$f_n(x)=n|x|(1-x^2)^n,\qquad n=1,2,\cdots.$$

当 $x=0$ 时, $f_n(0)=0$, $n=1,2,\cdots$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0)=0$. 同样当 $x=\pm1$ 时, $f_n(\pm1)=0$, $n=1,2,\cdots$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(\pm1)=0$. 当 $0<|x|<1$ 时, 也容易看出 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$. 当 $|x|>1$ 时, $f_n(x)=n|x|(1-x^2)^n$ 当 $n\to\infty$ 时没有极限. 所以这个函数序列的收敛域为 $[-1,1]$, 极限函数为 $f(x)=0$, $\forall x\in[-1,1]$. 由图 11-1-5 容易看出

$$\int_{-1}^{1}|x|(1-x^2)^n\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1},\qquad n=1,2,\cdots.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1} f_n(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1.$$

而

$$\int_{-1}^{1}[\lim_{n\to\infty} f_n(x)]\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}0\mathrm{d}x=0.$$

可见

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1} f_n(x)\mathrm{d}x\neq\int_{-1}^{1}[\lim_{n\to\infty} f_n(x)]\mathrm{d}x.$$

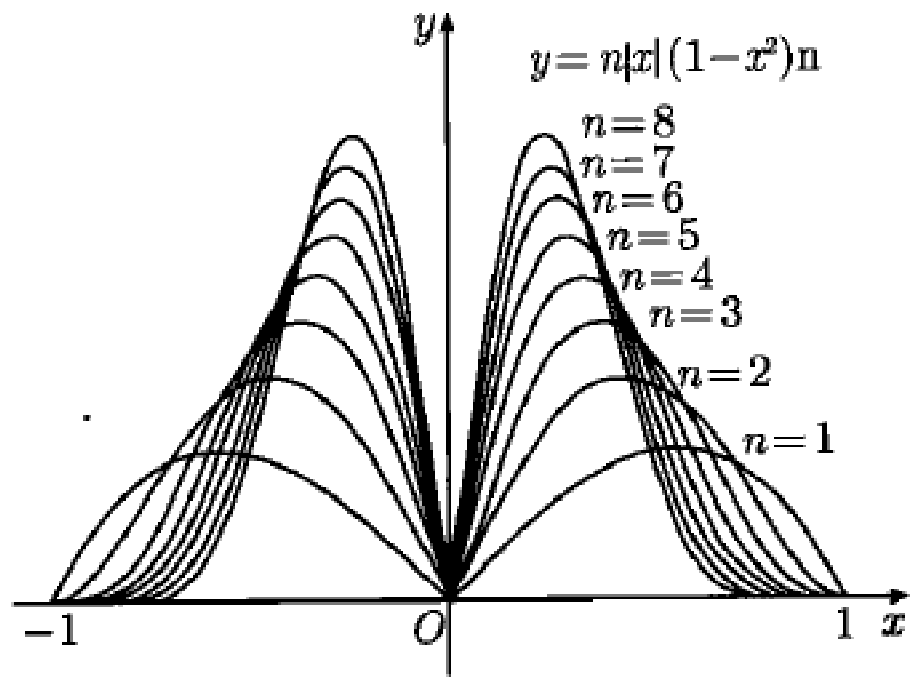


图 11-1-5　例 5 中的函数列

类似地, 函数序列

$$g_n(x)=n^2|x|(1-x^2)^n, \qquad n=1,2,\cdots.$$

的收敛域为 $[-1,1]$, 极限函数为 $g(x)=0, \forall x\in[-1,1]$. 容易看出

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1} g_n(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n+1}=+\infty.$$

所以尽管函数列 $g_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 在区间 $[-1,1]$ 上逐点收敛于函数 $g(x)=0$, 但其每一项积分后得到的数列却不收敛.

例 1～ 例 5 说明, 在对函数序列取逐点极限的过程中, 函数的连续性、可微性和可积性都不能保持, 也不能通过用逐项求导数和逐项求积分再取极限的方法来求极限函数的导数和积分. 因此引出下列问题: 怎样从函数序列中各项函数的性质来了解极限函数的性质? 能不能通过加强一些条件, 获得这些问题的正面解答呢? 先分析最简单的问题: 如何从函数序列中的每一项都连续获得极限函数的连续性.

设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个函数序列, 其中每一项都在区间 I 上定义且连续, 并且 f_n 在 I 上逐点收敛于 f. 设 $x_0\in I$. 为使 f 在点 x_0 连续, 就必须对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在相应的 $\delta>0$, 使对任意 $x\in I$, 只要 $|x-x_0|<\delta$, 就有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon. \tag{11.1.1}$$

为了应用 f 是 f_n 的逐点极限和 f_n 是连续函数的性质, 我们对式 (11.1.1) 左端加、减一些项以便把它与 f_n 联系起来, 就得到

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant|f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(x_0)|+|f_n(x_0)-f(x_0)|. \tag{11.1.2}$$

如果此式右端的三项每一项都小于 $\dfrac{\varepsilon}{3}$, 则就可得到式 (11.1.1). 第三项最容易处理: 应用 $f_n(x_0)$ 收敛于 $f(x_0)$ 的性质, 只要取 n 充分大即可. n 取定之后, 第二项也很好处理: 根据 f_n 是连续函数的性质, 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在相应的 $\delta>0$(依赖于取定的 n), 使对任意 $x\in I$, 只要 $|x-x_0|<\delta$, 这一项就可小于 $\dfrac{\varepsilon}{3}$. 第一项是最难处理的一

项：虽然对每个 $x \in I$ 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, 因而对任意给定的 $\varepsilon > 0$ 都存在相应的 N, 使当 $n > N$ 时这一项也可小于 $\frac{\varepsilon}{3}$, 但是这个 N 依赖于 x, 即 $N = N_x$. 因为在 x_0 附近有无穷多的 x, 相应地也就有无穷多个 N_x. 假如这些 N_x 没有上界, 那么就不存在一个正整数 n 使得对 x_0 附近的每个 x 都有 $n > N_x$, 这样前面对第二项的处理就失效了. 因此, 问题的症结在于是否存在一个对 x_0 附近的所有 x 都适用的正整数 N, 使当 $n > N$ 时, 对所有这些 x 都有

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

如果这样的正整数 N 存在, 那么也就能够推证出使式 (11.1.1) 成立的 $\delta > 0$ 是存在的; 而如果这样的正整数 N 不存在, 则就无法得到这样的 $\delta > 0$ 的存在性.

N_x 是衡量 $f_n(x)$ 趋于 $f(x)$ 的快慢的尺度：N_x 越大, 则意味着 $f_n(x)$ 越慢地趋于 $f(x)$. 因此, 如果对 x_0 附近的 x, $f_n(x)$ 趋于 $f(x)$ 的快慢是一致的, 则由每一项 f_n 在点 x_0 都连续, 就可推知极限函数 f 也在点 x_0 连续, 否则就无法得到 f 在点 x_0 的连续性. 以例 1 为例, 显然 $f_n(x) = x^n$ 随着 x 越接近 1 $(x < 1)$, 当 $n \to \infty$ 时趋于其极限 $f(x) = 0$ 的速度越慢, 即对 1 附近的 $x < 1$, $f_n(x) = x^n$ 当 $n \to \infty$ 时趋于其极限 $f(x) = 0$ 的速度是不一致的. 这就导致了函数序列 $f_n(x) = x^n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 的极限函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处发生了间断.

11.1.2　函数序列一致收敛的定义

以上分析启发我们引进下列概念.

定义 11.1.2　设 S 是一个非空实数集, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个函数序列, 它的每一项 f_n 都在 S 上有定义. 又设 f 是定义在 S 上的一个函数. 如果对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在相应的正整数 N(仅依赖于 ε), 使当 $n > N$ 时, 对任意 $x \in S$ 都有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

则称函数序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在集合 S 上**一致收敛**于函数 f(见示意图 11-1-6), 记作

$$f_n \to f \quad (\text{在 } S \text{ 上一致}).$$

一致收敛也叫做**均匀收敛**. 显然, 如果 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 S 上一致收敛于 f, 则它也在 S 上逐点收敛于 f, 即

$$\text{一致收敛} \Rightarrow \text{逐点收敛}.$$

从一致收敛的定义立刻可以得到下述结果:

定理 11.1.1　设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是定义在非空实数集 S 上的一个函数序列, f 是定义在 S 上的一个函数. 则 f_n 在 S 上一致收敛于 f 的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in S} |f_n(x) - f(x)| = 0,$$

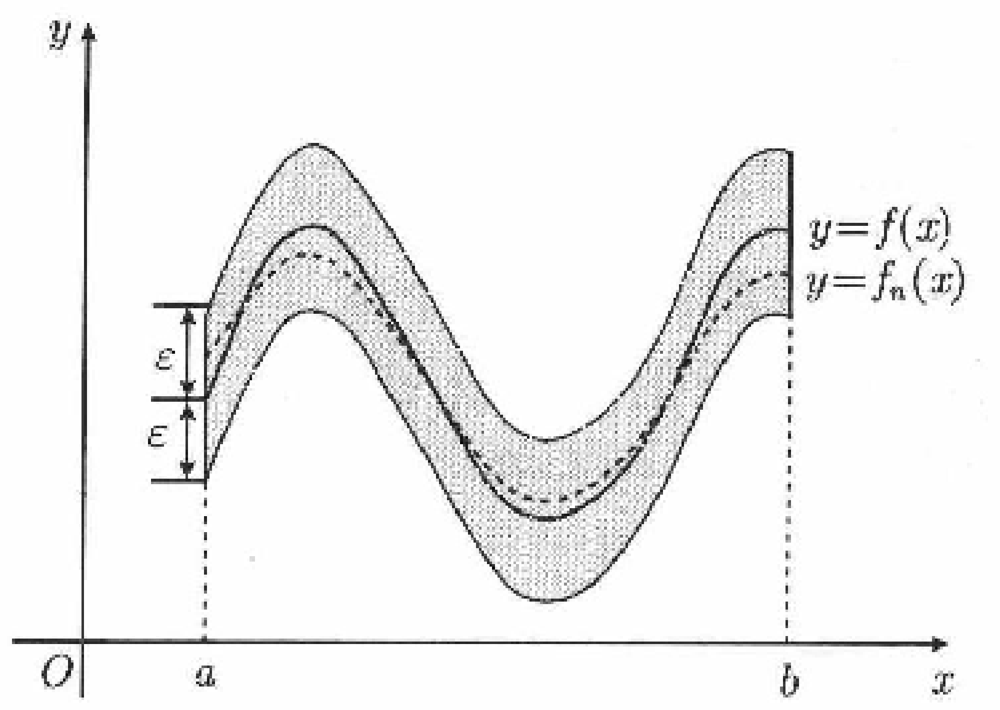


图 11-1-6　函数列的一致收敛

即若令 $M_n = \sup\limits_{x\in S}|f_n(x) - f(x)|$, $n = 1,2,\cdots$, 则存在正整数 n_0, 使当 $n \geqslant n_0$ 时 $M_n < \infty$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = 0$.

证明　如果 $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = 0$, 则对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在相应的正整数 N(仅依赖于 ε), 使当 $n > N$ 时,

$$M_n < \varepsilon.$$

由于 $M_n = \sup\limits_{x\in S}|f_n(x) - f(x)|$, 这意味着当 $n > N$ 时对任意 $x \in S$ 都有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

所以 f_n 在 S 上一致收敛于 f.

反过来, 如果 f_n 在 S 上一致收敛于 f, 则对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在相应的正整数 N(仅依赖于 ε), 使当 $n > N$ 时, 对任意 $x \in S$ 都有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

关于所有 $x \in S$ 取上确界, 即知当 $n > N$ 时,

$$M_n = \sup_{x\in S}|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

所以当 n 充分大时 $M_n < \infty$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = 0$. 证毕.

例 6　考虑函数序列

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}, \qquad n = 1,2,\cdots.$$

这个函数列在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛于零.

证明　对每个正整数 n 和任意实数 x 都有

$$|f_n(x)| = \frac{|x|}{1+nx^2} = \frac{1}{2\sqrt{n}}\cdot\frac{2\sqrt{n}|x|}{1+nx^2} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2\sqrt{n}}=0$, 所以由定理 11.1.1 及图 11-1-7 可知 f_n 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛于零. 证毕.

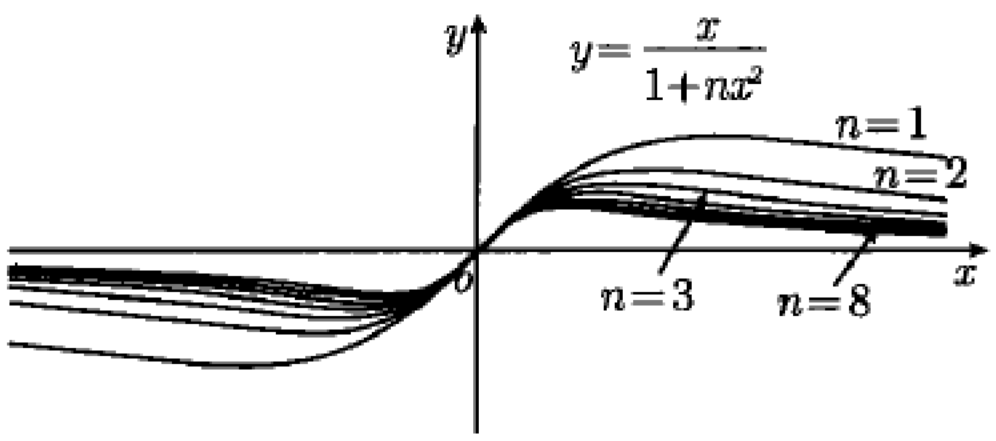


图 11-1-7　例 6 中函数列的一致性收敛性

例 7　考虑例 1 讨论过的函数序列

$$f_n(x)=x^n,\qquad n=1,2,\cdots.$$

它的收敛域为区间 $(-1,1]$, 极限函数为

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } -1<x<1,\\ 1, & \text{当 } x=1.\end{cases}$$

因为

$$f_n(x)-f(x)=\begin{cases}x^n, & \text{当 } -1<x<1,\\ 0, & \text{当 } x=1.\end{cases}$$

可见

$$M_n=\sup_{x\in(-1,1]}|f_n(x)-f(x)|=1,\qquad n=1,2,\cdots,$$

所以 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在区间 $(-1,1]$ 上不一致收敛于 f.

但是对任意 $0<c<1$, 由于

$$\sup_{x\in[-c,c]}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{x\in[-c,c]}|x^n|=c^n,$$

进而

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[-c,c]}|f_n(x)-f(x)|=\lim_{n\to\infty}c^n=0,$$

所以 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在任意区间 $[-c,c]$ $(0<c<1)$ 上一致收敛于 f.

例 8　考虑例 4 讨论过的函数列

$$f_n(x)=x\mathrm{e}^{-nx^2},\qquad n=1,2,\cdots,$$

及其导函数列

$$f_n'(x)=(1-2nx^2)\mathrm{e}^{-nx^2},\qquad n=1,2,\cdots.$$

令 $f_n'(x)=0$, 得$x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2n}}$, 而 $\lim\limits_{|x|\to\infty}f_n(x)=0$, 所以 $x_n^{\pm}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2n}}$ 是 f_n 的最大和最

小值点. 因此

$$\sup_{-\infty<x<\infty}|f_n(x)|=|f_n(x_n^{\pm})|=\frac{1}{\sqrt{2n}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}.$$

据此可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{-\infty<x<\infty}|f_n(x)|=0$. 所以 f_n 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛于零.

类似地可以知道 $|f_n'(x)|$ 在 $x=0$ 处取到最大值. 而 $f_n'(0)=1$, 可见

$$\sup_{-\infty<x<\infty}|f_n'(x)|=1\not\to 0\quad(\text{当 } n\to\infty).$$

所以 f_n' 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不一致收敛于零.

另一方面, 不难知道对任意 $c>0$, 当 $n\geqslant\dfrac{3}{2c^2}$ 时,

$$\sup_{|x|\geqslant c}|f_n'(x)|=|f_n'(\pm c)|=(1-2nc^2)\mathrm{e}^{-nc^2}.\tag{11.1.3}$$

事实上, 因为

$$f_n''(x)=2nx(2nx^2-3)\mathrm{e}^{-nx^2}\begin{cases}<0, & \text{当 } x<-\sqrt{\dfrac{3}{2n}} \text{ 或 } 0<x<\sqrt{\dfrac{3}{2n}},\\ =0, & \text{当 } x=0,\pm\sqrt{\dfrac{3}{2n}},\\ >0, & \text{当 } -\sqrt{\dfrac{3}{2n}}<x<0 \text{ 或 } x>\sqrt{\dfrac{3}{2n}},\end{cases}$$

所以函数 $f_n'(x)$ 在区间 $\left(-\infty,-\sqrt{\dfrac{3}{2n}}\right]$ 上单减, 在区间 $\left[\sqrt{\dfrac{3}{2n}},+\infty\right)$ 上单增, 从而当 $n\geqslant\dfrac{3}{2c^2}$ 即 $c\geqslant\sqrt{\dfrac{3}{2n}}$ 时, 函数 $|f_n'(x)|=-f_n'(x)$ 随着 $|x|$ 的增大而减小, 这就证明了式 (11.1.2). 由式 (11.1.2) 知

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{|x|\geqslant c}|f_n'(x)|=\lim_{n\to\infty}(1-2nc^2)\mathrm{e}^{-nc^2}=0.$$

所以 f_n' 在 $(-\infty,-c]\bigcup[c,+\infty)$ 上一致收敛于零.

定理 11.1.2 成立下列结论:

(1) 如果函数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在非空实数集 S 上一致收敛于函数 f, 则对 S 的任意非空子集 S_0, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 也在 S_0 上一致收敛于 f;

(2) 如果函数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在有限个非空实数集 $S_1, S_2, \cdots, S_m$ 上都一致收敛于函数 f, 则 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 也在这有限个集合的并集 $S=\bigcup\limits_{k=1}^{m}S_k$ 上一致收敛于 f.

证明 结论 (1) 是显然的, 只证明结论 (2). 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 由于 f_n 在每个 S_j $(j=1,2,\cdots,m)$ 上都一致收敛于 f, 所以对每个 $1\leqslant j\leqslant m$, 存在相应的正整数 N_j, 使当 $n>N_j$ 时, 对任意 $x\in S_j$ 都有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

令 $N = \max\{N_1, N_2, \cdots, N_m\}$. 则当 $n > N$ 时, 对任意 $x \in S = \bigcup\limits_{k=1}^{m} S_k$ 上式都成立.

所以 f_n 在 $S = \bigcup\limits_{k=1}^{m} S_k$ 上一致收敛于 f. 证毕.

定理 11.1.3(一致收敛的柯西准则)　设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是定义在非空实数集 S 上一个函数序列. 则存在定义在 S 上的函数 f 使 f_n 在 S 上一致收敛于 f 的充要条件是对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在相应的正整数 N(仅依赖于 ε), 使当 $m > N$ 且 $n > N$ 时, 对任意 $x \in S$ 都有

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

证明　先设存在定义在 S 上的函数 f 使 f_n 在 S 上一致收敛于 f. 则对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在相应的正整数 N, 使当 $n > N$ 时,

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \forall x \in S.$$

自然, 当 $m > N$ 时亦有

$$|f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \forall x \in S.$$

因此当 $m > N$ 且 $n > N$ 时有

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \qquad \forall x \in S.$$

这就证明了必要性.

反过来, 设对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在相应的正整数 N, 使当 $m > N$ 且 $n > N$ 时有

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \qquad \forall x \in S. \tag{11.1.4}$$

根据数列收敛的柯西准则, 这意味着对每个 $x \in S$, 数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 都有极限. 定义 S 上的函数 f 如下:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \qquad \forall x \in S.$$

在式 (11.1.4) 中令 $m \to \infty$, 即知当 $n > N$ 时有

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon, \qquad \forall x \in S.$$

这说明 f_n 在 S 上一致收敛于 f. 证毕.

在考虑一个函数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的极限函数 f 在一点 x_0 附近的局部性质时, 往往只需要了解函数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在点 x_0 的一个小邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上的性态, 而无需知道它在离点 x_0 比较远的点处的性态. 这就引出下列概念.

定义 11.1.3 设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是定义在区间 I 上的一个函数序列, f 是定义在 I 上的一个函数. 又设 $x_0 \in I$. 如果存在 $\delta > 0$, 使在集合 $(x_0-\delta, x_0+\delta)\bigcap I$ 上 f_n 一致收敛于 f, 则称 f_n 在点 x_0 附近**局部一致收敛**于 f.

定理 11.1.4 如果函数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在有界闭区间 $[a,b]$ 中的每一点 x_0 的附近都局部一致收敛于 f, 则它在整个区间 $[a,b]$ 上一致收敛于 f.

证明 根据条件, 对每个点 $x_0 \in I$ 都存在相应的 $\delta_{x_0} > 0$, 使在集合 $(x_0-\delta_{x_0}, x_0+\delta_{x_0})\bigcap I$ 上 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 一致收敛于 f. 开集族

$$\{(x_0-\delta_{x_0}, x_0+\delta_{x_0}):\ x_0 \in I\}$$

覆盖了有界闭区间 $[a,b]$. 根据有限覆盖定理, 存在有限个点 $x_1, x_2, \cdots, x_m$, 使得有限个开集 $(x_1-\delta_{x_1}, x_1+\delta_{x_1}), (x_2-\delta_{x_2}, x_2+\delta_{x_2}), \cdots, (x_m-\delta_{x_m}, x_m+\delta_{x_m})$ 就已经覆盖了区间 $[a,b]$, 即

$$[a,b] \subseteq \bigcup_{k=1}^{m}(x_k-\delta_{x_k}, x_k+\delta_{x_k}).$$

于是应用定理 11.1.1 结论 (2) 即知 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在整个区间 $[a,b]$ 上一致收敛于 f. 证毕.

11.1.3 一致收敛函数序列的性质

借助于一致收敛的概念, 就能从函数序列中每一项都具有的分析性质在很大的程度上推断出极限函数的相应性质. 下面逐个考虑怎样从函数序列中每一项的连续性、可微性和可积性, 来推断极限函数相应的连续性、可微性和可积性.

定理 11.1.5(阿贝尔连续性定理) 设函数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 中的每一项都在区间 I 上连续, 它在 I 上逐点收敛于函数 f. 则有下列结论:

(1) 如果 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在某个点 $x_0 \in I$ 附近局部一致收敛于 f, 则 f 在点 x_0 连续;

(2) 如果对任意有界闭区间 $[a,b] \subseteq I$, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 都在 $[a,b]$ 上一致收敛于 f, 则 f 在区间 I 上连续. 特别地, 如果 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 I 上一致收敛于 f, 则 f 在 I 上连续.

证明 (1) 需要证明: 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在相应的 $\delta > 0$, 使对任意 $x \in I$, 只要 $|x-x_0| < \delta$, 就有

$$|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon.$$

有

$$|f(x)-f(x_0)| \leqslant |f(x)-f_n(x)| + |f_n(x)-f_n(x_0)| + |f_n(x_0)-f(x_0)|.$$

因为 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在点 $x_0 \in I$ 附近局部一致收敛于 f, 所以存在 $\delta_0 > 0$, 使 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $(x_0-\delta_0, x_0+\delta_0)\bigcap I$ 上一致收敛于 f, 从而对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在相应的 N, 使当 $n > N$ 时,

$$|f_n(x)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \forall x \in (x_0-\delta_0, x_0+\delta_0)\bigcap I.$$

现在取定一个正整数 $n > N$ (可取 $n = N+1$), 应用 f_n 的连续性知, 对上述 $\varepsilon > 0$, 存在相应的 $\delta > 0$, 使对任意 $x \in I$, 只要 $|x - x_0| < \delta$, 就有

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

不妨设 $\delta \leqslant \delta_0$ (否则用 δ_0 替代 δ). 则对任意 $x \in I$, 只要 $|x - x_0| < \delta$, 就有

$$\begin{aligned}|f_n(x) - f(x)| \leqslant& |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ <& \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

所以 f 在点 x_0 连续.

(2) 由给定的条件不难推知, 对任意一点 $x_0 \in I$, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 都在点 x_0 附近局部一致收敛于 f. 事实上, 如果 x_0 是区间 I 的内点 (x_0 不是 I 的端点), 则存在 $\delta > 0$, 使 $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subseteq I$, 于是由给定的条件知 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ 上一致收敛于 f, 当然更在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上一致收敛于 f; 如果 x_0 是区间 I 的端点, 不妨设 x_0 是 I 的右端点, 则存在 $\delta > 0$, 使 $[x_0 - \delta, x_0] \subseteq I$, 于是由给定的条件知 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[x_0 - \delta, x_0]$ 上一致收敛于 f, 当然更在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \bigcap I = (x_0 - \delta, x_0]$ 上一致收敛于 f. 因此由结论 (1) 知 f 在点 x_0 连续. 由于 x_0 是区间 I 中任意一点, 所以 f 在 I 上连续. 证毕.

以上定理表明, 如果函数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 x_0 附近局部一致收敛, 则

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x).$$

即在局部一致收敛的前提下, 两个极限运算可以交换次序.

定理 11.1.6　设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是定义在区间 $[a, b]$ 上的一个可微函数列, 且满足以下两个条件:

(1) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[a, b]$ 上逐点收敛于函数 f;

(2) 导函数列 $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于函数 g.

则 f 在 $[a, b]$ 上可微, 其导数 $f' = g$, 且 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 f.

证明　先证明 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 f. 为此任意取定一点 $x_0 \in [a, b]$. 由于 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[a, b]$ 上逐点收敛于 f, 所以 $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x_0) = f(x_0)$. 因此由数列收敛的柯西准则知, 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N_1, 使当 $m, n > N_1$ 时,

$$|f_m(x_0) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{11.1.5}$$

又由于 $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 g, 根据一致收敛的柯西准则知, 存在正整数 N_2 使当 $m, n > N_2$ 时, 对任意 $x \in [a, b]$ 有

$$|f_m'(x) - f_n'(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \tag{11.1.6}$$

对函数 $f_m - f_n$ 应用微分中值定理, 据此推知当 $m,n > N_2$ 时, 对任意 $x,y \in [a,b]$ 亦有

$$|[f_m(x) - f_n(x)] - [f_m(y) - f_n(y)]| < \frac{|x-y|\varepsilon}{2(b-a)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (11.1.7)$$

特别取 $y = x_0$, 则从式 (11.1.5) 和式 (11.1.7) 就得到当 $m,n > N = \max\{N_1, N_2\}$ 时, 对任意 $x \in [a,b]$ 有

$$\begin{aligned} |f_m(x) - f_n(x)| &\leqslant |[f_m(x) - f_n(x)] - [f_m(x_0) - f_n(x_0)]| + |f_m(x_0) - f_n(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

于是再次应用一致收敛的柯西准则即知, 存在定义在 $[a,b]$ 上的函数 $\tilde{f}$ 使得 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $\tilde{f}$. 因为一致收敛蕴涵着逐点收敛, 所以 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[a,b]$ 上也逐点收敛于 $\tilde{f}$. 这样应用条件 (1) 和极限的唯一性即知 $\tilde{f} = f$. 因此 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 f.

再来证明 f 在 $[a,b]$ 上可微, 且其导数 $f' = g$. 设 x_0 是区间 $[a,b]$ 中的任意一点. 考虑定义在 $[a,b]$ 上的函数列 h_n:

$$h_n(x) = \begin{cases} \dfrac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}, & \text{当 } x \neq x_0, \\ f_n'(x_0), & \text{当 } x = x_0, \end{cases} \qquad n = 1, 2, \cdots,$$

以及函数 h:

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, & \text{当 } x \neq x_0, \\ g(x_0), & \text{当 } x = x_0. \end{cases}$$

由于 f_n 是 $[a,b]$ 上的可微函数, 所以 h_n 在 $[a,b]$ 上连续. 把式 (11.1.7) 中的第一个不等式应用于 $y = x_0$, 即知当 $m,n > N_2$ 时, 对任意 $x \in [a,b]$ 有

$$|[f_m(x) - f_m(x_0)] - [f_n(x) - f_n(x_0)]| < \frac{|x - x_0|\varepsilon}{2(b-a)},$$

从而对任意 $x \in [a,b] \backslash \{x_0\}$, 不等式两端同除以 $|x - x_0|$ 就得到

$$|h_m(x) - h_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \qquad \text{当 } m,n > N_2.$$

而由式 (11.1.6)(取 $x = x_0$) 知这个不等式对 $x = x_0$ 也成立. 根据一致收敛的柯西准则, 这说明函数列 $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛. 由于由条件 (1) 和条件 (2) 知, 这个函数列在 $[a,b]$ 上逐点收敛于函数 h, 所以证明了 $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 h.

而已经知道每个 h_n 都在 $[a,b]$ 上连续, 所以应用定理 11.1.5 即知函数 h 也在 $[a,b]$ 上连续, 进而特别有 $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=h(x_0)$, 即

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=g(x_0).$$

这就证明了 f 在点 x_0 可微, 且 $f'(x_0)=g(x_0)$. 由于 x_0 是区间 $[a,b]$ 中的任意一点, 所以 f 在 $[a,b]$ 上可微, 且导函数 $f'=g$. 定理至此证毕.

以上定理表明, 如果函数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的导函数列 $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 则

$$[\lim_{n\to\infty} f_n(x)]'=\lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

即在导函数列一致收敛的前提下, 极限运算和求导运算可以交换次序. 从例 8 可知, 如果导函数列不一致收敛而只是逐点收敛, 那么即使函数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 本身是一致收敛的, 也不能得到上面的等式.

定理 11.1.7　设函数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 中的每一项都在区间 $[a,b]$ 上黎曼可积, 且 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 f. 则 f 也在区间 I 上黎曼可积, 且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x. \tag{11.1.8}$$

证明　先来证明 f 在区间 $[a,b]$ 上黎曼可积. 根据达布准则, 只需证明: 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在相应的 $\delta>0$, 使对区间 $[a,b]$ 的任意一个分割 $\varDelta$:

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_m=b,$$

只要 $\|\varDelta\|=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant m}\Delta x_k<\delta$, 就有

$$\sum_{k=1}^{m}\omega_k(f)\Delta x_k<\varepsilon,$$

其中 $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$, 而 $\omega_k(f)$ 表示函数 f 在第 k 个小区间 $[x_{k-1},x_k]$ 上的振幅

$$\omega_k(f)=\sup_{x,y\in[x_{k-1},x_k]}|f(x)-f(y)|,\qquad k=1,2,\cdots,m.$$

对任意给定的 $\varepsilon>0$, 由 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 f 知, 存在正整数 N, 使当 $n>N$ 时, 对任意 $x\in[a,b]$ 都有

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3(b-a)}.$$

任意取定一个正整数 $n>N$. 对区间 $[a,b]$ 的任意一个分割 $\varDelta$, 借助 f_n 在第 k 个小区间 $[x_{k-1},x_k]$ 上的振幅 $\omega_k(f_n)$ 来对 f 在第 k 个小区间 $[x_{k-1},x_k]$ 上的振幅 $\omega_k(f)$ 做估计. 为此注意对任意 $x,y\in[a,b]$, 由上面得到的不等式有

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(y)|+|f_n(y)-f(y)|$$

$$\leqslant \frac{2\varepsilon}{3(b-a)} + |f_n(x) - f_n(y)|.$$

因此, 通过对所有 $x, y \in [x_{k-1}, x_k]$ 取上确界就得到

$$\omega_k(f) \leqslant \frac{2\varepsilon}{3(b-a)} + \omega_k(f_n), \qquad k = 1, 2, \cdots, m.$$

据此得到

$$\sum_{k=1}^{m} \omega_k(f)\Delta x_k \leqslant \frac{2\varepsilon}{3} + \sum_{k=1}^{m} \omega_k(f_n)\Delta x_k.$$

现在应用 f_n 的可积性, 可知对前述给定的 $\varepsilon > 0$, 存在相应的 $\delta > 0$, 使得只要分割 Δ 满足 $\|\Delta\| < \delta$, 就有

$$\sum_{k=1}^{m} \omega_k(f_n)\Delta x_k < \frac{\varepsilon}{3}.$$

结合以上两个不等式即知, 只要分割 Δ 满足 $\|\Delta\| < \delta$, 就有

$$\sum_{k=1}^{m} \omega_k(f)\Delta x_k < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

因此 f 在 $[a, b]$ 上黎曼可积.

最后证明等式 (11.1.8). 对任意正整数 n 我们有

$$\left|\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x.$$

由于 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 f, 所以对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在相应的正整数 N, 使当 $n > N$ 时, 对任意 $x \in [a, b]$ 都有

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

这样当 $n > N$ 时就有

$$\left|\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon.$$

因此 (11.1.8) 成立. 证毕.

以上定理表明, 如果可积函数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛, 则极限函数也可积, 且

$$\int_a^b [\lim_{n\to\infty} f_n(x)]\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x.$$

即在一致收敛的前提下, 极限运算和积分运算可以交换次序. 由例 5 知, 一致收敛的条件是不能被逐点收敛的条件所替代的. 不过, 后面将会看到, 如果仅限于使这个等式成立, 那么一致收敛的条件可以被其他比较弱的条件代替.

习　题　11.1

1. 证明函数序列 $f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 在区间 I 上一致收敛于函数 $f(x)$ 的充要条件是存在收敛于零的正数列 ε_n $(n=1,2,\cdots)$ 使成立

$$|f_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon_n,\quad \forall x\in I,\quad n=1,2,\cdots.$$

2. 证明 $f_n(x)$ 在 I 上不一致收敛于 $f(x)$ 的充要条件是存在点列 $x_n\in I$ $(n=1,2,\cdots)$ 使当 $n\to\infty$ 时, $f_n(x_n)-f(x_n)\not\to 0$.

3. 研究下列函数序列在指定区间上是否一致收敛, 并给出证明:

(1) $f_n(x)=x^n$, $n=1,2,\cdots$.

① $0\leqslant x\leqslant a$ $(0<a<1)$,　　② $0\leqslant x<1$,

(2) $f_n(x)=\dfrac{x^n}{1+x^n}$, $n=1,2,\cdots$.

① $0\leqslant x\leqslant a$ $(0<a<1)$,　　② $a\leqslant x\leqslant b$ $(0<a<1<b)$,

③ $b\leqslant x<+\infty$ $(b>1)$;

(3) $f_n(x)=\dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$, $n=1,2,\cdots$.

① $0\leqslant x\leqslant 1$,　　② $1\leqslant x<+\infty$,

(4) $f_n(x)=\mathrm{e}^{-(x-n)^2}$, $n=1,2,\cdots$.

① $a\leqslant x\leqslant b$ $(-\infty<a<b<+\infty)$,　　② $-\infty<x<+\infty$,

(5) $f_n(x)=\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$, $n=1,2,\cdots$.

① $a\leqslant x\leqslant b$ $(-\infty<a<b<+\infty)$,　　② $-\infty<x<+\infty$,

(6) $f_n(x)=n\left(\sqrt{x+\dfrac{1}{n}}-\sqrt{x}\right)$, $n=1,2,\cdots$.

① $a\leqslant x<+\infty$ $(a>0)$,　　② $0<x<+\infty$.

4. 设 $\{f_n(x)\}$ 和 $\{g_n(x)\}$ 都在 I 上一致收敛, 且对每个 n, $f_n(x)$ 和 $g_n(x)$ 都是 I 上的有界函数. 证明: $\{f_n(x)g_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛.

5. 设 $\{f_n(x)\}$ 在区间 I 上一致收敛于 $f(x)$, 且对每个 n, $f_n(x)$ 都是 I 上的有界函数, 值域含于闭区间 J. 又设 $g(x)$ 是 J 上的连续函数. 证明: $\{g(f_n(x))\}$ 在 I 上一致收敛于函数 $g(f(x))$.

6. 设存在收敛的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}M_n$ 使成立

$$|f_{n+1}(x)-f_n(x)|\leqslant M_n,\quad \forall x\in I,\quad n=1,2,\cdots.$$

证明: $f_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

7. 设 $\{f_n(x)\}$ 在有界闭区间 I 上逐点收敛于函数 $f(x)$, 且存在 $M>0$ 和 $0<\alpha\leqslant 1$ 使成立

$$|f_n(x)-f_n(y)|\leqslant M|x-y|^{\alpha},\quad \forall x,y\in I,\quad n=1,2,\cdots.$$

证明: $f_n(x)$ 在 I 上一致收敛于 $f(x)$.

8. 设 $\{f_n(x)\}$ 是区间 $[a,b]$ 上的一列单调函数, 且在 $[a,b]$ 上逐点收敛于连续函数 $f(x)$. 证明: $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

9. 设对每个正整数 n, 函数 $f_n(x)$ 在区间 I 上有界. 又设当 $n\to\infty$ 时, $f_n(x)$ 在 I 上一致收敛于 $f(x)$. 证明:
   (1) 极限函数 $f(x)$ 在 I 上有界;
   (2) 函数序列 $f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 在 I 上一致有界. 即存在 $M>0$ 使对所有 n 都有

$$|f_n(x)|\leqslant M,\quad \forall x\in I.$$

10. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上黎曼可积, 且在左端点 0 处右连续. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}f(0).$$

11. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有界, 且对任意 $a>0$, $f(x)$ 都在 $[0,a]$ 上黎曼可积. 又设 $f(x)$ 在左端点 0 处右连续. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}n\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x=f(0).$$

12. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续. 令

$$f_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(x+\frac{1}{n}\right),\qquad n=1,2,\cdots.$$

证明: 对任意有界闭区间 $[a,b]\subseteq I$, $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛. 并举例说明, $f_n(x)$ 不必在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

11.2 魏尔斯特拉斯逼近定理和阿尔采拉–阿斯科利定理

本节介绍三个重要定理, 包括两个逼近定理和一个紧致性定理. 两个逼近定理中的一个告诉我们, 有界闭区间上的连续函数可用多项式函数列一致逼近, 另一个则保证了连续的周期函数可用三角多项式列一致逼近. 这两个定理是由魏尔斯特拉斯发现的, 通常叫做**魏尔斯特拉斯逼近定理**. 本节将要介绍的另一重要定理是一个紧致性定理, 叫做**阿尔采拉–阿斯科利定理** (阿尔采拉, Cesare Arzelà, 1847~1912; 阿斯科利, Giulio Ascoli, 1843~1896. 二人均为巴西人). 这个定理告诉我们, 有界闭区间上一致有界并且等度连续的函数序列必有一致收敛的子序列. 这些定理都很重要, 在一些理论问题的分析中起着重要的作用.

11.2.1　魏尔斯特拉斯第一逼近定理

考虑连续函数用多项式函数列逼近的问题. 多项式函数是所有函数中最简单的函数, 因为它们只涉及实数的加、减、乘、除四则运算, 而不涉及更复杂的其他运算, 因此函数值最容易计算. 它们的性质也最好把握. 对于其他比较复杂的函数, 能否用多项式函数列做逼近? 如果可以, 那么就有可能通过研究多项式来研究其他函数. 5.7 节已经看到, 只要一个函数有足够高阶的导数, 就可借助泰勒展开用多项式作足够近似的逼近. 但是这种逼近方法需要函数有足够高阶的导数, 因而不能用来处理不可导的函数. 下述定理保证了只要一个函数在一个有界闭区间上连续, 就可在这个区间上用多项式函数列一致逼近.

定理 11.2.1(魏尔斯特拉斯第一逼近定理)　设 f 是有界闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数. 则对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在多项式 $P(x)$ 使成立

$$|f(x)-P(x)|<\varepsilon, \qquad \forall x\in[a,b], \tag{11.2.1}$$

且 $P(a)=f(a)$, $P(b)=f(b)$.

注　特别地, 对任意正整数 n, 取 $\varepsilon=\dfrac{1}{n}$, 则由以上定理知存在一个多项式, 记作 $P_n(x)$, 使成立

$$|f(x)-P_n(x)|<\varepsilon, \qquad \forall x\in[a,b],$$

这说明存在一个多项式序列 $\{P_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, 它在区间 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$. 所以连续函数可用多项式函数一致逼近. 事实上容易看出, “存在一个多项式函数列 $\{P_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, 它在区间 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$” 这个命题, 是和 “对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在多项式 $P(x)$ 使式 (11.2.1) 成立” 相等价的.

对于定理 11.2.1, 只需就 $[a,b]=[0,1]$ 的情况证明. 这是因为, 如果对区间 $[0,1]$ 已证, 那么对任意有界闭区间 $[a,b]$, 通过作变元变换 $y=\dfrac{x-a}{b-a}$, 即令

$$g(y)=f(a+(b-a)y), \qquad y\in[0,1],$$

就化归到区间 $[0,1]$ 的情况: 对函数 $g(y)$ 应用对区间 $[0,1]$ 已证明的定理 11.2.1, 可知对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在多项式 $Q(y)$ 使成立

$$|g(y)-Q(y)|<\varepsilon, \qquad \forall y\in[0,1].$$

令$P(x)=Q\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)$. 则因 $f(x)=g\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)$, 从上式即知式 (11.2.1) 成立. 因为一个多项式经过变元变换 $y=\dfrac{x-a}{b-a}$ 仍然是一个多项式, 所以 $P(x)$ 是多项式. 这就得到了一般有界闭区间 $[a,b]$ 上的结论.

对于 $[a,b]=[0,1]$ 的情况, 函数 f 的一致逼近多项式序列可以取为下列**伯恩斯坦多项式**(见图 11-2-1)

$$B_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f\left(\frac{k}{n}\right)x^k(1-x)^{n-k},\qquad x\in[0,1].$$

显然 $B_n(f,0)=f(0)$, $B_n(f,1)=f(1)$. 为了证明当 $n\to\infty$ 时, $B_n(f,x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 $f(x)$, 先证明

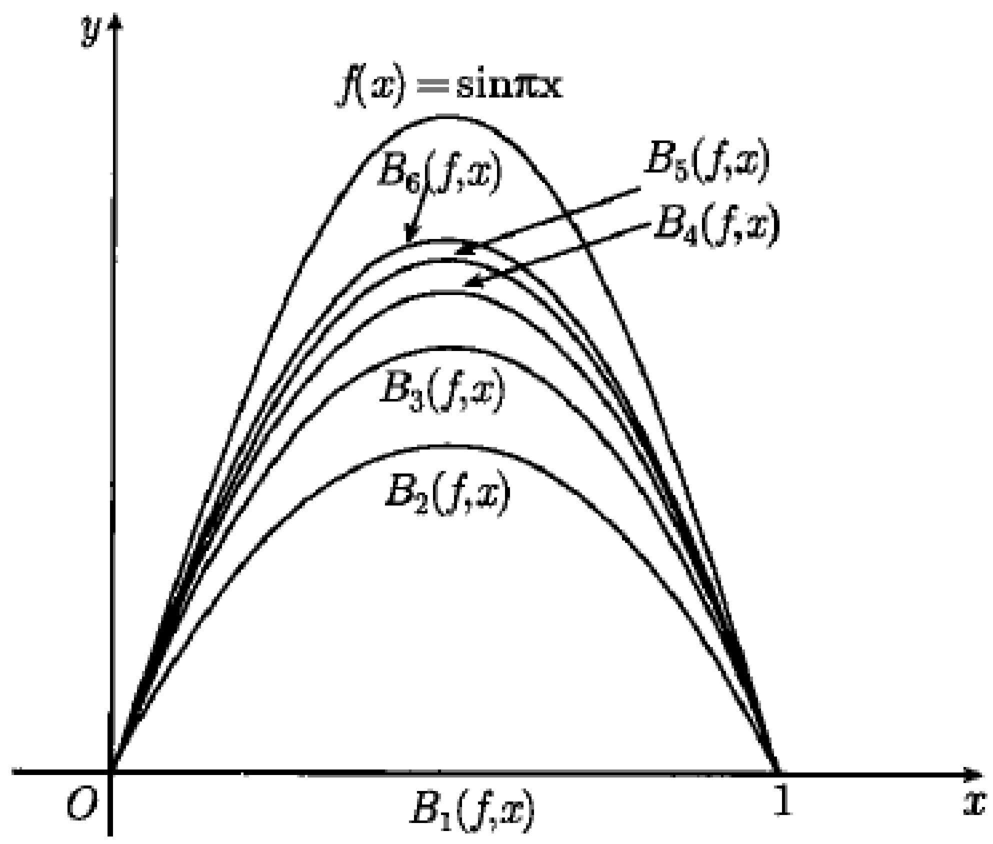


图 11-2-1　函数 $y=\sin\pi x$ 的伯恩斯坦多项式

引理 11.2.1　对任意实数 $x\in[0,1]$ 和任意正整数 n, 成立下列不等式

$$\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\leqslant\frac{n}{4}.\tag{11.2.2}$$

证明　根据二项式定理, 有

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k}.$$

关于 x 求导, 再乘以 x, 得

$$nx(x+y)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^ky^{n-k}.$$

而关于 x 求导两次, 再乘以 x^2, 又得

$$n(n-1)x^2(x+y)^{n-2}=\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}x^ky^{n-k}.$$

记 $p_{nk}(x)=\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$. 在以上三个恒等式中取 $y=1-x$, 就得到

$$\sum_{k=0}^{n}p_{nk}(x)=1,\qquad\sum_{k=0}^{n}kp_{nk}(x)=nx,\qquad\sum_{k=0}^{n}k(k-1)p_{nk}(x)=n(n-1)x^2.$$

因此

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\
=&n^2x^2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}-2nx\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\
&+\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\
=&n^2x^2-2nx\cdot nx+[n(n-1)x^2+nx]\\
=&nx(1-x).
\end{aligned}$$

由平均值不等式知 $x(1-x)\leqslant\left[\dfrac{x+(1-x)}{2}\right]^2=\dfrac{1}{4}$, 代入上式即得 (11.2.2). 证毕.

定理 11.2.1 的证明 如前所述, 只需证明当 $n\to\infty$ 时, f 的伯恩斯坦多项式 $B_n(f,x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 $f(x)$. 由于

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=1,\qquad \forall x\in[0,1],$$

所以有

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}f(x)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k},\qquad \forall x\in[0,1],$$

因此

$$|f(x)-B_n(f,x)|\leqslant\sum_{k=0}^{n}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k},\qquad \forall x\in[0,1].\tag{11.2.3}$$

对任意给定的 $\varepsilon>0$, 由于函数 f 在区间 $[0,1]$ 上连续进而一致连续, 所以存在 $\delta>0$, 使对任意 $x,y\in[0,1]$, 只要 $|x-y|<\delta$, 就有

$$|f(x)-f(y)|<\frac{1}{2}\varepsilon.\tag{11.2.4}$$

对每个 $x\in[0,1]$, 把式 (11.2.3) 右端的和分为两部分, 一部分是关于所有满足 $\left|\dfrac{k}{n}-x\right|<\delta$ 的 k (这样的整数 $0\leqslant k\leqslant n$ 的集合记作 A_x) 求和, 另一部分是关于所有满足 $\left|\dfrac{k}{n}-x\right|\geqslant\delta$ 的 k (这样的整数 $0\leqslant k\leqslant n$ 的集合记作 B_x) 求和. 根据式 (11.2.4), 对第一部分的和有

$$\sum_{k\in A_x}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}<\frac{1}{2}\varepsilon\sum_{k\in A_x}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\leqslant\frac{1}{2}\varepsilon.$$

因为函数 f 在区间 $[0,1]$ 上连续进而有界, 所以可设 $|f(x)|\leqslant M$, $\forall x\in[0,1]$. 由于对所有 $k\in B_x$ 有 $|k-nx|\geqslant n\delta$, 可知 $\dfrac{(k-nx)^2}{n^2\delta^2}\geqslant 1$, 所以对第二部分的和有

$$\begin{aligned}\sum_{k\in B_x}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\leqslant&2M\sum_{k\in B_x}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\ \leqslant&\frac{2M}{n^2\delta^2}\sum_{k\in B_x}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\ \leqslant&\frac{2M}{n^2\delta^2}\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\ \leqslant&\frac{2M}{n^2\delta^2}\cdot\frac{n}{4}=\frac{M}{2n\delta^2}.\end{aligned}$$

现在对前述给定的 $\varepsilon>0$, 取正整数 N 充分大使当 $n>N$ 时有 $\dfrac{M}{2n\delta^2}<\dfrac{1}{2}\varepsilon$, 即知当 $n>N$ 时第二部分的和 $<\dfrac{1}{2}\varepsilon$. 因此, 当 $n>N$ 时, 对任意 $x\in[0,1]$ 都有

$$\begin{aligned}|f(x)-B_n(f,x)|\leqslant&\sum_{k\in A_x}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\ &+\sum_{k\in B_x}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\ <&\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon=\varepsilon.\end{aligned}$$

这就证明了 $B_n(f,x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 $f(x)$. 证毕.

推论 11.2.1 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上 m 阶连续可微, m 是正整数. 则对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在多项式 $P(x)$, 使对所有正整数 $k\leqslant m$ 都成立

$$|f^{(k)}(x)-P^{(k)}(x)|<\varepsilon,\qquad \forall x\in[a,b].$$

证明 对函数 $f^{(m)}(x)$ 应用定理 11.2.1, 可知对任意给定的 $\varepsilon_1>0$, 存在多项式 $P_0(x)$, 使成立

$$|f^{(m)}(x)-P_0(x)|<\varepsilon_1,\qquad \forall x\in[a,b].$$

对任意 $x\in(a,b]$, 在区间 $[a,x]$ 上积分这个不等式, 就得到

$$|f^{(m-1)}(x)-P_1(x)|<(b-a)\varepsilon_1,\qquad \forall x\in[a,b],$$

其中 $P_1(x)=\displaystyle\int_a^x P_0(y)\mathrm{d}y+f^{(m-1)}(a)$. 显然 $P_1(x)$ 仍然是多项式. 重复这个过程 $m-1$ 次, 即知对每个正整数 $0\leqslant j\leqslant m$, 存在多项式 $P_j(x)$ 使成立

$$|f^{(m-j)}(x)-P_j(x)|<(b-a)^j\varepsilon_1,\qquad \forall x\in[a,b].$$

其中 $P_j(x)$ 归纳地定义为

$$P_j(x)=\int_a^x P_{j-1}(y)\mathrm{d}y+f^{(m-j)}(a),\qquad j=1,2,\cdots,m.$$

显然有 $P_j'(x) = P_{j-1}(x)$, $j = 1, 2, \cdots, m$. 现在改记 $P(x) = P_m(x)$, 则易见 $P^{(k)}(x) = P_{m-k}(x)$, $k = 1, 2, \cdots, m$. 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 令 $\varepsilon_1 = \varepsilon \max\limits_{0 \leqslant k \leqslant m}(b-a)^{-k}$, 然后应用以上推导所得结论, 就得到所需证明的结论. 证毕.

11.2.2　魏尔斯特拉斯第二逼近定理

具有表示式

$$T_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{11.2.5}$$

的函数 $T_n(x)$ 叫做 2π 周期的n **阶三角多项式**, 其中 a_0, a_k, b_k $(k = 1, 2, \cdots, n)$ 都是实常数, 并且 a_n 和 b_n 中至少有一个非零. 这里把常数项写成 $\dfrac{1}{2}a_0$ 而不写成 a_0, 是为了以后研究傅里叶级数的方便. 显然 $T_n(x)$ 是 2π 周期的周期函数, 即

$$T_n(x + 2\pi) = T_n(x), \qquad \forall x \in (-\infty, +\infty).$$

应用三角函数的倍角公式

$$\begin{aligned}
&\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \qquad \sin 2x = 2\sin x \cos x,\\
&\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x, \qquad \sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x,\\
&\cos nx = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n}{2k} (-1)^k \sin^{2k} x \cos^{n-2k} x,\\
&\sin nx = \sum_{k=0}^{[\frac{n+1}{2}]-1} \binom{n}{2k+1} (-1)^k \sin^{2k+1} x \cos^{n-2k-1} x,
\end{aligned}$$

可以把 $T_n(x)$ 的表达式 (11.2.5) 改写成另外一种形式

$$T_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{k} a_{jk} \sin^j x \cos^{k-j} x, \tag{11.2.6}$$

其中 $a_{jk}(j, k = 1, 2, \cdots, n)$ 都是实常数. 反过来, 反复应用积化和差公式

$$\begin{aligned}
\cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)],\\
\cos\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)],\\
\sin\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)],
\end{aligned}$$

又可把表达式 (11.2.6) 改写成式 (11.2.5) 的形式. 因此两个表面看起来不一样的表达式 (11.2.5) 和式 (11.2.6), 其实是一致的. "n 阶三角多项式" 中 "n 阶" 和 "多项式" 的概念, 就是从表达式 (11.2.6) 得来的, 因为式 (11.2.6) 是 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的 n 阶多项式.

对任意给定的 $T > 0$, 称具有表示式

$$F_n(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos\frac{2k\pi x}{T}+b_k\sin\frac{2k\pi x}{T}\right)$$

的函数 $F_n(x)$ 为 T 周期的三角多项式. 显然 $F_n(x)$ 是 T 周期的周期函数. 由于通过简单的变元变换 $y=\dfrac{2\pi x}{T}$, 可以把 T 周期的周期函数 $f(x)$ 转化为 2π 周期的周期函数 $g(y)=f\left(\dfrac{Ty}{2\pi}\right)$, 所以下面只考虑 2π 周期的周期函数, 即假定 $T=2\pi$.

2π 周期的三角多项式 (以下简称三角多项式) 是最简单的 2π 周期函数. 于是, 自然地希望能够把任意的 2π 周期连续函数用三角多项式函数列来一致逼近. 这种可能性由下述定理保证.

定理 11.2.2(魏尔斯特拉斯第二逼近定理)　设 $f(x)$ 是连续的 2π 周期函数. 则对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在三角多项式 $Q(x)$ 使成立

$$|f(x)-Q(x)|<\varepsilon,\qquad \forall x\in(-\infty,+\infty). \tag{11.2.7}$$

证明　分三步来证明这个定理.

(1) 先证明如果 f 是连续的 2π 周期偶函数, 则存在偶三角多项式 $Q(x)$, 即只含余弦函数的三角多项式, 使式 (11.2.7) 成立.

因为 f 是区间 $[0,\pi]$ 上的连续函数, 所以 $f(\arccos y)$ 是区间 $[-1,1]$ 上的连续函数. 因此, 根据定理 11.2.1, 存在多项式 $P(y)$ 使成立

$$|f(\arccos y)-P(y)|<\varepsilon,\qquad \forall y\in[-1,1],$$

进而成立

$$|f(x)-P(\cos x)|<\varepsilon,\qquad \forall x\in[0,\pi].$$

由于 $f(x)$ 和 $P(\cos x)$ 都是偶函数且都是 2π 周期函数, 所以上式对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$ 都成立.

(2) 现在设 f 是任意一个连续的 2π 周期函数. 先证明: 存在三角多项式 $Q_1(x)$ 使成立

$$|f(x)\sin^2 x-Q_1(x)|<\varepsilon,\qquad \forall x\in(-\infty,+\infty). \tag{11.2.8}$$

为此令

$$g(x)=f(x)+f(-x),\qquad h(x)=[f(x)-f(-x)]\sin x.$$

则 g 和 h 都是连续的 2π 周期偶函数, 所以应用第一步证明得到的结论知, 存在三角多项式 $T_1(x)$ 和 $T_2(x)$ 使成立

$$|g(x)-T_1(x)|<\varepsilon,\qquad \forall x\in(-\infty,+\infty), \tag{11.2.9}$$

$$|h(x)-T_2(x)|<\varepsilon,\qquad \forall x\in(-\infty,+\infty), \tag{11.2.10}$$

式 (11.2.9) 乘以 $\sin^2 x$、式 (11.2.10) 乘以 $|\sin x|$, 然后相加, 注意到 $\varepsilon\sin^2 x+\varepsilon|\sin x|\leqslant 2\varepsilon$, 就得到

$$|2f(x)\sin^2 x-[T_1(x)\sin^2 x+T_2(x)\sin x]|<2\varepsilon,\qquad \forall x\in(-\infty,+\infty).$$

令$Q_1(x)=\frac{1}{2}[T_1(x)\sin^2 x+T_2(x)\sin x]$, 则就得到了式 (11.2.8).

(3) 最后来证明定理的结论. 对函数 $f(x-\frac{\pi}{2})$ 应用第二步的结论, 可知存在三角多项式 $Q_2(x)$ 使成立

$$\left|f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin^2 x-Q_2(x)\right|<\varepsilon,\qquad \forall x\in(-\infty,+\infty).$$

在此式中作变元变换 $x-\frac{\pi}{2}=y$, 变换后的变元仍用 x 而不用 y, 并记 $Q_3(x)=Q_2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, 则 $Q_3(x)$ 仍然是一个三角多项式, 而得到了

$$|f(x)\cos^2 x-Q_3(x)|<\varepsilon,\qquad \forall x\in(-\infty,+\infty). \tag{11.2.11}$$

现在令 $Q(x)=Q_1(x)+Q_3(x)$, 并把式 (11.2.8) 和式 (11.2.11) 相加, 则就得到了不等式 (11.2.7). 证毕.

以上证明是一个存在性的证明, 而不是构造性的证明, 即没有如定理 11.2.1 的证明那样, 给出用于一致逼近函数 $f(x)$ 的三角多项式序列 $\{Q_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 的具体表达式, 只是论证了它的存在性. 11.4 节例 2 中将给出这个定理的一个构造性的证明.

11.2.3　阿尔采拉–阿斯科利定理

在数列的极限理论中有一个重要的定理, 即致密性原理, 或称波尔查诺–魏尔斯特拉斯定理. 这个定理表明, 任意有界数列都有收敛的子数列. 我们在前面几章中已经多次应用这个定理解决了一些重要的理论问题. 从这些应用可以看到, 从一个数列能够选取到收敛的子数列是十分重要的. 基于此, 学习了函数序列极限的概念之后, 自然会想到考虑下述问题: 对于函数序列是否也有类似的定理? 即是否每个逐点有界的函数序列都有按某种意义收敛 (如逐点收敛) 的子序列? 可以举出例子说明, 这个问题的答案是否定的, 即仅逐点有界的条件是不足以保证函数序列有收敛的子序列的, 甚至于把逐点有界的条件加强为由下面定义 11.3.1 给出的一致有界, 仍然不足以保证函数序列有逐点收敛的子序列. 本小节的目的是要证明: 只要对函数序列在逐点有界的条件之外再增加 "等度连续" 的条件, 就可以保证它有一致收敛的子序列, 这就是著名的**阿尔采拉–阿斯科利定理**. 在证明这个定理之前先给出函数序列一致有界和等度连续的定义.

定义 11.3.1　设 E 是一个非空的实数集合, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 E 上的一列函数. 如果对任意 $x\in E$, 数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 都是有界数列, 则称函数序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 E 上**逐点有界**; 如果存在常数 $M>0$ 使成立

$$|f_n(x)|\leqslant M,\quad \forall x\in E,\quad n=1,2,\cdots,$$

则称 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 E 上**一致有界**.

定义 11.3.2　设 I 是一个区间, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 I 上的一列连续函数. 如果对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在相应的 $\delta>0$, 使对任意 $x,y\in I$, 只要 $|x-y|<\delta$, 就有

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

则称函数序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 I 上**等度一致连续**. 特别, 如果 I 是有界闭区间, 则简称 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 I 上**等度连续**.

根据这个定义, 显然在 I 上等度一致连续的函数列中的每个函数都在 I 上是一致连续的. 需要说明的是, 类似于逐点有界的概念, 也可引进 "逐点等度连续" 的概念, 见本节习题 11. 但是对于有界闭区间, 应用有限覆盖定理不难证明, 逐点等度连续蕴涵着等度一致连续. 这就是在有界闭区间上把等度一致连续简称为等度连续的原因.

对于有界闭区间上的连续函数列而言, 一致收敛蕴涵着一致有界和等度连续.

引理 11.2.2 设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是在有界闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛的连续函数序列. 则 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[a,b]$ 上一致有界并且等度连续.

这个引理的证明留给读者作为习题.

本小节的主要目的是证明以下定理.

定理 11.2.3(阿尔采拉–阿斯科利) 有界闭区间 $[a,b]$ 上逐点有界并且等度连续的连续函数列必有在 $[a,b]$ 上一致收敛的子序列.

这个定理的证明思想如下. 设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是在 $[a,b]$ 上逐点有界并且等度连续的一个连续函数序列. 对每点 $x \in [a,b]$, 数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 都是有界数列, 因此根据波尔查诺–魏尔斯特拉斯致密性原理知它有收敛的子数列. 但是因为对不同的点, 这样得到的子数列可能是由 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的不同子列在这些点处取值得到的, 所以不能据此断定 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有子列在 $[a,b]$ 上一致收敛, 甚至连在 $[a,b]$ 上逐点收敛的子序列也保证不了. 为了克服这个困难, 选取区间 $[a,b]$ 的一个子集 E, 它具有以下两个性质: (1) E 中的点能够排列成一个数列, 即 $E = \{x_1, x_2, \cdots\}$; (2)E 在 $[a,b]$ 中稠密, 即对每个点 $x \in [a,b]$, 都存在 E 的一个子列收敛于 x. 有了这样的集合 E, 便可先取 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的一个子列使其在点 x_1 收敛, 然后再取这个子列的一个子列使其在点 x_2 收敛, 然后再取这个子列的子列的一个子列使其在点 x_3 收敛, 等等. 如此归纳地进行, 就可以得到 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的一列子列, 其中的每个子列都是前一个子列的子列, 使得第 m 个子列在点 x_m 收敛, 因而也在点 x_1, x_2, $\cdots$, x_{m-1} 收敛. 这样采用后面将要介绍的康托尔对角线方法, 便可得到 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的一个子列, 它在 E 中的每个点 x_1, x_2, $\cdots$ 都收敛. 再应用 E 在 $[a,b]$ 中的稠密性和序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[a,b]$ 上的等度连续性, 便可证明最后得到的这个子列在 $[a,b]$ 上逐点收敛. 而将要证明, 逐点收敛加等度连续可以保证一致收敛, 从而就完成了定理的证明.

为了避免对如何把集合 E 中的点排列成一个数列做太多的讨论, 下面对上述证明思想的第一步稍作变动. 另外, 为使证明的思路更加明晰清楚, 我们把整个证明分解为几个引理来完成.

引理 11.2.3 设函数序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在有限集合 $E = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$ 上逐点有界. 则它必有在 E 上逐点收敛的子序列.

证明　首先考虑数列 $\{f_n(x_1)\}_{n=1}^{\infty}$. 因为这是一个有界数列, 所以根据波尔查诺-魏尔斯特拉斯致密性原理知它有收敛的子数列. 设这个子数列对应的函数列的子列为 $\{f_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$. 再考虑数列 $\{f_{1,n}(x_2)\}_{n=1}^{\infty}$. 同样这是一个有界数列, 所以再次根据波尔查诺-魏尔斯特拉斯致密性原理知它有收敛的子数列. 设这个子数列对应的函数列的子列为 $\{f_{2,n}\}_{n=1}^{\infty}$. 因为 $\{f_{2,n}\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\{f_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$ 的子列, 所以 $\{f_{2,n}(x_1)\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{f_{2,n}(x_2)\}_{n=1}^{\infty}$ 都是收敛数列. 如此一直做下去, 经过 m 步之后, 就得到了函数序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的一个子列 $\{f_{m,n}\}_{n=1}^{\infty}$, 它在 E 的每个点都是收敛的, 从而得到了引理的结论. 证毕.

由于在有限点集上逐点收敛的函数列显然在此点集上一致收敛, 因此引理 11.2.3 所保证的子列实际上是在 E 上一致收敛的.

引理 11.2.4　设函数序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[a,b]$ 上等度连续. 又设 E 是 $[a,b]$ 的一个稠密子集, 使得 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 E 上逐点收敛. 则 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 也在 $[a,b]$ 上逐点收敛.

证明　令 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 E 上的极限函数为 f. 不难知道, f 在 E 上是一致连续的, 即对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在相应的 $\delta>0$, 使对任意 $x,y\in E$, 只要 $|x-y|<\delta$, 就有

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\varepsilon.$$

这只要把函数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 等度一致连续的定义式中的不等式令 $n\to\infty$ 取极限即可得到. 把 f 按下述方法延拓成 $[a,b]$ 上的函数: 对任意 $x\in[a,b]$, 由 E 在 $[a,b]$ 中的稠密性知存在 E 中的点列 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 使 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x$. 应用上述 f 在 E 上的连续性不难知道, $\{f(x_k)\}_{k=1}^{\infty}$ 是柯西数列, 因而有极限. 同样应用 f 在 E 上的连续性很易证明, 这个极限不依赖于点列 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 的选择, 即若另有 E 中的点列收敛于 x, 则 f 在这个点列上的值形成的数列与 $\{f(x_k)\}_{k=1}^{\infty}$ 有相同的极限. 因此定义

$$f(x)=\lim_{k\to\infty}f(x_k).$$

这样就把只定义在 E 上的函数 f 延拓到了整个 $[a,b]$ 上. 下面证明 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[a,b]$ 上逐点收敛于这样延拓后的函数 f. 事实上, 对任意 $x\in[a,b]$, 令 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为 E 中使 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x$ 的点列. 我们写

$$|f_n(x)-f(x)|\leqslant|f_n(x)-f_n(x_k)|+|f_n(x_k)-f(x_k)|+|f(x_k)-f(x)|.$$

对任意给定的 $\varepsilon>0$, 由 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x$, $\lim\limits_{k\to\infty}f(x_k)=f(x)$ 和函数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[a,b]$ 上的等度一致连续性知存在相应的正整数 K, 使当 $k>K$ 时有

$$|f(x_k)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3}\qquad\text{且}\qquad|f_n(x)-f_n(x_k)|<\frac{\varepsilon}{3},\qquad n=1,2,\cdots.$$

取定一个这样的 k, 然后应用关系式 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x_k)=f(x_k)$ (因为 $x_k\in E$) 可知存在正整数 N, 使当 $n>N$ 时有

$$|f_n(x_k) - f(x_k)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

把上面几个不等式结合起来, 即知当 $n > N$ 时有

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

这就证明了 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 $f(x)$. 证毕.

引理 11.2.5 设函数序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在区间 $[a,b]$ 上等度连续并且逐点收敛. 则它在此区间上一致收敛.

证明 设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[a,b]$ 上逐点收敛于函数 f. 为了证明 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 f, 只需证明对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在相应的正整数 N, 使当 $n > N$ 时, 对任意 $x \in [a,b]$ 都有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

首先, 由 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[a,b]$ 上等度连续知, 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在相应的 $\delta > 0$, 使对任意 $x, y \in [a,b]$, 只要 $|x-y| < \delta$, 就有

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad n = 1, 2, \cdots.$$

令 $n \to \infty$ 取极限可知对这样的 $x, y \in [a,b]$ 也成立

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

取正整数 m 充分大使得 $m > \frac{1}{\delta}(b-a)$, 然后把区间 $[a,b]$ 作 m 等分. 设分点为 x_0, $x_1, \cdots, x_m$, 即

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b \quad 且 \quad x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{m} < \delta, \quad i = 1, 2, \cdots, m.$$

令 $E = \{x_0, x_1, \cdots, x_m\}$. 由于 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 E 上逐点收敛而 E 是有限集, 所以它在 E 上一致收敛. 故对前述 $\varepsilon > 0$, 存在相应的正整数 N, 使当 $n > N$ 时有

$$|f_n(x_k) - f(x_k)| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad k = 0, 1, \cdots, m.$$

于是当 $n > N$ 时, 对任意 $x \in [a,b]$, 设它所属的小区间为 $[x_{i-1}, x_i]$, 则因 $|x - x_i| < \delta$ 且 $n > N$, 所以有

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant |f_n(x) - f_n(x_i)| + |f_n(x_i) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

这就证明了 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 f. 证毕.

定理 11.2.3 的证明 对每个正整数 m, 用 E_m 表示把区间 $[a,b]$ 作 2^m 等分的分点集, 即

$$E_m = \left\{a, a + \frac{1}{2^m}(b-a), a + \frac{2}{2^m}(b-a), \cdots, b - \frac{1}{2^m}(b-a), b\right\}.$$

应用引理 11.2.3 于函数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和集合 E_1, 就得到 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的一个子列 $\{f_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$, 它在 E_1 上逐点收敛. 再应用引理 11.2.3 于函数列 $\{f_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$ 和集合 E_2, 就得到 $\{f_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$ 的一个子列 $\{f_{2,n}\}_{n=1}^{\infty}$, 它在 E_2 上逐点收敛. 如此一直进行下去, 根据数学归纳法便对每个正整数 m 得到了 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的一个子列 $\{f_{m,n}\}_{n=1}^{\infty}$ 具有以下两个性质:

(1) $\{f_{m,n}\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\{f_{m-1,n}\}_{n=1}^{\infty}$ 的子列;

(2) $\{f_{m,n}\}_{n=1}^{\infty}$ 在 E_m 上逐点收敛.

考虑下列无穷方阵:

$$\begin{array}{cccc} f_{1,1} & f_{1,2} & f_{1,3} & \cdots \\ f_{2,1} & f_{2,2} & f_{2,3} & \cdots \\ f_{3,1} & f_{3,2} & f_{3,3} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

取其对角线元素形成 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的一个子列 $\{f_{n,n}\}_{n=1}^{\infty}$. 由于对任意正整数 m, $\{f_{n,n}\}_{n=1}^{\infty}$ 去掉前 $m-1$ 个函数之后形成的函数列是上述矩阵中第 m 行的一个子列, 所以它在 E_m 上逐点收敛. 因此, 这个函数列在集合 $E=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}E_m$ 上逐点收敛 (因为由 $x\in E$ 可推出存在 m 使得 $x\in E_m$). 由于集合 E 是区间 $[a,b]$ 的稠密子集并且 $\{f_{n,n}\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[a,b]$ 上等度连续, 所以根据引理 11.2.4 知这个函数列也在 $[a,b]$ 上逐点收敛. 再应用引理 11.2.5 即知它在 $[a,b]$ 上一致收敛. 证毕.

上述证明方法叫做**康托尔对角线方法**, 是由康托尔首先使用的.

习　题　11.2

1. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $\int_0^1 f(x)x^n\mathrm{d}x=0$, $n=0,1,2,\cdots$. 证明: $f(x)=0$, $\forall x\in[0,1]$.

2. 设 $f(x)$ 是 $[-1,1]$ 上的连续函数. 证明:

   (1) $f(x)$ 是奇函数的充要条件是 $\int_0^1 f(x)x^{2n}\mathrm{d}x=0$, $n=0,1,2,\cdots$;

   (2) $f(x)$ 是偶函数的充要条件是 $\int_0^1 f(x)x^{2n-1}\mathrm{d}x=0$, $n=1,2,\cdots$.

3. (1) 设 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上连续, $f(0)=f(2\pi)$, 且 $\int_0^1 f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\sin nx\mathrm{d}x=0$, $n=1,2,\cdots$. 证明: $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上恒等于一常数;

(2) 设 $f(x)$ 是$(-\infty,+\infty)$ 上连续的 2π 周期函数, 且 $\int_0^1 f(x)\cos nx\mathrm{d}x=0$, $n=0,1,2,\cdots$. 证明: $f(x)$ 是奇函数;

(3) 设 $f(x)$ 是$(-\infty,+\infty)$ 上连续的 2π 周期函数, 且 $\int_0^1 f(x)\sin nx\mathrm{d}x=0$, $n=1,2,\cdots$. 证明: $f(x)$ 是偶函数.

4. 定义多项式列 $\{P_n(x)\}$ 如下:

$$P_1(x)=\frac{1}{2}x^2,\qquad P_{n+1}(x)=\frac{1}{2}x^2+P_n(x)-\frac{1}{2}P_n^2(x),\quad n=1,2,\cdots.$$

试按照以下思路证明 $P_n(x)$ 在 $[-1,1]$ 上一致收敛于函数 $|x|$:

(1) 证明成立恒等式 $|x|-P_{n+1}(x)=[|x|-P_n(x)]\left(1-\dfrac{|x|+P_n(x)}{2}\right)$;

(2) 证明当 $|x|\leqslant 1$ 时, $0\leqslant P_n(x)\leqslant P_{n+1}(x)\leqslant |x|$;

(3) 证明当 $|x|\leqslant 1$ 时, $0\leqslant |x|-P_n(x)\leqslant |x|\left(1-\dfrac{|x|}{2}\right)^n\leqslant\dfrac{2}{n+1}$;

(4) 证明 $P_n(x)$ 在 $[-1,1]$ 上一致收敛于函数 $|x|$.

5. 设多项式列 $\{P_n(x)\}$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛于连续函数 $f(x)$. 令 m_n 为 $P_n(x)$ 的阶. 证明: 如果 $f(x)$ 不是多项式, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}m_n=+\infty$.

6. 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数, 且 $f(0)=f(1)=0$. 定义多项式列 $\{P_n(x)\}$ 如下:

$$P_n(x)=c_n^{-1}\int_0^1 f(t)[1-(t-x)^2]^n\mathrm{d}t,\quad n=1,2,\cdots,$$

其中 $c_n=\int_{-1}^1(1-t^2)^n\mathrm{d}t$. 试按照以下思路证明 $P_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 $f(x)$:

(1) 把 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 之外做零延拓 (当 $x<0$ 或 $x>1$ 时令 $f(x)=0$), 使之成为 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数. 证明把 $f(x)$ 这样延拓后, 成立等式

$$P_n(x)=c_n^{-1}\int_{-1}^1 f(x+t)(1-t^2)^n\mathrm{d}t,\quad \forall x\in[0,1],\quad n=1,2,\cdots;$$

(2) 证明 $c_n\geqslant\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $n=1,2,\cdots$, 从而对任意 $0<\delta<1$, 当 $|t|\in[\delta,1]$ 时有

$$c_n^{-1}(1-t^2)^n\leqslant\sqrt{n}(1-\delta^2)^n\to 0\quad(\text{当 } n\to\infty),$$

因此当 $n\to\infty$ 时, $\varphi_n(t)=c_n^{-1}(1-t^2)^n$ 在 $[-1,-\delta]\bigcup[\delta,1]$ 上一致收敛于零;

(3) 证明 $P_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

7. 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数, 且 $f(0)=f(1)=0$. 证明: 整系数多项式列

$$Q_n(x)=\sum_{k=1}^{n-1}\left[\binom{n}{k}f\left(\frac{k}{n}\right)\right]x^k(1-x)^{n-k},\quad n=1,2,\cdots$$

在 $[0,1]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

8. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数, 且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 都存在并且相等. 证明: 存在阶数为 $2n$ 的多项式 $P_{2n}(x)$ $(n=1,2,\cdots)$, 使得有理函数列

$$Q_n(x)=(1+x^2)^{-n}P_{2n}(x),\quad n=1,2,\cdots$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛于 $f(x)$.

9. 设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是定义在区间 I 上的一列连续函数. 证明以下三个条件中的任何一个都能保证 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 I 上等度一致连续:

(1) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 I 上一致赫尔德连续, 即存在常数 $0<\alpha\leqslant 1$ 和 $M>0$ 使成立:

$$|f_n(x)-f_n(y)|\leqslant M|x-y|^{\alpha},\quad \forall x,y\in I,\quad n=1,2,\cdots;$$

(2) 每个 $f_n(x)$ 都在 I 上可微, 且存在常数 $M>0$ 使成立:

$$|f_n'(x)|\leqslant M,\quad \forall x\in I,\quad n=1,2,\cdots;$$

(3) 每个 $f_n(x)$ 都在 I 上可微, 其导函数 $f_n'(x)$ 在 I 的每个有界闭子区间 $[a,b]\subseteq I$ 上可积, 并存在小于区间 I 的长度的正数 c 和常数 $M>0$ 使对任意区间 $[a,a+c]\subseteq I$ 都成立:

$$\int_a^{a+c}|f_n'(x)|^2\mathrm{d}x\leqslant M,\quad n=1,2,\cdots.$$

10. 证明引理 11.2.2.

11. 设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是区间 I 上的一列函数.

(1) 证明: 如果 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 I 上等度一致连续且逐点收敛于函数 f, 则 f 在 I 上一致连续;

(2) 设 $x_0\in I$. 如果对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在相应的 $\delta>0$, 使对任意满足条件 $|x-x_0|<\delta$ 的 $x\in I$ 都成立

$$|f_n(x)-f_n(x_0)|<\varepsilon,\quad n=1,2,\cdots,$$

则称 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在点 x_0 等度连续; 如果 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 I 中每点都等度连续, 则称它在 I 上逐点等度连续. 证明: 如果 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 I 上逐点等度连续且逐点收敛于函数 f, 则 f 在 I 上连续.

12. 设 I 是任意一个区间, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 I 上的一个函数序列.

(1) 证明: 如果 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 I 上逐点等度连续, 则对任意 $[a,b]\subseteq I$, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[a,b]$ 上等度一致连续;

(2) 证明阿尔采拉–阿斯科利定理的下述推广: 如果 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 I 上逐点等度连续且逐点有界, 则 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有子列在 I 上逐点收敛并在 I 的任意有界闭子区间上一致收敛.

11.3 函数序列的积分平均收敛

从 11.1 节的讨论看到, 函数序列的逐点收敛概念对于研究函数序列与其极限函数的关系而言, 不是一个很好的概念. 因为如果一个函数序列仅是逐点收敛, 那么很难从序列中每个函数所具有的分析性质如连续性、可微性、可积性等, 推断出极限函数的同类性质, 同时求导与极限交换次序、积分与极限交换次序等运算都无法实施. 为了弥补逐点收敛概念的这个不足, 当时引进了一致收敛的概念. 但是函数序列的一致收敛是一个很强的收敛条件, 应用中遇到的涉及函数列取极限的问题, 有许多都无法满足这个条件, 因而使许多问题的讨论受到了很大的限制. 为了克服这个困难, 本节介绍函数序列的一种较弱意义的收敛 ——**积分平均收敛**, 这种收敛性既不像一致收敛那样要求太强, 同时还可以满足如积分与极限交换次序等运算的需要, 因而应用起来比较方便. 特别是, 在后面将会看到, 应用积分平均收敛的概念, 可以使函数与其傅里叶级数的关系显得比较简单.

11.3.1 p 方可积函数

引进下列概念.

定义 11.3.1 设 f 是定义在区间 $[a,b]$ 上的一个函数, 而 p 是一个给定的正数, 且 $p\geqslant 1$. 如果 f 在 $[a,b]$ 上黎曼可积 (因而有界), 或者虽然它无界但在 $[a,b]$ 上只有有限个瑕点, 并且在任意不含这些瑕点的闭子区间 $[c,d]\subseteq[a,b]$ 上 f 都黎曼可积, 且瑕积分 $\displaystyle\int_a^b|f(x)|^p\mathrm{d}x$ 收敛:

$$\int_a^b|f(x)|^p\mathrm{d}x<\infty.$$

即 $|f(x)|^p$ 在 (a,b) 上广义黎曼可积, 则称 f 在 $[a,b]$ 上p **方广义黎曼可积**, 简称p **方可积**. 特别, 当 $p=1$ 时, 称 f 在 $[a,b]$ 上**绝对可积**; 当 $p=2$ 时, 称 f 在 $[a,b]$ 上**平方可积**.

引理 11.3.1 对任意 $p\geqslant 1$, 成立下列结论:

(1) 如果函数 f 在 $[a,b]$ 上 p 方可积, 则对任意常数 c, 函数 cf 也在 $[a,b]$ 上 p 方可积;

(2) 如果函数 f 和 g 都在 $[a,b]$ 上 p 方可积, 则函数 $f\pm g$ 也都在 $[a,b]$ 上 p 方可积.

证明 结论 (1) 是显然的. 为证明结论 (2), 注意对任意 $x\in[a,b]$ 有

$$
\begin{aligned}
|f(x)\pm g(x)|^p \leqslant&(|f(x)|+|g(x)|)^p\leqslant[2\max\{|f(x)|,|g(x)|\}]^p\\
=&2^p\max\{|f(x)|^p,|g(x)|^p\}\leqslant 2^p(|f(x)|^p+|g(x)|^p),
\end{aligned}
$$

据此立得结论 (2).

下面介绍几个关于 p 方可积函数的常用积分不等式. 先回忆以下简单的不等式.

引理 11.3.2(杨不等式) 设 $p>1,\ q>1$, 且 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, 则对任意非负实数 a 和 b 成立

$$
ab\leqslant\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}, \tag{11.3.1}
$$

而且等号成立当且仅当 $a^p=b^q$.

关于以上不等式的证明, 见 5.4 节例 2 和 5.5 节例 2. 图 11-3-1 给出了这个不等式的几何解释: 令 $y=x^{p-1}$, 则由条件 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ 推得 $x=y^{q-1}$, 即 $y=x^{p-1}$ 和 $x=y^{q-1}$ 表示同一条曲线. 由积分的几何意义可知, 不等式 (11.3.1) 的右端第一项为图 11-3-1 中曲边三角形 OaA 的面积, 右端第二项为曲边三角形 ObB 的面积, 而左端为矩形 $OaCb$ 的面积. 显然有

$$
\begin{aligned}
&\text{矩形 } OaCb \text{ 的面积}\\
&\leqslant \text{曲边三角形 } OaA \text{ 的面积}\\
&\quad+\text{曲边三角形 } ObB \text{ 的面积},
\end{aligned}
$$

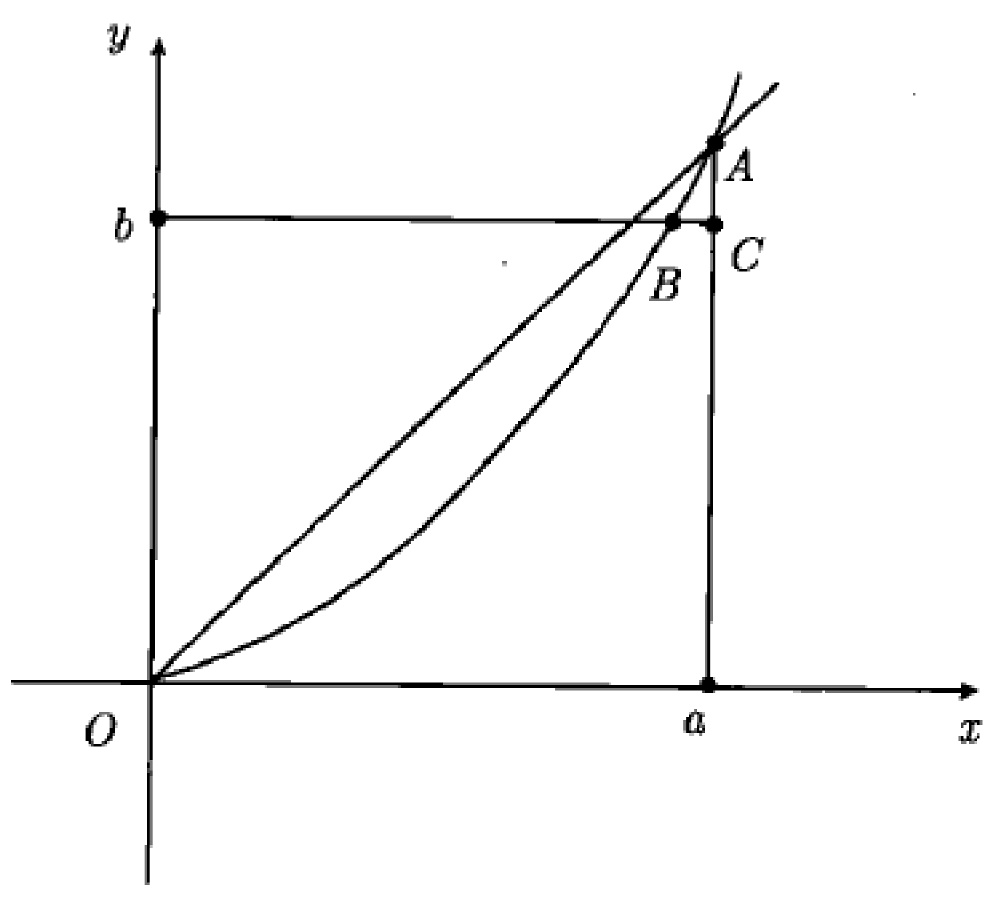


图 11-3-1 杨不等式的几何解释

这就是不等式 (11.3.1).

定理 11.3.1(赫尔德不等式) 设$p>1,\ q>1$, 且 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. 如果 f 在 $[a,b]$ 上 p 方可积, g 在 $[a,b]$ 上 q 方可积, 则它们的乘积 fg 在 $[a,b]$ 上绝对可积, 且成立不等式

$$
\int_a^b|f(x)g(x)|\mathrm{d}x\leqslant\Big(\int_a^b|f(x)|^p\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_a^b|g(x)|^q\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}}. \tag{11.3.2}
$$

证明 令

$$
\varphi(x)=f(x)\Big/\Big(\int_a^b|f(x)|^p\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}},\qquad \psi(x)=g(x)\Big/\Big(\int_a^b|g(x)|^q\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}}.
$$

则易见 φ 在 $[a,b]$ 上 p 方可积, ψ 在 $[a,b]$ 上 q 方可积, 且

$$\int_a^b |\varphi(x)|^p\mathrm{d}x = \int_a^b |f(x)|^p\mathrm{d}x\Big/\Big(\int_a^b |f(x)|^p\mathrm{d}x\Big) = 1,$$

$$\int_a^b |\psi(x)|^q\mathrm{d}x = \int_a^b |g(x)|^q\mathrm{d}x\Big/\Big(\int_a^b |g(x)|^q\mathrm{d}x\Big) = 1.$$

由杨不等式可知对任意 $x\in[a,b]$ 都成立

$$|\varphi(x)\psi(x)| \leqslant \frac{|\varphi(x)|^p}{p} + \frac{|\psi(x)|^q}{q}.$$

由于 $|\varphi(x)|^p$ 和 $|\psi(x)|^q$ 都在 $[a,b]$ 上广义可积, 从上式即知 $|\varphi(x)\psi(x)|$ 也广义可积, 且

$$\int_a^b |\varphi(x)\psi(x)|\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{p}\int_a^b |\varphi(x)|^p\mathrm{d}x + \frac{1}{q}\int_a^b |\psi(x)|^q\mathrm{d}x = \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1.$$

把 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 的表达式代入最后得到的这个不等式 $\displaystyle\int_a^b |\varphi(x)\psi(x)|\mathrm{d}x \leqslant 1$, 就得到了不等式 (11.3.2). 证毕.

特别在式 (11.3.2) 中取 $p=q=2$, 就得到了**柯西不等式**

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\mathrm{d}x \leqslant \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\mathrm{d}x}\sqrt{\int_a^b |g(x)|^2\mathrm{d}x}. \tag{11.3.3}$$

定理 11.3.2(闵科夫斯基不等式) 设 $p\geqslant 1$, 且 f 和 g 都在 $[a,b]$ 上 p 方可积. 则成立下列不等式

$$\Big(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant \Big(\int_a^b |f(x)|^p\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int_a^b |g(x)|^p\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}. \tag{11.3.4}$$

证明 当 $p=1$ 时不等式 (11.3.4) 显然成立. 下设 $p>1$. 取 $q>1$ 使 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. 则 $|f(x)+g(x)|^{\frac{p}{q}}$ 在 $[a,b]$ 上 q 方可积. 因此应用赫尔德不等式便得到

$$\int_a^b |f(x)||f(x)+g(x)|^{\frac{p}{q}}\mathrm{d}x \leqslant \Big(\int_a^b |f(x)|^p\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}},$$

$$\int_a^b |g(x)||f(x)+g(x)|^{\frac{p}{q}}\mathrm{d}x \leqslant \Big(\int_a^b |g(x)|^p\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

因此, 有

$$\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\mathrm{d}x = \int_a^b |f(x)+g(x)|^{1+\frac{p}{q}}\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}&\leqslant \int_a^b [|f(x)|+|g(x)|]|f(x)+g(x)|^{\frac{p}{q}}\mathrm{d}x\\&\leqslant\Big[\Big(\int_a^b|f(x)|^p\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}+\Big(\int_a^b|g(x)|^p\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}\Big]\Big(\int_a^b|f(x)+g(x)|^p\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

两边同除以 $\left(\int_a^b|f(x)+g(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}$, 就得到了不等式 (11.3.4). 证毕.

定理 11.3.3　设 $q>p\geqslant 1$. 又设 f 在 $[a,b]$ 上 q 方可积. 则 f 也在 $[a,b]$ 上 p 方可积, 且成立下列不等式:

$$\Big(\frac{1}{b-a}\int_a^b|f(x)|^p\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}\leqslant\Big(\frac{1}{b-a}\int_a^b|f(x)|^q\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}}. \tag{11.3.5}$$

证明　令$g(x)=|f(x)|^p$, $r=\dfrac{q}{p}$, $r'=\dfrac{q}{q-p}$. 则 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上 r 方可积, $r>1$, $r'>1$, 且 $\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{r'}=1$. 因此应用赫尔德不等式得

$$\int_a^b|g(x)|\mathrm{d}x=\int_a^b1\cdot|g(x)|\mathrm{d}x\leqslant\Big(\int_a^b1^{r'}\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{r'}}\Big(\int_a^b|g(x)|^r\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{r}}=(b-a)^{\frac{1}{r'}}\Big(\int_a^b|g(x)|^r\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{r}}.$$

把 g, r 和 r' 的表达式代入上式, 就得到了式 (11.3.5). 证毕.

11.3.2　积分平均收敛

定义 11.3.2　设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的一个函数序列, f 是定义在 $[a,b]$ 上的一个函数. 又设 p 是一个给定的正数, 且 $p\geqslant 1$. 再设 f 以及每个 f_n 都在 $[a,b]$ 上 p 方可积. 如果成立

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b|f_n(x)-f(x)|^p\mathrm{d}x=0,$$

则称 f_n 在 $[a,b]$ 上p **方平均收敛**于 f. 特别, 当 $p=1$ 时, 称 f_n 在 $[a,b]$ 上**积分平均收敛**于 f; 当 $p=2$ 时, 称 f_n 在 $[a,b]$ 上**平方平均收敛**于 f.

f_n 积分平均收敛于 f 的几何意义是当 $n\to\infty$ 时, 夹在曲线 $y=f_n(x)$ 和 $y=f(x)$ 之间的绝对面积趋于零 (图 11-3-2).

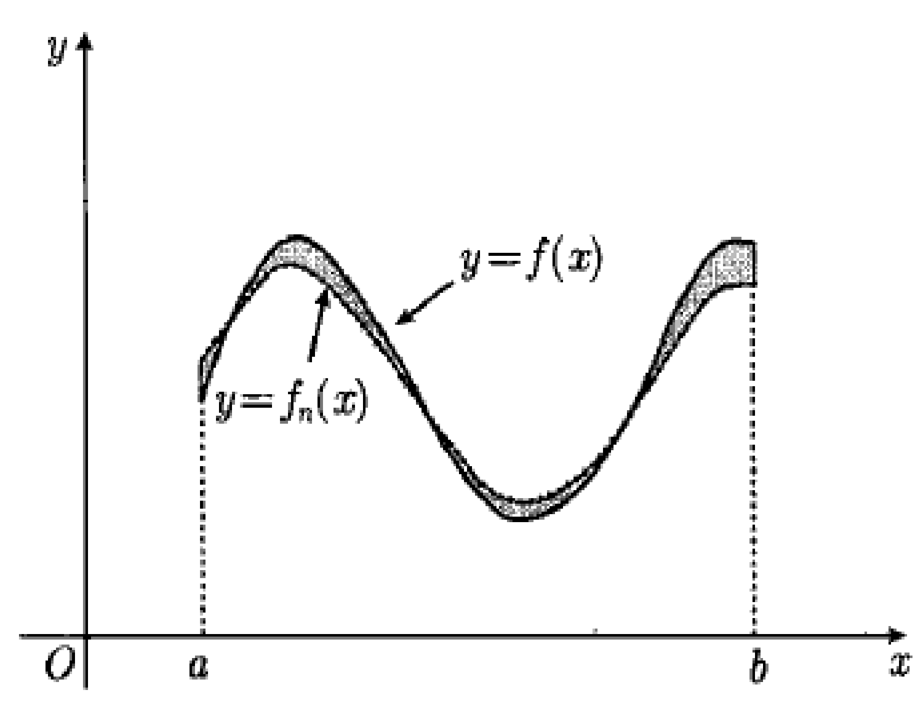


图 11-3-2　积分平均收敛

与函数序列的一致收敛概念类似, 函数序列的 p 方平均收敛是一个整体性的概念, 它把序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 中的每一个函数 f_n 都作为区间 $[a,b]$ 上的一个整体的量来看待. 与此相反, 函数序列的逐点收敛概念, 则是一个局部性的概念, 它着眼于序列中的每个函数在区间 $[a,b]$ 的逐个点上的性态. 关于这一点, 下面的两个例子是很好的说明.

例 1 令 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是区间 $[0,1]$ 上的下列函数序列: 对每个正整数 n, 设 $n=2^k+r$, 其中 k 和 r 都是非负整数, 且 $0\leqslant r<2^k$. 定义

$$f_n(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } \dfrac{r}{2^k}\leqslant x\leqslant\dfrac{r+1}{2^k},\\ 0, & \text{对其他的 } x\in[0,1].\end{cases}$$

这个函数序列的图形如图 11-3-3 所示. 显然, 对任意一点 $x\in[0,1]$, 数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 都没有极限 (因为该数列中有无穷多个 0, 也有无穷多个 1), 即函数序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在区间 $[0,1]$ 上处处都不收敛. 但由

$$\int_0^1|f_n(x)|\mathrm{d}x=\frac{1}{2^k}\to 0 \qquad \text{当 } n\to\infty$$

可知序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在区间 $[0,1]$ 上积分平均收敛于零.

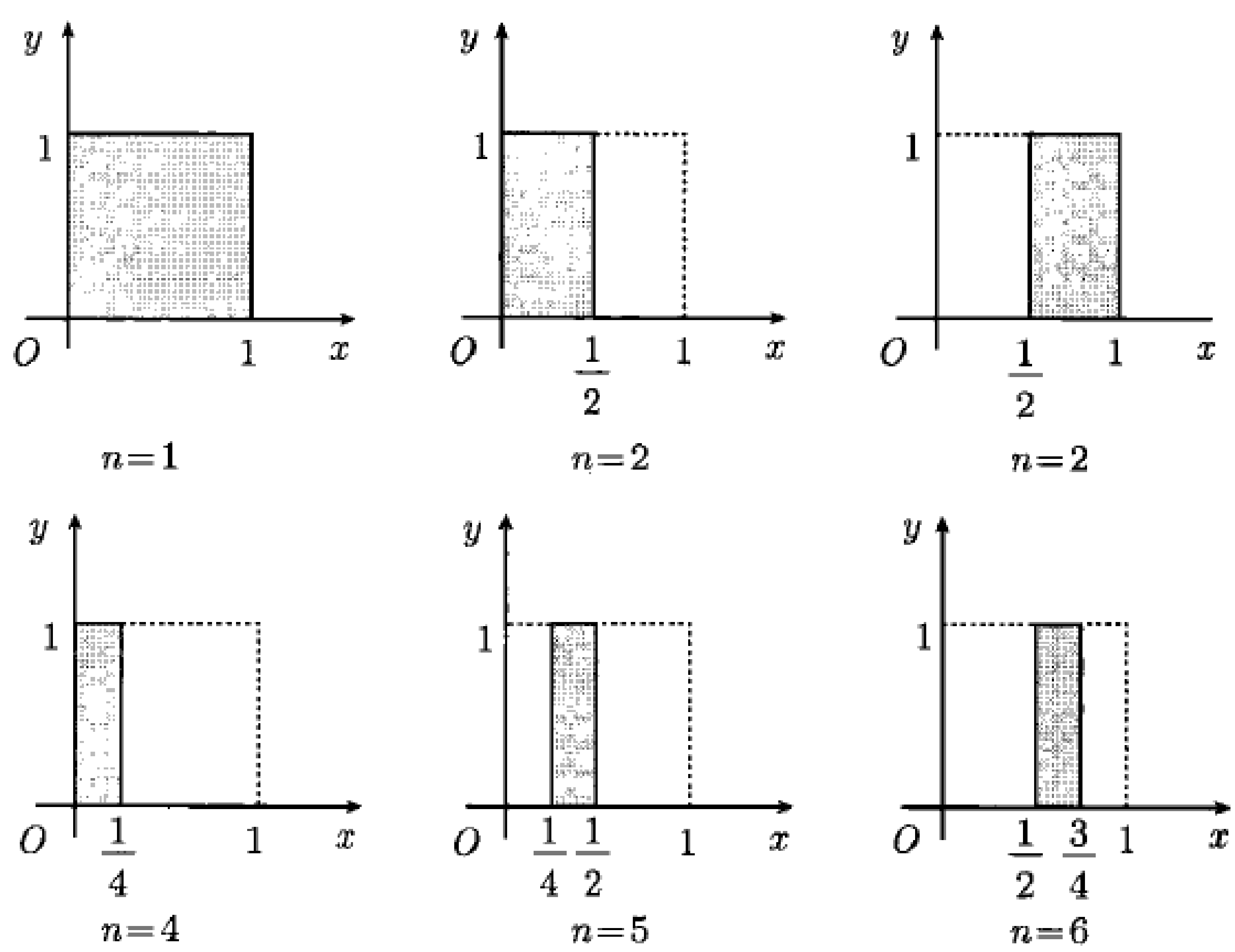


图 11-3-3 例 1 中的函数列

对于上例中的函数序列, 显然以逐点收敛的眼光来观察它的收敛性是没有多大意义的. 但是从图 11-3-3 所显示的这个函数序列的变化趋势来看, 说它当 $n\to\infty$ 时收敛于零, 却又具有合理性. 引进函数序列积分平均收敛的概念, 便很好地解决了这个问题.

例 2 令 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是区间 $[0,1]$ 上的下列函数序列: 对每个正整数 n, 令

$$f_n(x)=\begin{cases}n^2, & \text{当 } 0<x<\dfrac{1}{n},\\ 0, & \text{对其他的 } x\in[0,1].\end{cases}$$

这个函数序列的图形如图 11-3-4. 显然, 对任意一点 $x\in[0,1]$, 数列 $f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 都收敛于零, 即函数序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在区间 $[0,1]$ 上逐点收敛于零. 但由

$$\int_0^1 |f_n(x)|\mathrm{d}x = n^2 \times \frac{1}{n} = n \to \infty \qquad 当\ n \to \infty$$

可知序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在区间 $[0,1]$ 上不积分平均收敛于零.

显然, 如果 f_n 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 f, 则对任意 $p \geqslant 1$, f_n 在 $[a,b]$ 上也 p 方平均收敛于 f. 因此, 函数序列的 p 方平均收敛是比一致收敛弱的一种收敛性质, 或者说, 一致收敛是比 p 方平均收敛强的一种收敛性质. 以上两例说明, p 方平均收敛与逐点收敛是两个互相不可比较的概念. 但是另一方面, 这两种收敛性之间又有着紧密的联系. 首先, 阿尔采拉在 1885 年证明了下述定理:

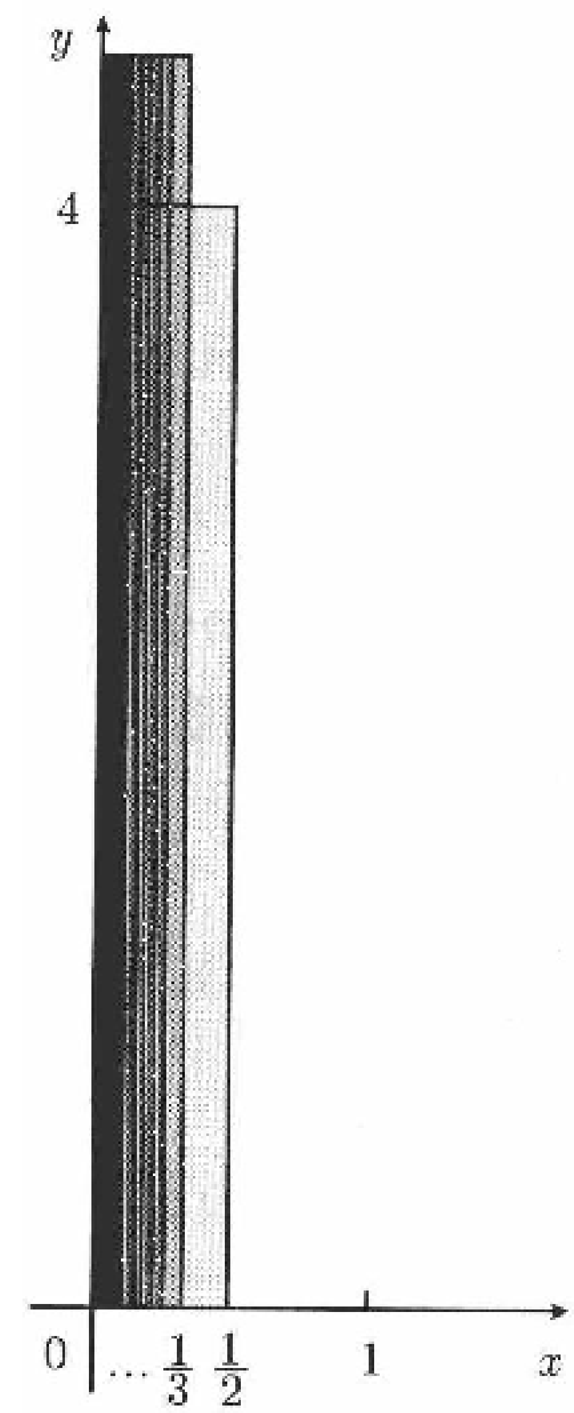


图 11-3-4 例 2 中的函数列

阿尔采拉定理 区间 $[a,b]$ 上一致有界的一列黎曼可积函数 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 如果在 $[a,b]$ 上逐点收敛于一个黎曼可积函数 f, 则 f_n 在 $[a,b]$ 上积分平均收敛于 f.

其次, 匈牙利数学家黎茨 (Friedrich Riesz, 1880~1956) 证明了下述定理:

黎茨定理 如果函数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[a,b]$ 上积分平均收敛于函数 f, 则必存在 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的一个子列, 它在 $[a,b]$ 的一个零测集之外逐点收敛于 f.

以上两个定理的证明都是比较困难的, 这里就不讨论它们的证明了. 实变函数课程将会对这些定理在勒贝格积分理论中的相应定理细致地讨论.

定理 11.3.4 设当 $n \to \infty$ 时, f_n 在区间 $[a,b]$ 上积分平均收敛于 f. 令 $F_n(x) = \int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t$, $\forall x \in [a,b]$, $n = 1,2,\cdots$, 以及 $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, $\forall x \in [a,b]$. 则 F_n 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛于 F. 特别地, 成立

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{11.3.6}$$

证明 对每个 n 有

$$\begin{aligned}\sup_{a\leqslant x\leqslant b} |F_n(x) - F(x)| &= \sup_{a\leqslant x\leqslant b} \left|\int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \sup_{a\leqslant x\leqslant b} \int_a^x |f_n(t) - f(t)|\mathrm{d}t = \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

由条件知最后这个等号的右端趋于零, 所以从以上不等式即知 F_n 在区间 $[a,b]$ 上一

致收敛于 F. 由于一致收敛蕴含着逐点收敛, 所以对每个 $x\in[a,b]$, $F_n(x)$ 都收敛于 $F(x)$. 特别取 $x=b$, 就得到了式 (11.3.6). 证毕.

定理 11.3.4 说明, 对于积分平均收敛的函数序列, 极限和积分可以交换次序, 即 11.1 节定理 11.1.3 的一致收敛的条件可以减弱为积分平均收敛.

定理 11.3.5 设 f_n $(n=1,2,\cdots)$ 是区间 $[a,b]$ 上的一列连续函数, 每个 f_n 都在 $[a,b]$ 上除有限个点外处处可导, 而且导函数 f_n' 都在 $[a,b]$ 上广义可积. 再设

(1) f_n 在 $[a,b]$ 上逐点收敛于函数 f;

(2) f_n' 在 $[a,b]$ 上积分平均收敛于广义可积函数 g.

则 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在每个使 g 连续的点 x 处可导且 $f'(x)=g(x)$, 或更确切地,

$$f(x)=f(a)+\int_a^x g(t)\mathrm{d}t,\qquad \forall x\in[a,b],$$

并且 f_n 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 f.

证明 根据定理 11.3.4, 由 f_n' 在 $[a,b]$ 上积分平均收敛于 g 推知函数列 $F_n(x)=\int_a^x f_n'(t)\mathrm{d}t$ $(n=1,2,\cdots)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于函数 $F(x)=\int_a^x g(t)\mathrm{d}t$. 而由牛顿–莱布尼茨公式 (定理 9.3.3) 知 $F_n(x)=f_n(x)-f_n(a)$, $n=1,2,\cdots$, 于是由 f_n 在 $[a,b]$ 上逐点收敛于 f 得到

$$f(x)-f(a)=F(x)=\int_a^x g(t)\mathrm{d}t,\qquad \forall x\in[a,b].$$

据此即知 f 在 $[a,b]$ 上连续, 且在使 g 连续的点 x 处可导并且 $f'(x)=g(x)$. 最后, 由于 $F_n(x)=f_n(x)-f_n(a)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $F(x)=f(x)-f(a)$, 且 $f_n(a)$ 收敛于 $f(a)$, 可知 f_n 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 f. 证毕.

定理 11.3.5 说明, 定理 11.1.4 中 f_n' 一致收敛的条件可减弱为积分平均收敛.

推论 11.3.1 设 f_n $(n=1,2,\cdots)$ 是区间 $[a,b]$ 上的一列连续可微函数, 并设

(1) f_n 在 $[a,b]$ 上逐点收敛于函数 f;

(2) f_n' 在 $[a,b]$ 上积分平均收敛于连续函数 g.

则 f_n 的极限函数 f 在 $[a,b]$ 上可微, 且 $f'(x)=g(x)$, 即成立等式

$$\left[\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right]'=\lim_{n\to\infty}f_n'(x).$$

例 3 考虑函数列

$$f_n(x)=\frac{(1-nx)^2}{1+n^2x^2},\qquad n=1,2,\cdots.$$

证明: (1) f_n 在 $[0,1]$ 上逐点收敛于函数 $f(x)=1$, 但却不一致收敛;

(2) f_n 在 $[0,1]$ 上积分平均收敛于函数 $f(x)=1$, 因此等式

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\lim_{n\to\infty}f_n(x)\mathrm{d}x \tag{11.3.7}$$

成立. 请直接计算加以验证.

证明　(1) 当 $x=0$ 时, $f_n(0)=1$, $n=1,2,\cdots$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0)=1$. 当 $x\neq 0$ 时, 有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-nx)^2}{1+n^2x^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{1}{n}-x\right)^2}{\dfrac{1}{n^2}+x^2}=\frac{x^2}{x^2}=1.$$

所以 f_n 在 $[0,1]$ 上逐点收敛于函数 $f(x)=1$. 另有

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|f_n(x)-1|=\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}\frac{2nx}{1+n^2x^2}\geqslant\frac{2n\cdot\dfrac{1}{n}}{1+n^2\cdot\dfrac{1}{n^2}}=1,$$

所以根据定理 11.1.1 知, f_n 在 $[0,1]$ 上不一致收敛于函数 $f(x)=1$.

(2) 有

$$\int_0^1|f_n(x)-1|\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{2nx}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\ln(1+n^2x^2)\Big|_0^1=\frac{1}{n}\ln(1+n^2),$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1|f_n(x)-1|\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln(1+n^2)=0.$$

所以 f_n 在 $[0,1]$ 上积分平均收敛于函数 $f(x)=1$. 这样根据定理 11.3.4 知等式 (11.3.7) 成立. 这个等式也可直接验证:

$$\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{(1-nx)^2}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\left[1-\frac{2nx}{1+n^2x^2}\right]\mathrm{d}x=1-\frac{1}{n}\ln(1+n^2),$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x=1=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\lim_{n\to\infty}f_n(x)\mathrm{d}x.$$

例 4　考虑函数列

$$f_n(x)=x-\frac{1}{n}\ln(1+n^2x^2),\qquad n=1,2,\cdots.$$

易见 f_n 在 $[0,1]$ 上一致收敛于函数 $f(x)=x$. 显然 $f'(x)=1$, $\forall x\in[0,1]$.

对 f_n 求导得

$$f_n'(x)=1-\frac{2nx}{1+n^2x^2}=\frac{(1-nx)^2}{1+n^2x^2},\qquad n=1,2,\cdots.$$

从例 3 知道, $f_n'(x)$ 在 $[0,1]$ 上逐点收敛于 $f'(x)=1$, 但不一致收敛于这个函数.

这个例子说明, 即使 $f_n'(x)$ 不一致收敛, 等式

$$\lim_{n\to\infty}f_n'(x)=\left[\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right]'$$

仍然可能成立. 从例 3 有 f_n 在 $[0,1]$ 上满足定理 11.3.5 的条件.

最后, 再介绍几个逼近定理结束本节.

定理 11.3.6 设 f 是区间 $[a,b]$ 上的 p 方可积函数 $(p \geqslant 1)$, α 和 β 是两个给定的实数. 则对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $[a,b]$ 上的连续函数 g, 使得

$$\int_a^b |f(x)-g(x)|^p \mathrm{d}x < \varepsilon,$$

且 $g(a)=\alpha$, $g(b)=\beta$.

证明 不妨设 $\alpha=0$ 且 $\beta=0$. 这是因为, 如果已对 $\alpha=0$ 且 $\beta=0$ 的情况做出了证明, 那么对一般的情况, 考虑函数

$$f_1(x)=f(x)-\alpha-\frac{\beta-\alpha}{b-a}(x-a).$$

则存在 $[a,b]$ 上的连续函数 g_1, 使得

$$\int_a^b |f_1(x)-g_1(x)|^p \mathrm{d}x < \varepsilon,$$

且 $g_1(a)=0$, $g_1(b)=0$. 令

$$g(x)=g_1(x)+\alpha+\frac{\beta-\alpha}{b-a}(x-a).$$

则 $g(a)=\alpha$, $g(b)=\beta$, 且

$$\int_a^b |f(x)-g(x)|^p \mathrm{d}x = \int_a^b |f_1(x)-g_1(x)|^p \mathrm{d}x < \varepsilon,$$

即原问题得解.

另外, 可设 f 在区间 $[a,b]$ 上黎曼可积, 或者最多只有一个瑕点且瑕点在区间的端点. 这是因为, 对于一般的更复杂的情况, 通过把区间 $[a,b]$ 分成一些适当的小区间的并, 使得在每个小区间上 f 或者黎曼可积, 或者最多只有一个瑕点且瑕点在区间的端点, 就把原问题化归到这种最简单的情况. 因此, 下面只考虑 f 在区间 $[a,b]$ 上黎曼可积或者最多只有一个瑕点且瑕点在区间的端点这种最简单的情况.

由于 $\int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x < \infty$, 我们有

$$\lim_{\substack{c\to a^+\\ d\to b^-}} \int_c^d |f(x)|^p \mathrm{d}x = \int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x,$$

所以对任意给定的 $\varepsilon>0$, 只要选取 c 和 d 分别充分靠近 a 和 b (当然要求 $a<c<d<b$), 就有

$$\int_a^c |f(x)|^p \mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{6\cdot 2^p}, \qquad \int_d^b |f(x)|^p \mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{6\cdot 2^p}.$$

f 在区间 $[c,d]$ 上黎曼可积, 所以有界, 设 $|f(x)| \leqslant M$, $\forall x \in [c,d]$. 根据达布准则, 对前述给定的 $\varepsilon>0$, 存在相应的 $\delta>0$, 使对区间 $[c,d]$ 的任意分割 Δ: $c=x_0<x_1<\cdots<x_n=d$, 只要 $\|\Delta\| = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \Delta x_k < \delta$ $(\Delta x_k = x_k - x_{k-1})$, 就有

$$\sum_{k=1}^{n}\omega_k(f)\Delta x_k<\frac{\varepsilon}{3(2M)^{p-1}},$$

其中 $\omega_k(f)$ 表示函数 f 在区间 $[x_{k-1},x_k]$ 上的振幅, 即 $\omega_k(f)=M_k-m_k$, 而

$$M_k=\sup_{x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k}f(x),\qquad m_k=\inf_{x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k}f(x).$$

定义折线线性函数 g, 在区间 $[c,d]$ 上,

$$g(x)=f(x_{k-1})+\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}(x-x_{k-1}),\quad 当\ x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k,\quad k=1,2,\cdots,n.$$

在区间 $[a,c]$ 上 g 的值定义为取 $c_1\in[a,c)$ 充分靠近 c, 使得 $2^pM^p(c-c_1)<\dfrac{\varepsilon}{6}$, 然后令

$$g(x)=\frac{f(c)}{c-c_1}(x-c_1),\quad 当\ c_1\leqslant x\leqslant c,\qquad g(x)=0,\quad 当\ a\leqslant x\leqslant c_1.$$

类似地, 在区间 $[d,b]$ 上 g 的值定义为取 $d_1\in(d,b]$ 充分靠近 d, 使得 $2^pM^p(d_1-d)<\dfrac{\varepsilon}{6}$, 然后令

$$g(x)=\frac{f(d)}{d_1-d}(d_1-x),\quad 当\ d\leqslant x\leqslant d_1,\qquad g(x)=0,\quad 当\ d_1\leqslant x\leqslant b.$$

函数 g 的图形如图 11-3-5 所示. 显然 g 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $g(a)=g(b)=0$,

$$\begin{aligned}
\int_a^b|f(x)-g(x)|^p\mathrm{d}x=&\int_a^c|f(x)-g(x)|^p\mathrm{d}x+\int_c^d|f(x)-g(x)|^p\mathrm{d}x+\int_d^b|f(x)-g(x)|^p\mathrm{d}x\\
\leqslant&2^p\int_a^c[|f(x)|^p+|g(x)|^p]\mathrm{d}x+(2M)^{p-1}\int_c^d|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x\\
&+2^p\int_d^b[|f(x)|^p+|g(x)|^p]\mathrm{d}x\\
=&2^p\Big(\int_a^c|f(x)|^p+\int_{c_1}^c|g(x)|^p\mathrm{d}x\Big)+(2M)^{p-1}\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x\\
&+2^p\Big(\int_d^b|f(x)|^p+\int_d^{d_1}|g(x)|^p\mathrm{d}x\Big)\\
<&2^p\Big(\frac{\varepsilon}{6\cdot 2^p}+M^p(c-c_1)\Big)+(2M)^{p-1}\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\Delta x_k\\
&+2^p\Big(\frac{\varepsilon}{6\cdot 2^p}+M^p(d_1-d)\Big)\\
<&\Big(\frac{\varepsilon}{6}+\frac{\varepsilon}{6}\Big)+(2M)^{p-1}\frac{\varepsilon}{3(2M)^{p-1}}+\Big(\frac{\varepsilon}{6}+\frac{\varepsilon}{6}\Big)=\varepsilon.
\end{aligned}$$

证毕.

推论 11.3.2　设 f 是区间 $[a,b]$ 上的 p 方可积函数 $(p\geqslant 1)$, α 和 β 是给定的两个实数. 则对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在多项式 $P(x)$ 使得

$$\int_a^b |f(x)-P(x)|^p \mathrm{d}x < \varepsilon,$$

且 $P(a)=\alpha$, $P(b)=\beta$.

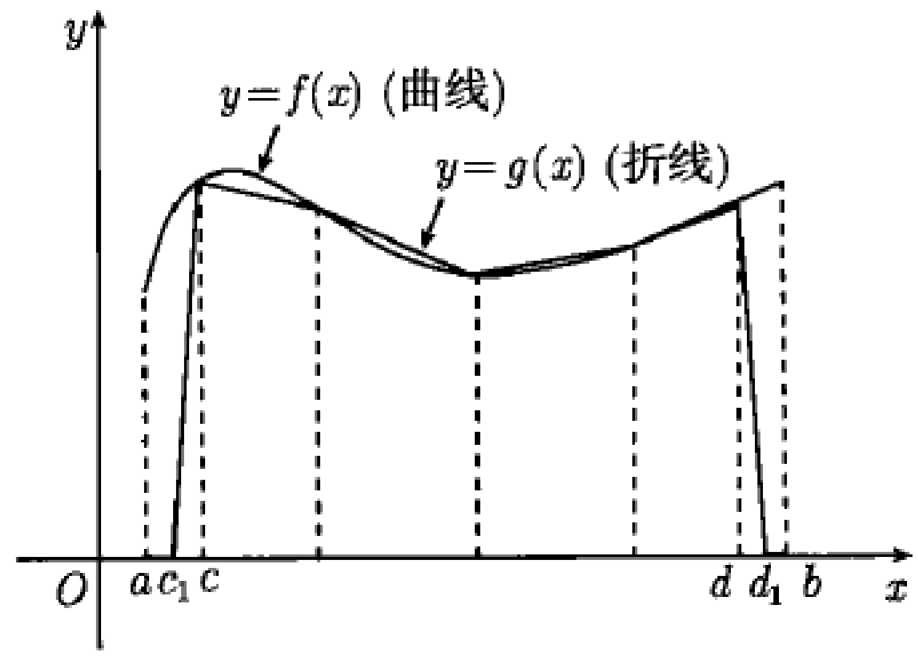


图 11-3-5　用分段线性函数逼近可积函数

证明　对任意给定的 $\varepsilon>0$, 先应用定理 11.3.6 知存在 $[a,b]$ 上的连续函数 g, 使得

$$\int_a^b |f(x)-g(x)|^p \mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2^{p+1}},$$

且 $g(a)=\alpha$, $g(b)=\beta$. 再对函数 g 应用魏尔斯特拉斯第一逼近定理, 即知存在多项式 $P(x)$ 使得

$$\int_a^b |g(x)-P(x)|^p \mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2^{p+1}},$$

且 $P(a)=g(a)$, $P(b)=g(b)$. 于是有

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)-P(x)|^p \mathrm{d}x &\leqslant 2^p\left(\int_a^b |f(x)-g(x)|^p \mathrm{d}x+\int_a^b |g(x)-P(x)|^p \mathrm{d}x\right)\\ &<2^p\left(\frac{\varepsilon}{2^{p+1}}+\frac{\varepsilon}{2^{p+1}}\right)=\varepsilon,\end{aligned}$$

且 $P(a)=g(a)=\alpha$, $P(b)=g(b)=\beta$. 证毕.

推论 11.3.3　设 f 是 2π 周期函数, 且在区间 $[-\pi,\pi]$ 上的 p 方可积 $(p\geqslant 1)$. 则对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在三角多项式 $Q(x)$ 使得

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)-Q(x)|^p \mathrm{d}x < \varepsilon.$$

证明与推论 11.3.2 的证明类似, 区别只在于代替魏尔斯特拉斯第一逼近定理, 这里需要应用魏尔斯特拉斯第二逼近定理. 留给读者自己完成.

习　题　11.3

1. 证明杨不等式的下述推广: 设 $y=\varphi(x)$ 是定义在 $[0,+\infty)$ 上严格单调递增的连

续函数, 且 $\varphi(0)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=c$ (c 可以为正无穷大). 令 $x=\psi(y)$ 为其反函数. 则对任意 $a>0$ 和 $0<b<c$ 成立

$$\int_0^a\varphi(x)\mathrm{d}x+\int_0^b\psi(y)\mathrm{d}y\geqslant ab.$$

在以下 $2\sim6$ 题中, (a,b) 表示任意开区间(既可有界, 也可无界).

2. 证明赫尔德不等式的下述推广: 设 $p>1, q>1, r\geqslant1$, 且 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}$. 如果 f 在 (a,b) 上 p 方可积, g 在 (a,b) 上 q 方可积, 则它们的乘积 fg 在 (a,b) 上 r 方可积, 且

$$\int_a^b|f(x)g(x)|^r\mathrm{d}x\leqslant\Big(\int_a^b|f(x)|^p\mathrm{d}x\Big)^{\frac{r}{p}}\Big(\int_a^b|g(x)|^q\mathrm{d}x\Big)^{\frac{r}{q}}.$$

3. 设 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 (a,b) 上的一列连续函数, 且存在 (a,b) 上的广义可积函数 F 使成立

$$|f_n(x)|\leqslant F(x),\qquad\forall x\in(a,b),\quad n=1,2,\cdots.$$

又设对任意 $[c,d]\subseteq(a,b)$, $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 在 $[c,d]$ 上一致收敛于函数 f. 证明:

(1) f 在 (a,b) 上的绝对可积;

(2) $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 在 (a,b) 上积分平均收敛于 f, 进而 $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

4. 设 $\varphi(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的有界函数, 在每个有界区间 $[0,a]$ ($a>0$ 任意) 上黎曼可积. 证明: 函数序列 $f_n(x)=\varphi(x)\Big(1+\dfrac{x}{n}\Big)^{-n}$ $(n=1,2,\cdots)$ 在 $[0,+\infty)$ 上积分平均收敛于函数 $f(x)=\varphi(x)\mathrm{e}^{-x}$.

5. 设 f, g 和 f_n $(n=1,2,\cdots)$ 都在 (a,b) 上平方可积, 且当 $n\to\infty$ 时, f_n 在 (a,b) 上平方平均收敛于 f. 令 $h_n(x)=\displaystyle\int_a^x f_n(t)g(t)\mathrm{d}t$, $h(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)g(t)\mathrm{d}t$. 证明: $\{h_n\}_{n=1}^\infty$ 在 (a,b) 上一致收敛于 h.

6. 设 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 (a,b) 上的一列 p 方可积函数, 在 (a,b) 上 p 方平均收敛于函数 f, 这里 $p>1$. 又设 $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ 是 (a,b) 上的一列 q 方可积函数, 在 (a,b) 上 q 方平均收敛于函数 g, 这里 $q>1$. 再设 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}$, 其中 $r\geqslant1$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b|f_n(x)g_n(x)-f(x)g(x)|^r\mathrm{d}x=0.$$

7. 设 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 和 $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ 是区间 (a,b) 上的两列绝对可积函数, 在 (a,b) 上分别积分平均收敛于绝对可积函数 f 和 g. 又设 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 在 (a,b) 上一致有界, 其极限函数 f 也有界. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b|f_n(x)g_n(x)-f(x)g(x)|\mathrm{d}x=0.$$

8. 证明积分平均极限的唯一性：如果 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 (a,b) 上既积分平均收敛于 f，又积分平均收敛于 g，则 f 和 g 在 (a,b) 上几乎处处相等.

11.4 函数级数

本节把前面几节和第 10 章的结果结合起来研究函数级数.

11.4.1 函数级数的逐点收敛和一致收敛

设 $u_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 是具有公共定义域 D 的一列函数. 把它们用加号连接起来所得到的数学表达式

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$$

叫做**函数级数**, 简记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$, 其中被加的每一项都叫做这个函数级数的一个**项**, 特别, $u_n(x)$ 叫做级数的**通项**. 注意这里明确地写出了自变量符号 x, 是为了把函数级数与数值级数加以区别.

对每个正整数 n, 令

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x).$$

这样就得到了定义在 D 上的一个函数 $S_n(x)$, 称为函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的前 n 项的**部分和**, 而函数序列 $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 叫做这个级数的**部分和序列**. 部分和序列 $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 的点态收敛域或逐点收敛域叫做这个级数的**点态收敛域**或**逐点收敛域**, 它的点态极限函数或逐点极限函数叫做这个级数的**点态和函数**或**逐点和函数**. 更一般地引进下列概念.

定义 11.4.1 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 是定义在非空集合 $D\subseteq\mathbf{R}$ 上的一个函数级数, X 是 D 的一个非空子集, $S(x)$ 是定义在 X 上的一个函数. 如果对任意 $x_0\in X$, 数值级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ 收敛于函数 $S(x)$ 在 x_0 处的值 $S(x_0)$, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)=S(x_0),\qquad \forall x_0\in X,$$

则称函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 X 上**逐点收敛**于 $S(x)$, 并称 $S(x)$ 为这个函数级数在集合 X 上的**逐点和函数**.

与函数序列的情形一样, 这里在 "收敛" 与 "和函数" 之前冠以 "逐点" 二字, 是为了把这些概念与后面将要引进的其他相应概念加以区别. 在下面的讨论中通常省略 "逐点" 二字.

显然, 函数级数的逐点收敛域与逐点和函数的问题, 完全归结为数值级数的敛散性及其和的问题. 因此, 关于这个问题不多讨论. 下面仅举一例加以说明.

例 1 讨论函数级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{(-1)^n}{3^n}\right)x^n$ 的收敛域与和函数.

解 这个级数的前 n 项的和为

$$
\begin{aligned}
S_n(x) &=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2^k}+\frac{(-1)^k}{3^k}\right)x^k=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{x}{2}\right)^k+\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{x}{3}\right)^k\\
&=\frac{1-(\frac{x}{2})^{n+1}}{1-\frac{x}{2}}+\frac{1-(-\frac{x}{3})^{n+1}}{1+\frac{x}{3}}\\
&=\frac{2}{2-x}+\frac{3}{3+x}-\frac{2}{2-x}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}-\frac{3}{3+x}\left(-\frac{x}{3}\right)^{n+1}.
\end{aligned}
$$

这里假设 $x\neq 2,-3$. 当 $x=2$ 时,

$$S_n(2)=n+\frac{3}{3+x}-\frac{3}{3+x}\left(-\frac{x}{3}\right)^{n+1};$$

当 $x=-3$ 时,

$$S_n(-3)=n+\frac{2}{2-x}-\frac{2}{2-x}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}.$$

显然, 当 $n\to\infty$ 时 $S_n(x)$ 有极限当且仅当 $|x|<2$, 而且当 $|x|<2$ 时,

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\frac{2}{2-x}+\frac{3}{3+x}=\frac{12-x}{6-x+x^2}.$$

因此, 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{(-1)^n}{3^n}\right)x^n$ 的收敛域为 $(-2,2)$, 和函数为 $S(x)=\dfrac{12-x}{6-x+x^2}$.

下面考虑在什么条件下, 能够进行如

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to x_0}u_n(x), \tag{11.4.1}$$

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right]'=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x), \tag{11.4.2}$$

$$\int_a^b\left[\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right]\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x \tag{11.4.3}$$

等运算的问题. 如果把上列各个和式中的 ∞ 改作任意一个有限的正整数, 则相应的关系式都是成立的. 这就很容易使人误认为, 上列各个等式也都总是成立的. 但是通过

11.1 节的讨论不难想到，如果只要求各个级数的收敛都是逐点收敛，那么这些等式就不一定成立．事实的确如此．反例是很容易构造的：如果对一个函数序列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 某个相应的等式不成立，那么令 $u_n(x)=f_n(x)-f_{n-1}(x)$, $n=1,2,\cdots$ (取 $f_0(x)=0$)，则对级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n(x)$，相应的等式也就不能成立．另一方面，从 11.1 节的讨论可知，只要在逐点收敛的基础上，再增加部分和序列一致收敛 [对于式 (11.4.1) 和式 (11.4.3)] 或部分和的导函数序列一致收敛 [对于式 (11.4.2)] 的要求，就能保证这些等式成立．因此引进下列概念．

定义 11.4.2 对于一个函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$，如果它的部分和序列 $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在实数集 X 上一致收敛于其和函数 $S(x)$，则称函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 X 上**一致收敛**．

把函数序列一致收敛的柯西准则应用到函数级数的部分和序列，就得到了函数级数一致收敛的柯西准则．

定理 11.4.1(函数级数一致收敛的柯西准则) 函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 X 上一致收敛的充要条件是：对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在相应的正整数 N，使对任意满足 $n>N$ 的正整数 n、任意正整数 p 和任意 $x\in X$ 都成立

$$\left|\sum_{k=1}^{p}u_{n+k}(x)\right|<\varepsilon.$$

证明 令 $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 为级数的部分和序列．注意到

$$\sum_{k=1}^{p}u_{n+k}(x)=S_{n+p}(x)-S_n(x),$$

所以把函数序列一致收敛的柯西准则应用于 $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$，就得到了本定理的结论．证毕．

从定理 11.4.1 立刻推出下列结果．

定理 11.4.2 (函数级数一致收敛的必要条件) 如果函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 X 上一致收敛，则其通项构成的函数序列 $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 X 上一致收敛于零．

证明 应用定理 11.4.1 的必要条件于 $p=1$ 的情况，就得到了本定理的结论．证毕．

11.4.2 一致收敛的判别法

根据函数级数一致收敛的柯西准则，可以导出一些关于函数级数一致收敛的很有用的判别法．这其中最简单也最常用的是下述定理．

定理 11.4.3(魏尔斯特拉斯 M 判别法)　对于函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, 如果存在一列正数 M_n, $n=1,2,\cdots$, 使得

$$|u_n(x)| \leqslant M_n, \qquad \forall x \in X, \qquad n=1,2,\cdots, \tag{11.4.4}$$

而且数值级数 $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 X 上一致收敛.

证明　根据数值级数收敛的柯西准则, 从级数 $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ 收敛可知, 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在相应的正整数 N, 使对任意满足 $n>N$ 的正整数 n 和任意正整数 p 都成立

$$\sum_{k=1}^{p} M_{n+k} < \varepsilon.$$

根据式 (11.4.4), 由此推出当 $n>N$ 时, 对任意正整数 p 和任意 $x \in X$ 都成立

$$\left|\sum_{k=1}^{p} u_{n+k}(x)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{p} M_{n+k} < \varepsilon.$$

所以根据定理 11.4.1 即知, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 X 上一致收敛. 证毕.

以上判别法是由魏尔斯特拉斯发现的. 实际上, 一致收敛概念的提出也主要归功于魏尔斯特拉斯. 在他之前的人们, 经常不加考虑地使用前面列出的等式 (11.4.1)~等式 (11.4.3). 阿贝尔是第一个认识到这些等式的成立是有条件的人. 他在 1826 年的一篇论文中给出了例子:

$$\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots,$$

虽然这个级数的每一项都是连续函数, 但在点 $x=(2m+1)\pi$ (m 为任意整数) 处, 这个级数的和函数是不连续的. 阿贝尔还运用一致收敛的思想, 正确地证明了以连续函数为通项的无穷级数如果一致收敛, 则和函数也是连续函数. 但是他只是限于在这个定理的证明中应用了一致收敛的思想, 而没有一般地考虑函数级数一致收敛的问题. 函数级数乃至更一般的函数序列一致收敛的概念, 是由魏尔斯特拉斯首先明确提出并系统地进行研究的.

附带指出, 术语 “魏尔斯特拉斯 M 判别法” 中的 M, 是英语中 “控制” 这个单词 “majorant” 的头一个字母. 这是因为, 不等式 (11.4.4) 通常被称为用数列 M_n 来控制函数列 $u_n(x)$. 所以, 以上判别法也经常被叫做 “控制判别法”, 或简称为 “M 判别法”.

例 2　证明当 $p>1$ 时, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p}$ 在整个数轴上一致收敛.

证明 由于

$$\left|\frac{\sin nx}{n^p}\right| \leqslant \frac{1}{n^p}, \qquad \forall x \in (-\infty, +\infty), \qquad n = 1, 2, \cdots,$$

而当 $p > 1$ 时级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛, 所以由 M 判别法知, 当 $p > 1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

例 3 设定义在非空实数集 X 上的函数序列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 满足下列条件: 存在正数列 M_n $(n = 1, 2, \cdots)$ 使成立

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant M_n, \quad \forall x \in X, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

而且数值级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ 收敛, 则序列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 X 上一致收敛.

证明 根据 M 判别法知, 在题设条件下, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[f_{n+1}(x) - f_n(x)]$ 在 X 上一致收敛. 而这个级数的部分和序列为

$$S_1(x) = f_2(x) - f_1(x), \quad S_2(x) = f_3(x) - f_1(x), \quad \cdots, \quad S_n(x) = f_{n+1}(x) - f_1(x), \quad \cdots,$$

所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[f_{n+1}(x) - f_n(x)]$ 在 X 上一致收敛意味着序列 $f_{n+1}(x) - f_1(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 在 X 上一致收敛, 由此易见序列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 也在 X 上一致收敛. 证毕.

例 3 中的命题经常被作为一个定理来用, 实际上是一个非常有用的定理.

M 判别法虽然简单易用, 但是只能用于判别那些各项取了绝对值之后仍然收敛 (逐点绝对收敛) 的级数的一致收敛性. 如果一个级数只是逐点条件收敛的, 则这个判别法明显地失效. 为了判别不是逐点绝对收敛、而仅是逐点条件收敛的函数级数的一致收敛性, 下面把用于判别数值级数条件收敛的狄利克雷判别法和阿贝尔判别法加以修改, 以得到适用于那些逐点条件收敛的函数级数的一致收敛判别法.

定理 11.4.4(狄利克雷判别法) 对于函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$, 设

(1) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ 的部分和序列在 X 上一致有界;

(2) 对每个固定的 $x \in X$, 数列 $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 都是单调数列;

(3) 函数序列 $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 X 上一致收敛于零.

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$ 在 X 上一致收敛.

定理 11.4.5(阿贝尔判别法) 对于函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$, 设

(1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ 在 X 上一致收敛;

(2) 对每个固定的 $x \in X$, 数列 $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 都是单调数列;

(3) 函数序列 $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 X 上一致有界.

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$ 在 X 上一致收敛.

狄利克雷判别法和阿贝尔判别法的证明　不妨设对每个固定的 $x \in X$, 数列 $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 都是单调递减的且各项非负. 对任意正整数 n 和 k, 记级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ 的前 n 项的部分和为 $S_n(x)$, 并记 $B_{nk}(x) = S_{n+k}(x) - S_n(x)$, 即

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} v_k(x), \qquad B_{nk}(x) = \sum_{j=1}^{k} v_{n+j}(x), \quad n, k = 1, 2, \cdots.$$

则应用阿贝尔变换可知, 对任意正整数 n 和 p 有

$$\sum_{k=1}^{p} u_{n+k}(x)v_{n+k}(x) = u_{n+p}(x)B_{np}(x) + \sum_{k=1}^{p-1}[u_{n+k}(x) - u_{n+k+1}(x)]B_{nk}(x).$$

因此

$$\left|\sum_{k=1}^{p} u_{n+k}(x)v_{n+k}(x)\right| \leqslant u_{n+p}(x)|B_{np}(x)| + \sum_{k=1}^{p-1}[u_{n+k}(x) - u_{n+k+1}(x)]|B_{nk}(x)|. \quad (11.4.5)$$

在狄利克雷判别法的情形, 由假设知 $S_n(x)$ 一致有界, 因此存在正数 M 使 $|S_n(x)| \leqslant M$, $\forall x \in X$, $n = 1, 2, \cdots$, 从而 $|B_{nk}(x)| \leqslant 2M$, $\forall x \in X$, $n, k = 1, 2, \cdots$. 于是由式 (11.4.5) 得

$$\left|\sum_{k=1}^{p} u_{n+k}(x)v_{n+k}(x)\right| \leqslant 2M\left(u_{n+p}(x) + \sum_{k=1}^{p-1}[u_{n+k}(x) - u_{n+k+1}(x)]\right) = 2Mu_{n+1}(x), \ \forall x \in X.$$

因为序列 $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 X 上一致收敛于零, 所以对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在相应的正整数 N, 使当 $n > N$ 时

$$u_n(x) < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad \forall x \in X.$$

因此对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 当 $n > N$ 时, 对任意正整数 p 都有

$$\left|\sum_{k=1}^{p} u_{n+k}(x)v_{n+k}(x)\right| < 2M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon, \quad \forall x \in X.$$

所以根据定理 11.4.1 即知, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$ 在 X 上一致收敛.

在阿贝尔判别法的情形, 由序列 $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 X 上一致有界, 设 $u_n(x) \leqslant M$,

$\forall x \in X$, $n=1,2,\cdots$. 又由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ 在 X 上一致收敛, 应用柯西准则知对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在相应的正整数 N, 使对任意满足 $n>N$ 的正整数 n 和任意正整数 k 都成立

$$\left|\sum_{j=1}^{k} v_{n+j}(x)\right| < \frac{\varepsilon}{M}, \quad \forall x \in X,$$

即 $|B_{nk}(x)| < \dfrac{\varepsilon}{M}$. 于是由式 (11.4.5) 知对任意 $n>N$ 和任意正整数 p 都成立

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{p} u_{n+k}(x)v_{n+k}(x)\right| &< \frac{\varepsilon}{M}\Big(u_{n+p}(x)+\sum_{k=1}^{p-1}[u_{n+k}(x)-u_{n+k+1}(x)]\Big)\\ &= \frac{\varepsilon}{M}u_{n+1}(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{M}M=\varepsilon, \quad \forall x \in X.\end{aligned}$$

这样根据定理 11.4.1 仍然得到级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$ 在 X 上一致收敛. 证毕.

例 4 证明级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+\sin x}$ 在整个数轴上一致收敛.

证明 令$u_n(x)=\dfrac{1}{n+\sin x}$, $v_n(x)=(-1)^n$ $(n=2,3,\cdots)$. 则级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ 的部分和序列在整个数轴上一致有界, 数列 $u_n(x)=\dfrac{1}{n+\sin x}$ $(n=2,3,\cdots)$ 对每个固定的 x 是单调递减数列, 且由

$$\left|\frac{1}{n+\sin x}\right| \leqslant \frac{1}{n-|\sin x|} \leqslant \frac{1}{n-1}, \qquad \forall x \in (-\infty,+\infty), \qquad n=2,3,\cdots$$

可知当 $n\to\infty$ 时, $u_n(x)=\dfrac{1}{n+\sin x}$ 在整个数轴上一致收敛于零. 所以应用狄利克雷判别法, 即知级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+\sin x}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

例 5 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 证明狄利克雷级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^x}$ 当 $x\geqslant 0$ 时一致收敛.

证明 令 $u_n(x)=\dfrac{1}{n^x}$, $v_n(x)=a_n$ $(n=1,2,\cdots)$. 则级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 是数值级数且收敛, 因此作为函数级数是一致收敛的. 而数列 $u_n(x)=\dfrac{1}{n^x}$ $(n=1,2,\cdots)$ 显然对每个固定的 $x\geqslant 0$ 是单调递减数列, 且在右半数轴 $x\geqslant 0$ 上一致有界 (每一项都不超过 1). 所以应用阿贝尔判别法即知级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^x}$ 在右半数轴 $x\geqslant 0$ 上一致收敛.

11.4.3 和函数的性质

把 11.1 节建立的关于一致收敛函数列的极限函数性质的几个定理应用于函数级数, 便得到了使等式 (11.4.1) ~(11.4.3) 成立的条件. 这就是下面三个定理.

定理 11.4.6 (阿贝尔连续性定理) 设函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的每一项 $u_n(x)$ 都在 $[a,b]$ 上连续, 且这个级数在 $[a,b]$ 上一致收敛. 则其和函数在 $[a,b]$ 上连续.

证明 令 $S(x)$ 为级数的和函数, $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 为级数的部分和序列. 因为每一项 $u_n(x)$ 都在 $[a,b]$ 上连续, 所以每一个 $S_n(x)$ 也都在 $[a,b]$ 上连续. 而当 $n\to\infty$ 时, $S_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$, 所以应用定理 11.1.5, 即知 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 证毕.

推论 11.4.1 设函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的每一项 $u_n(x)$ 都在开区间 (a,b) (允许 $a=-\infty$, $b=+\infty$) 上连续, 且对任意有界闭子区间 $[c,d]\subseteq(a,b)$, 这个级数在 $[c,d]$ 上一致收敛. 则其和函数在区间 (a,b) 上连续.

证明 对每个有界闭子区间 $[c,d]\subseteq(a,b)$, 应用定理 11.4.6 知级数的和函数都在 $[c,d]$ 上连续. 由这个区间的任意性, 即知和函数在整个区间 (a,b) 上连续. 证毕.

定理 11.4.7(逐项微分) 设函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的每一项 $u_n(x)$ 都在区间 $[a,b]$ 上可微, 且下列两个条件满足

(1) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上逐点收敛;

(2) 逐项求导所得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的和函数是区间 $[a,b]$ 上的可微函数, 且

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right]' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x), \quad \forall x\in[a,b]. \tag{11.4.6}$$

证明 令 $S(x)$ 为级数的和函数, $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 为级数的部分和序列. 因为每一项 $u_n(x)$ 都是区间 $[a,b]$ 上的可微函数, 所以每一个 $S_n(x)$ 也都是 $[a,b]$ 上的可微函数. 由条件 (1) 和 (2) 知, 当 $n\to\infty$ 时, $S_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上逐点收敛于 $S(x)$, 其导函数 $S_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 所以应用定理 11.1.6, 即知 $S(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可微, 且

$$S'(x) = \lim_{n\to\infty} S_n'(x) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} u_k'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x), \quad \forall x\in[a,b],$$

此即式 (11.4.6). 证毕.

定理 11.4.8(逐项积分) 设函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的每一项 $u_n(x)$ 都在区间 $[a,b]$ 上黎曼可积, 且这个级数在 $[a,b]$ 上一致收敛. 则其和函数也在 $[a,b]$ 上黎曼可积, 且

$$\int_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right] \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) \mathrm{d}x. \tag{11.4.7}$$

证明 令 $S(x)$ 为级数的和函数, $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 为级数的部分和序列. 因为每一项 $u_n(x)$ 都在 $[a,b]$ 上黎曼可积, 所以每一个 $S_n(x)$ 也都在 $[a,b]$ 上黎曼可积. 又当 $n \to \infty$ 时, $S_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$, 所以应用定理 11.1.7, 即知 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积, 且

$$\int_a^b S(x) \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b S_n(x) \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_a^b u_k(x) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) \mathrm{d}x,$$

此即式 (11.4.7). 证毕.

例 6 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 证明: 由狄利克雷级数定义的函数

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}, \qquad x \geqslant 0$$

在 $[0,+\infty)$ 上连续, 在 $(0,+\infty)$ 上无穷可微.

证明 由例 5 知道, 这个级数在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛, 因此 $f(x)$ 对所有 $x \geqslant 0$ 有定义. 由于这个级数的每一项都是 $[0,+\infty)$ 上的连续函数, 所以根据定理 11.4.6 及其推论知, 其和函数 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的连续函数. 由于逐项求导所得级数 $-\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{a_n \ln n}{n^x}$ 在 $x=0$ 处不一定收敛, 所以它一般不可能在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛. 但是, 对任意 $\delta > 0$, 与例 5 类似地应用阿贝尔判别法可知, 级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{a_n \ln n}{n^x}$ 在 $[\delta,+\infty)$ 上一致收敛. 因此, 根据定理 11.4.7 知, $f(x)$ 在 $[\delta,+\infty)$ 上可微, 且

$$f'(x) = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n \ln n}{n^x}, \qquad \forall x \geqslant \delta.$$

由于 $\delta > 0$ 任意, 所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可微, 且上式对所有 $x > 0$ 都成立. 对级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{a_n \ln n}{n^x}$ 和对它逐项求导所得到的级数 $-\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{a_n (\ln n)^2}{n^x}$ 在 $[\delta,+\infty)$ 上再次应用定理 11.4.7, 即知 $f'(x)$ 也在 $[\delta,+\infty)$ 上可微, 且

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n (\ln n)^2}{n^x}, \qquad \forall x \geqslant \delta.$$

由于 $\delta>0$ 任意, 所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上二次可微, 且上式对所有 $x>0$ 都成立. 反复地这样进行推理, 即知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上无穷可微, 且可通过对级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ 逐项求各阶导数来求 $f(x)$ 的相应阶导数.

例 7　证明: 由级数定义的函数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!},\qquad \forall x\in(-\infty,+\infty)$$

在整个数轴 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义且无穷可微.

证明　显然这个级数对所有 $-\infty<x<+\infty$ 都收敛, 即其收敛域为 $(-\infty,+\infty)$. 所以函数 $f(x)$ 在整个数轴 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义. 对任意 $M>0$, 有

$$\left|\frac{x^{3n}}{(3n)!}\right|\leqslant\frac{M^{3n}}{(3n)!},\qquad \forall x\in[-M,M],\qquad n=0,1,2,\cdots,$$

而级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{M^{3n}}{(3n)!}$ 收敛, 所以根据 M 判别法知, 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 在 $[-M,M]$ 上一致收敛, 进而函数 $f(x)$ 在 $[-M,M]$ 上连续. 由于 $M>0$ 任意, 所以 $f(x)$ 在整个数轴 $(-\infty,+\infty)$ 上连续. 对级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 逐项求导所得到的级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}$. 由于

$$\left|\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}\right|\leqslant\frac{M^{3n-1}}{(3n-1)!},\qquad \forall x\in[-M,M],\qquad n=1,2,\cdots,$$

而级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{M^{3n-1}}{(3n-1)!}$ 收敛, 所以级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}$ 在 $[-M,M]$ 上一致收敛. 这样应用定理 11.4.7 知 $f(x)$ 在 $[-M,M]$ 上可微, 且

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!},\qquad \forall x\in[-M,M].$$

由于 $M>0$ 任意, 所以 $f(x)$ 在整个数轴 $(-\infty,+\infty)$ 上可微, 且上式对所有 $-\infty<x<+\infty$ 都成立. 反复地这样进行推理, 即知 $f(x)$ 在整个数轴 $(-\infty,+\infty)$ 上无穷可微, 且可通过对级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 逐项求各阶导数来求 $f(x)$ 的相应阶导数.

11.4.4　函数级数的积分平均收敛

逐项微分定理 (定理 11.4.7) 中的条件 "$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛" 和逐项积分定理 (定理 11.4.8) 中的条件 "$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛" 都可适当减弱. 这可

通过应用关于函数序列积分平均收敛的定理 11.3.5 和定理 11.3.6 得到. 我们先一般地引进下列概念:

定义 11.4.4 设 $p \geqslant 1$. 对于定义在区间 $[a,b]$ 上的每一项都 p 方可积的函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, 如果它的部分和序列 $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在$[a,b]$ 上 p 方平均收敛, 即存在定义在 $[a,b]$ 上的 p 方可积函数 $S(x)$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |S_n(x)-S(x)|^p \mathrm{d}x = 0,$$

则称函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上p **方平均收敛**, 并称 $S(x)$ 为这个级数的 p 方平均收敛的**和函数**, 仍用符号 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 表示. 特别当 $p=1$ 时, 称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上**积分平均收敛**.

需要注意的是, p 方平均收敛的函数级数, 可能在区间 $[a,b]$ 上的任何一点上都不收敛, 即它的逐点收敛的收敛域是空集, 从而没有在逐点收敛意义下的和函数. 但是在 p 方平均收敛的意义下, 它却有和函数.

定理 11.4.9 设函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的每一项 $u_n(x)$ 都是区间 $[a,b]$ 上的连续函数, 在 $[a,b]$ 上除有限个点外处处可微, 并且导函数 $u_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 上广义可积. 再设

(1) 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上逐点收敛于和函数 $S(x)$;

(2) 逐项求导得到的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 上积分平均收敛于广义可积函数 $G(x)$.

则和函数 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在使 $G(x)$ 连续的点处可微且 $S'(x)=G(x)$, 或更确切地, 成立等式

$$S(x) = S(a) + \int_a^x G(t)\mathrm{d}t, \qquad \forall x \in [a,b],$$

而且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$.

证明 对级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的部分和函数列应用定理 11.3.6, 就得到了本定理的结论. 证毕.

定理 11.4.10 设函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上积分平均收敛于广义可积函数

$S(x)$. 则逐项积分得到的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x u_n(t)\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $\int_a^x S(t)\mathrm{d}t$. 特别地, 成立等式

$$\int_a^b S(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x.$$

证明　对级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的部分和函数列应用定理 11.3.5, 就得到了本定理的结论. 证毕.

例 8　考虑函数级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{\sqrt{x}}{1+n(n+1)x}.$$

证明: (1) 该级数在 $[0,1]$ 上逐点收敛, 但不一致收敛;

(2) 该级数在 $[0,1]$ 上积分平均收敛, 因此成立逐项积分:

$$\int_0^1\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{\sqrt{x}}{1+n(n+1)x}\Big)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\arctan\frac{\sqrt{x}}{1+n(n+1)x}\mathrm{d}x. \tag{11.4.8}$$

证明　当 $x=0$ 时, 级数各项为零, 从而收敛于零. 当 $0<x\leqslant 1$ 时, 有

$$0<\arctan\frac{\sqrt{x}}{1+n(n+1)x}<\frac{\sqrt{x}}{1+n(n+1)x}<\frac{1}{n(n+1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}},$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 收敛, 所以根据正项级数的比较判别法知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{\sqrt{x}}{1+n(n+1)x}$ 也收敛. 这就证明了, 该级数在 $[0,1]$ 上逐点收敛.

为了证明这个级数在 $[0,1]$ 上不一致收敛但积分平均收敛, 先求它的部分和:

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\arctan\frac{\sqrt{x}}{1+k(k+1)x}.$$

求导得

$$\begin{aligned}S_n'(x)&=\frac{1}{2\sqrt{x}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-k(k+1)x}{1+(2k^2+2k+1)x+k^2(k+1)^2x^2}\\&=\frac{1}{2\sqrt{x}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-k(k+1)x}{(1+k^2x)[1+(k+1)^2x]}\\&=\frac{1}{2\sqrt{x}}\sum_{k=1}^{n}\Big[\frac{k+1}{1+(k+1)^2x}-\frac{k}{1+k^2x}\Big]\\&=\frac{1}{2\sqrt{x}}\Big[\frac{n+1}{1+(n+1)^2x}-\frac{1}{1+x}\Big].\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}S_n(x) =&S_n(0) + \int_0^x \frac{1}{2\sqrt{t}}\Big[\frac{n+1}{1+(n+1)^2 t} - \frac{1}{1+t}\Big]\mathrm{d}t\\ &= \arctan(n+1)\sqrt{x} - \arctan\sqrt{x}.\end{aligned}$$

容易看出, $S_n(x)$ 的极限函数为

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} - \arctan\sqrt{x}, & 0 < x \leqslant 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

因为每个 $S_n(x)$ 都在 $[0,1]$ 上连续而极限函数在 $x=0$ 点不连续, 说明 $S_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛. 其次,

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\int_0^1 |S_n(x) - S(x)|\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \Big[\frac{\pi}{2} - \arctan(n+1)\sqrt{x}\Big]\mathrm{d}x\\ =&\lim_{n\to\infty}\Big[\frac{\pi}{2} - \arctan(n+1) + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\arctan(n+1)\Big] = 0,\end{aligned}$$

所以 $S_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上积分平均收敛于 $S(x)$.

等式 (11.4.8) 也不难直接验证.

习 题 11.4

1. 确定下列函数级数的收敛域, 包括绝对收敛域和条件收敛域:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$; (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\Big(\frac{1-x}{1+x}\Big)^n$;

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\Big(\frac{x}{1+2x}\Big)^n\ (p>0)$; (4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n\sin^n x}{n^2}$;

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$; (6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\mathrm{e}^{-nx}$;

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{[n]}}{n!}$; (8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\frac{x^{[n]}}{n!}\ \ (p>0)$.

2. 证明: 如果狄利克雷级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ (其中 $\{a_n\}$ 是给定的数列) 在某点 x_0 收敛, 则它对所有 $x > x_0$ 也收敛, 且在区间 $x \geqslant x_0$ 上一致收敛.

3. 证明下列函数级数在指定的区域里一致收敛:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{x^2+n^2}$, $-\infty<x<+\infty$;　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{x+2^n}$, $-2<x<+\infty$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x}{1+n^4x^2}$, $-\infty<x<+\infty$;　(4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\arctan\dfrac{nx}{1+n^5x^2}$, $-\infty<x<+\infty$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$, $|x|\leqslant 1-\varepsilon$;　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$, $|x|\geqslant 1+\varepsilon$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\mathrm{e}^{-nx}$, $x\geqslant\varepsilon$;　(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^2\mathrm{e}^{-nx}$, $x\geqslant 0$;

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{n!n}(x^n+x^{-n})$, $\mathrm{e}^{-1}\leqslant x\leqslant\mathrm{e}$;　(10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{x}{n\ln^2 n}\right)$, $|x|\leqslant a$;

(11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt{n+2^x}}$, $-\infty<x<+\infty$;　(12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{\sqrt{n^2+x^2}}$, $-\infty<x<+\infty$;

(13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n^p}$, $\varepsilon\leqslant x\leqslant 2\pi-\varepsilon$;　(14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2n-1)x}{n^p}$, $\varepsilon\leqslant x\leqslant\pi-\varepsilon$.

a,p 表示任意正数, ε 表示充分小的正数.

4. 证明 M 判别法的下述推广: 如果对任意 $x\in I$ 成立 $a_n\leqslant u_n(x)\leqslant b_n$, $n=1,2,\cdots$, 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 都收敛, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

5. 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\mathrm{e}^{-nx}$ 在区间 $x\geqslant 0$ 上一致收敛.

6. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=\infty$ 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{|a_n|}$ 收敛. 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{x-a_n}$ 在不包含 a_n $(n=1,2,\cdots)$ 的任意有界闭区间上一致收敛.

7. 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(1-x)x^n}{1-x^{2n}}\sin nx$ 在 $[0,1)$ 上一致收敛.

8. 确定下列函数级数的收敛域, 并讨论和函数的连续性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+n^2x^2}$;　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x}{1+n^2x^2}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{nx}{1+n^4x^2}$;　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{nx}{1+n^3x^2}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{\sqrt{1+x^{2n}}}$;　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^3\mathrm{e}^{-nx}$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n\sqrt[3]{n}}$;　(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left[1+(-1)^{n-1}\dfrac{x}{n}\right]$;

(9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}$; (10) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(x+\frac{1}{n}\right)^n$.

9. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 (a,b) 上一致收敛, 它的每项 $u_n(x)$ 都在左端点 a 处有右极限 c_n, 即 $\lim_{x\to a^+} u_n(x) = c_n$, $n=1,2,\cdots$. 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛, 且 $\lim_{x\to a^+} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$.

10. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的每项 $u_n(x)$ 都在区间 (a,b) 上非负且单增. 又设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 (a,b) 上逐点收敛, 并且和函数有界. 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 (a,b) 上一致收敛.

11. 证明: $\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n(1-x)}{n(1-x^{2n+1})} = 2(1-\ln 2)$.

12. 研究下列函数级数的和函数在指定区间中的连续性与可微性 (包括高阶可微性):

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$, $-1<x<1$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$, $-\infty<x<+\infty$; (4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx^2}}{n^2}$, $-\infty<x<+\infty$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$, $-\infty<x<+\infty$; (6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$, $-\infty<x<+\infty$;

(7) $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\frac{2x}{n^2+x^2}$, $-\infty<x<+\infty$; (8) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{x}{n^2}\right)$, $-1<x<+\infty$.

13. 证明:

(1) 黎曼 ζ 函数 $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ 在 $x>1$ 上有定义并无穷可微;

(2) θ 函数 $\theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi n^2 x}$ 在 $x>0$ 上有定义并无穷可微;

(3) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 则函数 $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{-nx}$ 在 $x \geqslant 0$ 上有定义并连续, 在 $x>0$ 上无穷可微.

14. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}$ 在 $(-1,1)$ 上积分平均收敛于函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

第 12 章

幂 级 数

现在转入无穷级数研究的主要目的: 把函数表示成一些形式比较简单的或具有特定形式的函数的无穷和. 最简单的函数莫过于 ax^n 了, 其中 a 为任意常数, n 为非负整数 (当 $n=0$ 时, x^0 代表恒取 1 值的函数 1). 因此, 本章讨论把给定的函数表示成形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

的无穷级数的问题, 其中, a_n $(n=0,1,2,\cdots)$ 为任意常数, x_0 为给定的实数. 这种函数项级数叫做**幂级数**, 是多项式的自然推广, 可以看成 "无穷阶的多项式". 本章先对幂级数做一般的研究, 看它在什么范围里收敛, 以及它的和函数具有怎样的性质, 然后应用这些结果, 反过来研究, 一个函数在什么条件下可以表示成幂级数, 以及如何求它的幂级数表示等问题.

12.1 幂级数的收敛区域

形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \tag{12.1.1}$$

的无穷级数叫做**幂级数**, 其中 a_n $(n=0,1,2,\cdots)$ 为任意常数, x_0 为给定的实数. 常数 a_n $(n=0,1,2,\cdots)$ 叫做幂级数的**系数**. 显然地, 为了研究上面的一般形式的幂级数, 只需研究使 $x_0=0$ 的下列特殊形式的幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{12.1.2}$$

这是因为, 所有关于幂级数 (12.1.2) 的结论, 只要做简单的自变元变换 $x \to x-x_0$, 就化成了关于幂级数 (12.1.1) 的结论. 因此, 以下只考虑幂级数 (12.1.2).

必须注意的是, 幂级数的各项是严格按 x^n 的升幂排列的, 这种次序不可打乱. 例如,

$$1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots,$$

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+\cdots,$$

都是幂级数, 这其中虽然第二个幂级数的偶数次幂项都没有出现, 但这相当于 $a_{2k}=0$, $k=0,1,\cdots$. 但是像 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(x^n-x^{n-1})$ 以及

$$\sum_{n=1}^{\infty}[P_n(x)-P_{n-1}(x)],\qquad \text{其中}\ \ P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f\Big(\frac{k}{n}\Big)x^k(1-x)^{n-k},$$

等等, 都不是幂级数, 虽然它们的每一项都是多项式, 因而部分和也都是多项式.

显然, 幂级数由它的系数数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 完全确定. 因此, 幂级数的收敛域以及它的和函数的性质, 都由系数数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 完全确定. 本节先来研究, 如何从幂级数的系数数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 来求它的收敛域. 这个问题的解决主要依赖于以下定理.

定理 12.1.1 (阿贝尔第一定理) 如果幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在某个点 $x_0\neq 0$ 处收敛, 则对所有满足 $|x|<|x_0|$ 的点 x, 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 都绝对收敛. 反过来, 如果幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在某个点 $x_0\neq 0$ 处发散, 则对所有满足 $|x|>|x_0|$ 的点 x, 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 也都发散.

证明 先设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在某个点 $x_0\neq 0$ 处收敛, 即数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx_0^n$ 收敛. 根据级数收敛的必要条件, 得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nx_0^n=0$. 这特别蕴涵着数列 $\{a_nx_0^n\}_{n=0}^{\infty}$ 有界. 因此存在常数 $M>0$ 使成立

$$|a_nx_0^n|\leqslant M,\qquad n=0,1,2,\cdots.$$

由此推知 $|a_n|\leqslant M|x_0|^{-n}$, $n=0,1,2,\cdots$, 从而对任意满足 $|x|<|x_0|$ 的点 x 有

$$|a_nx^n|=|a_n||x|^n\leqslant M|x_0|^{-n}|x|^n=M\Big(\frac{|x|}{|x_0|}\Big)^n,\qquad n=0,1,2,\cdots.$$

由 $\dfrac{|x|}{|x_0|}<1$ 知级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\Big(\dfrac{|x|}{|x_0|}\Big)^n$ 收敛, 所以根据正项级数的比较判别法, 即知级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 对所有满足 $|x|<|x_0|$ 的点 x 都绝对收敛.

反之设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在某个点 $x_0 \neq 0$ 处发散, 要证明对所有满足 $|x| > |x_0|$ 的点 x, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 也都发散. 反证而设对某个满足 $|x| > |x_0|$ 的点 x, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛. 则由已证明的结论即知级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ 收敛. 这与给定的条件相矛盾. 因此, 当幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在某个点 $x_0 \neq 0$ 处发散时, 必对所有满足 $|x| > |x_0|$ 的点 x 也发散. 证毕.

根据以上定理, 对于任意一个幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 只可能有以下三种情况中的一个发生:

(1) 只对 $x = 0$ 收敛, 对所有其他的 $x \neq 0$ 都发散. 例如, 级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n = 1 + x + 4x^2 + 9x^3 + \cdots + n^n x^n + \cdots$$

就属于这种情况, 因为只要 $x \neq 0$, 则当 $n \geqslant 2|x|^{-1}$ 时就有 $|n^n x^n| \geqslant 2^n$, 所以 $\lim_{n\to\infty} |n^n x^n| = +\infty$, 即级数的通项不趋于零, 所以它发散.

(2) 对所有实数 x 都收敛. 例如, 级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

就属于这种情况, 因为对任意 $x \neq 0$ 都有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}\right|}{\left|\frac{1}{n!}x^n\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0,$$

所以根据达朗贝尔判别法, 这个级数对所有实数 $x \neq 0$ 都绝对收敛, 进而它对所有实数 x 都绝对收敛.

(3) 对某个实数 $x_1 \neq 0$ 收敛, 并对某个实数 $x_2 \neq 0$ 发散. 根据阿贝尔第一定理, 这时必有 $|x_2| > |x_1|$. 令

$$r = \sup\left\{|x| : 级数\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n 收敛\right\}. \tag{12.1.3}$$

注意等式右端的集合是非空的: 至少 $|x_1|$ 属于这个集合. 同时这个集合有上界: $|x_2|$ 就是它的一个上界. 因此以上定义是合理的. 根据阿贝尔第一定理容易知道, 这时对

所有满足 $|x|<r$ 的实数 x, 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 都绝对收敛 (因为对这样的 x, 总可以找一个 x_0 使得 $|x|<|x_0|<r$, 因为级数在 x_0 处收敛, 所以在 $|x|<|x_0|$ 处绝对收敛), 而对所有满足 $|x|>r$ 的实数 x, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 都发散.

将以上分析的结果总结成以下定理.

定理 12.1.2 对于任何一个幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 以下三种情况有且仅有一种情况出现:

(1) 只在 $x=0$ 处收敛;

(2) 对所有实数 x 都绝对收敛;

(3) 存在一个正数 r, 使对所有满足 $|x|<r$ 的实数 x 都绝对收敛, 而对所有满足 $|x|>r$ 的实数 x 都发散.

基于这个定理, 引进下列概念.

定义 12.1.1 如果幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 对所有实数 x 都收敛, 则定义 $r=\infty$, 否则按式 (12.1.3) 定义 r. 称这个广义的数 r 为幂级数的**收敛半径**.

应用级数绝对收敛的达朗贝尔判别法和柯西判别法, 可以很容易地得到收敛半径的一些计算公式.

定理 12.1.3 对于幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 设在广义的极限意义下有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\rho \qquad (\text{即 } 0\leqslant\rho\leqslant+\infty).$$

则它的收敛半径 $r=\dfrac{1}{\rho}$. 这里当 $\rho=0$ 时认为 $r=+\infty$, 当 $\rho=+\infty$ 时认为 $r=0$ (下同).

证明 对 $x\neq 0$, 计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|x|=\rho|x|.$$

如果 $0<\rho<+\infty$, 则由达朗贝尔判别法知, 当 $|x|<\dfrac{1}{\rho}$ 时级数绝对收敛, 而当 $|x|>\dfrac{1}{\rho}$ 时级数发散. 因此收敛半径 $r=\dfrac{1}{\rho}$. 如果 $\rho=0$, 则由上式和达朗贝尔判别法知, 级数对所有实数 x 都绝对收敛. 如果 $\rho=+\infty$, 则由上式和达朗贝尔判别法知级数对所有都 $x\neq 0$ 发散. 证毕.

定理 12.1.4　对于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 设在广义的极限意义下有

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho \qquad (\text{即 } 0 \leqslant \rho \leqslant +\infty).$$

则它的收敛半径 $r = \dfrac{1}{\rho}$.

证明　对 $x \neq 0$, 有

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}|x| = \rho|x|.$$

如果 $0 < \rho < +\infty$, 则由柯西判别法知, 当 $|x| < \dfrac{1}{\rho}$ 时级数绝对收敛, 而当 $|x| > \dfrac{1}{\rho}$ 时级数发散. 因此收敛半径 $r = \dfrac{1}{\rho}$. 如果 $\rho = 0$, 则由上式和柯西判别法知, 级数对所有实数 x 都绝对收敛. 如果 $\rho = +\infty$, 则由上式和柯西判别法知级数对所有 $x \neq 0$ 都发散. 证毕.

一旦知道了幂级数的收敛半径 r, 那么由定理 12.1.2 知, 级数的收敛域就是下列四个区间之一:

(1) $(-r, r)$, 即幂级数在区间 $(-r, r)$ 的两个端点处都发散;

(2) $[-r, r]$, 即幂级数在区间 $(-r, r)$ 的两个端点处都收敛;

(3) $[-r, r)$, 即幂级数在区间 $(-r, r)$ 的左端点 $-r$ 处收敛, 而在右端点 r 处发散;

(4) $(-r, r]$, 即幂级数在区间 $(-r, r)$ 的右端点 r 处收敛, 而在左端点 $-r$ 处发散.

这四种情况都可能发生. 事实上, 考察下列四个幂级数:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n.$$

显然, 这四个幂级数的收敛半径都是 $r = 1$. 但是, 第一个幂级数只在区间 $(-1, 1)$ 上收敛, 在这个区间的两个端点处都发散; 第二个幂级数在闭区间 $[-1, 1]$ 上收敛; 第三个幂级数在区间 $(-1, 1)$ 的左端点处收敛, 而在右端点处发散; 第四个幂级数在区间 $(-1, 1)$ 的右端点处收敛, 而在左端点处发散. 因此在求出了幂级数的收敛半径 r 之后, 必须对 $\pm r$ 处幂级数的敛散性单独进行讨论, 以最终确定它的收敛域.

上面的讨论表明, 幂级数 (12.1.2) 的收敛域是一个以原点为中心的区间. 自然地, 幂级数 (12.1.1) 的收敛域就是一个以点 x_0 为中心的区间了. 另外, 从定理 12.1.2 可知, 幂级数在其收敛域的内部即开区间 $(-r, r)$ 中都是绝对收敛的, 但在收敛域的两个端点处, 即使收敛也未必是绝对收敛的.

例 1　确定幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$ 的收敛域 (见图 12-1-1).

解 先求收敛半径. 由达朗贝尔公式有

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{[(n+1)!]^2}{[2(n+1)]!}}{\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2(n+1)(2n+1)}=\frac{1}{4}.$$

所以收敛半径 $r=\dfrac{1}{\rho}=4$.

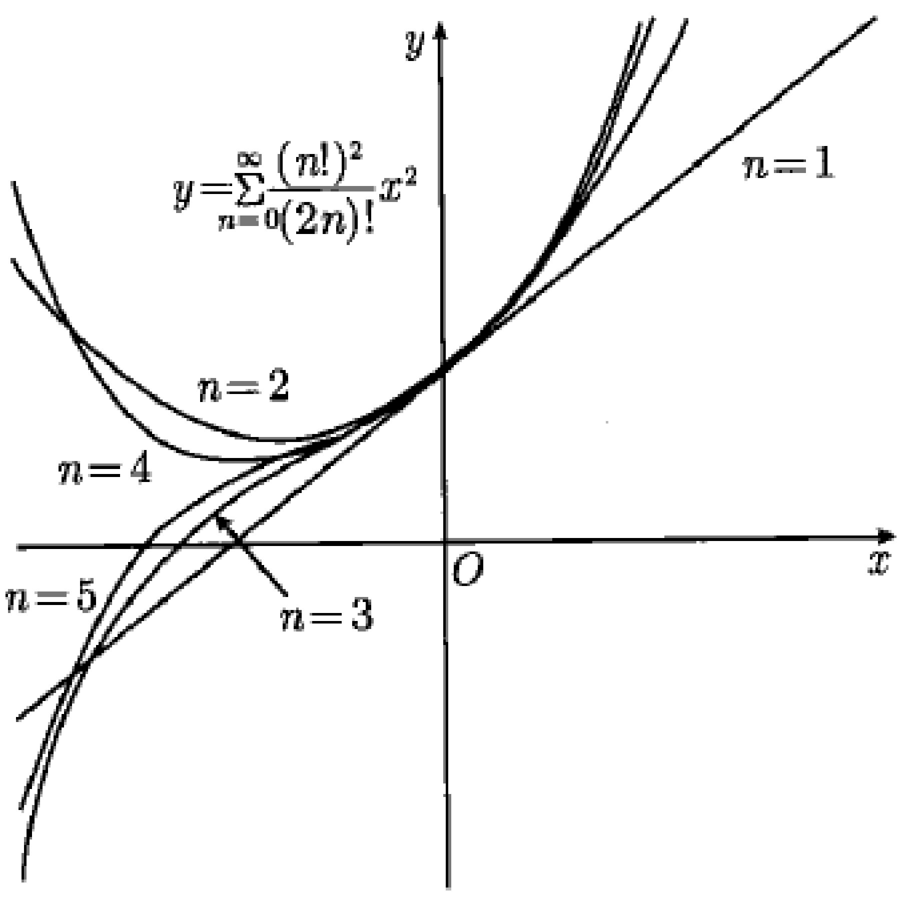


图 12-1-1 例 1 中幂级数的部分和序列

再考虑幂级数在区间 $(-4,4)$ 的两个端点 $x=\pm4$ 处的敛散性. 当 $x=4$ 时, 级数成为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}4^n$. 通项 $u_n=\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}4^n$, 所以

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{2(n+1)(2n+1)}{4(n+1)^2}=1-\frac{1}{2(n+1)}<1,$$

可见 $u_{n+1}>u_n$, 因此通项 u_n 不趋于零. 故级数发散. 类似地, 当 $x=-4$ 时级数的通项也不趋于零, 从而也发散.

综上可知, 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$ 的收敛域为 $(-4,4)$.

例 2 确定幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{n^2}}{2^n}$ 的收敛域 (见图 12-1-2).

解 先求收敛半径. 由柯西公式有

$$\rho=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{2^n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1.$$

所以收敛半径 $r=\dfrac{1}{\rho}=1$.

再考虑在两个端点 $x=\pm1$ 处的敛散性. 当 $x=\pm1$ 时, 级数成为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(\pm1)^{n^2}}{2^n}$. 由于 $\left|\dfrac{(\pm1)^{n^2}}{2^n}\right|\leqslant\dfrac{1}{2^n}$, 而级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$ 收敛, 所以幂级数在 $x=\pm1$ 处收敛.

综上可知, 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{n^2}}{2^n}$ 的收敛域为 $[-1,1]$.

例 3 确定幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{4^n n!(n+1)!}x^{2n+1}$ 的收敛域 (见图 12-1-3).

解 由于级数的偶数项系数全为零, 所以达朗贝尔公式不可用. 另一方面, 柯西公式对此级数也不好用. 所以不用这些公式, 而改用直接确定级数的敛散性的方法来

求它的收敛域. 这时对任意实数 $x \neq 0$, 级数的通项为 $u_n = \dfrac{(-1)^n}{4^n n!(n+1)!} x^{2n+1}$. 有

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{|x|^2}{4(n+1)(n+2)} \to 0 \quad 当 \quad n \to \infty.$$

所以根据达朗贝尔判别法知, 级数对所有实数 x 都绝对收敛, 说明收敛域为 $(-\infty, +\infty)$, 亦即收敛半径 $r = +\infty$.

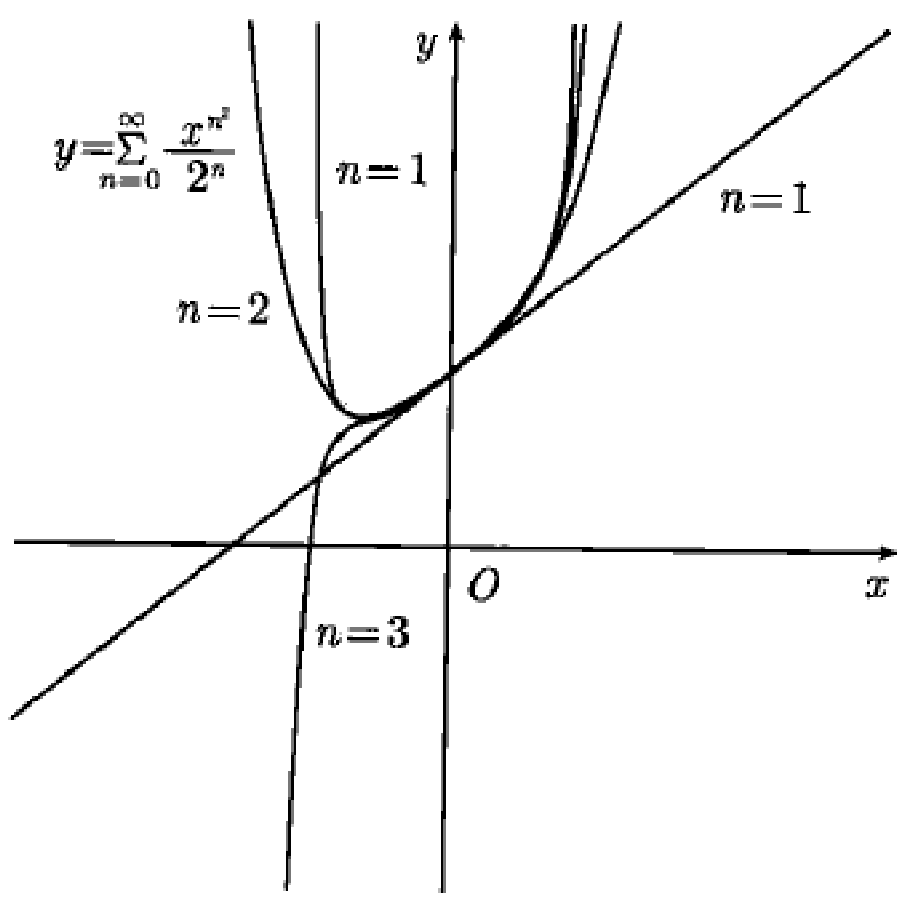


图 12-1-2　例 2 中幂级数的部分和序列

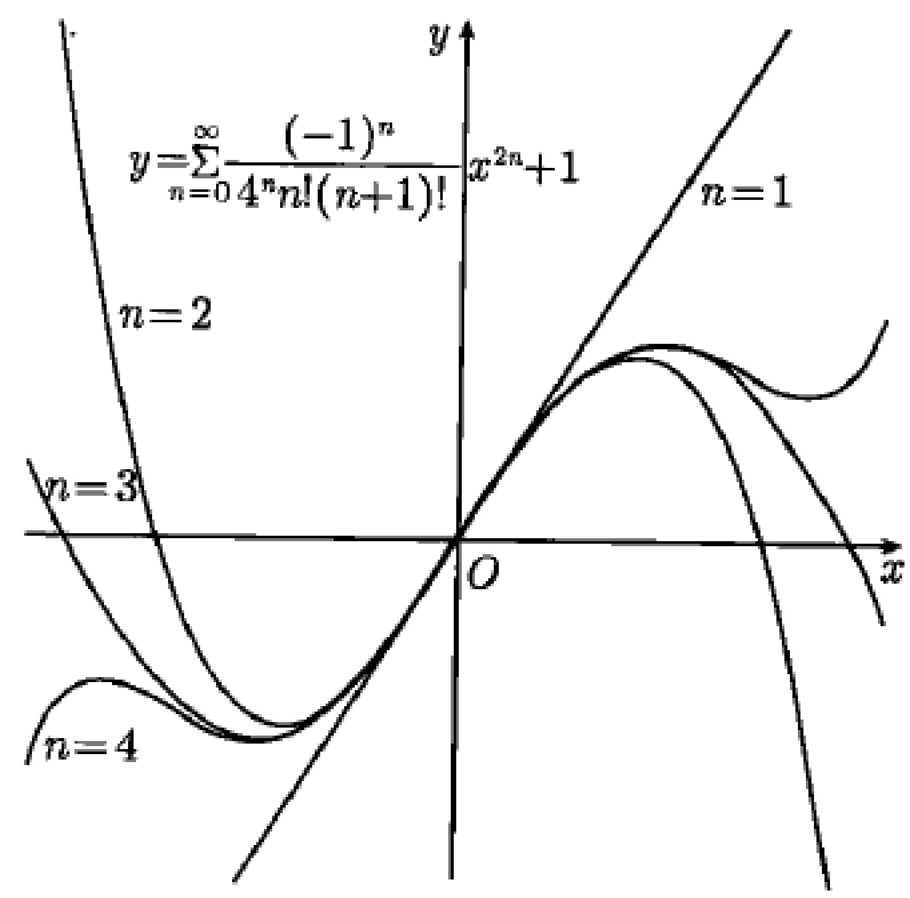


图 12-1-3　例 3 中幂级数的部分和序列

习　题　12.1

1. 求下列幂级数的收敛半径和收敛域:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n^2+1}} x^n$;　　(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right) x^n$;

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(n!)^3}{(3n)!} x^n$;　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$;　　(6) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{3^n+(-2)^n}{n^p} x^n \quad (p>0)$;

(7) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n!}{a^{n^2}} x^n \quad (a>1)$;　　(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a^{n^2} x^n \quad (0<a<1)$;

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n!} \left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n x^n$;　　(10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{[2+(-1)^n]^n}{n} x^n$;

(11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n+(-3)^n}{n^p} x^{2n} \quad (p>0)$;　　(12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[\dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\right]^p x^{3n} \quad (p>0)$.

2. 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 r_1, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径为 r_2. 求下列幂级数的收敛半径:

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$; (2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$; (3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b_n x^n$.

3. 设 $\liminf\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = l$, $\limsup\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = L$. 证明: 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 r 满足下述不等式 $l \leqslant r \leqslant L$.

4. 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $r>0$, 且 $a_n \geqslant 0$, $n=0,1,2,\cdots$. 又设该幂级数的和函数在 $(0,r)$ 中有界. 证明: 该幂级数在 $x=r$ 点收敛.

5. 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在某点 $x_0 \neq 0$ 的部分和数列有界. 证明它的收敛半径 $r \geqslant |x_0|$, 并且对那些使得 $xx_0>0$ 且 $|x|<|x_0|$ 的 x 成立不等式

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right| \leqslant \sup_n \left|\sum_{k=0}^{n} a_k x_0^k\right|.$$

6. 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 是正项级数, 即 $a_n \geqslant 0$, $n=0,1,2,\cdots$. 用 $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ 表示它的部分和数列. 假设该级数发散, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{A_n}=0$. 证明: 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $r=1$.

7. 求下列级数的收敛域:

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{a^n+b^n}\quad(a>b>0)$; (2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^n\quad(p>0)$;

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}\left(\dfrac{x-2}{x^2+1}\right)^n$; (4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{x^n}\sin\dfrac{\pi}{2^n}$;

(5) $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\dfrac{x^n}{2^{n^2}}$; (6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n^2}\mathrm{e}^{-nx}$;

(7) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a^n(n!)^2}{(2n)!}\tan^n x\quad(a>0)$; (8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n^2}\ln^n x$.

12.2 和函数的性质

搞清楚了幂级数的收敛区域, 再来研究它的和函数的性质. 先考虑和函数的连续性. 为此需要知道幂级数在怎样的范围里一致收敛. 这个问题由下述定理 12.2.1 给出

了完全的回答.

定理 12.2.1 (阿贝尔第二定理) 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $r>0$. 则有下列结论:

(1) 对任意 $0<s<r$, 幂级数在区间 $[-s,s]$ 上一致收敛;

(2) 如果幂级数在 $x=r$ 处收敛, 则它在 $[0,r]$ 上一致收敛; 如果在 $x=-r$ 处收敛, 则它在 $[-r,0]$ 上一致收敛.

证明 (1) 先设 $0<s<r$. 则幂级数在 $x=s$ 处绝对收敛, 即 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n s^n| < \infty$. 由于

$$|a_n x^n| \leqslant |a_n s^n|, \qquad \forall x \in [-s,s], \qquad n=0,1,2,\cdots,$$

所以由 M 判别法知, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在区间 $[-s,s]$ 上一致收敛. 这就证明了结论 (1).

(2) 设幂级数在 $x=r$ 处收敛, 则把它改写为

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \left(\frac{x}{r}\right)^n, \qquad \text{对 } 0 \leqslant x \leqslant r.$$

由于级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ 收敛, 而函数列 $\left(\frac{x}{r}\right)^n$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 在 $[0,r]$ 上一致有界且对每个固定的 $x\in[0,r]$ 单调递减:

$$0 \leqslant \left(\frac{x}{r}\right)^n \leqslant 1, \quad \forall x \in [0,r]; \qquad \frac{x}{r} \geqslant \left(\frac{x}{r}\right)^2 \geqslant \left(\frac{x}{r}\right)^3 \geqslant \cdots \geqslant \left(\frac{x}{r}\right)^n \geqslant \cdots.$$

所以根据阿贝尔判别法知, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在区间 $[0,r]$ 上一致收敛. 类似地可证明, 如果幂级数在 $x=-r$ 处收敛, 则它在 $[-r,0]$ 上一致收敛. 这就证明了结论 (2). 证毕.

作为这个定理的直接推论, 有

定理 12.2.2 幂级数的和函数在其收敛域中的任意一点都连续.

证明 先设幂级数的收敛域为 $(-r,r)$. 对任意 $x_0\in(-r,r)$, 任取 $0<s<r$ 使得 $|x_0|<s$. 由 $0<s<r$ 知幂级数在区间 $[-s,s]$ 上一致收敛. 因为幂级数的每一项都是连续函数, 所以由此推知其和函数在区间 $[-s,s]$ 上连续. 由于 $|x_0|<s$, 所以特别地和函数在点 x_0 连续. 这就证明了幂级数的和函数在区间 $(-r,r)$ 中任意一点都连续.

再设幂级数的收敛域为 $(-r,r]$. 与前面类似的讨论可知, 其和函数在区间 $(-r,r)$ 中的每个点处都连续. 所以只需再证明和函数也在点 $x=r$ 连续. 因为幂级数在点 $x=r$ 收敛, 根据定理 12.2.1 知它在 $[0,r]$ 上一致收敛, 从而其和函数在 $[0,r]$ 上连续, 特别地也在点 $x=r$ 连续. 因此幂级数的和函数在区间 $(-r,r]$ 中每一点都连续.

类似地可证明如果幂级数的收敛域为 $[-r,r)$, 则其和函数在 $[-r,r)$ 上连续; 如果幂级数的收敛域为 $[-r,r]$, 则其和函数在 $[-r,r]$ 上连续. 证毕.

再来研究幂级数和函数的可微性. 应用定理 12.2.1 有定理 12.2.3.

定理 12.2.3 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $r>0$, 收敛域为区间 I, 和函数为 $S(x)$. 又设对它逐项求导所得幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \tag{12.2.1}$$

的收敛半径为 r_1, 收敛域为区间 I_1, 和函数为 $S_1(x)$. 则有下列结论:

(1) $r_1=r$, 即逐项求导所得幂级数 (12.2.1) 的收敛半径与原幂级数的收敛半径相同;

(2) $I_1 \subseteq I$, 即逐项求导所得幂级数 (12.2.1) 的收敛域 I_1 是原幂级数的收敛域 I 的子区间;

(3) $S'(x)=S_1(x)$, $\forall x \in I_1$, 即幂级数的和函数 $S(x)$ 在区间 I_1 上处处可微, 而且成立逐项求导公式

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\Big)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \qquad \forall x \in I_1. \tag{12.2.2}$$

证明 (1) 先证明 $r_1 \leqslant r$. 如果 $r_1=0$, 这个不等式是显然的. 下设 $r_1>0$. 只需证明 $(-r_1,r_1) \subseteq [-r,r]$. 为此设 $x_0 \in (-r_1,r_1)$, $x_0 \neq 0$. 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x_0^{n-1}$ 绝对收敛. 由于

$$|a_n x_0^n| \leqslant |x_0||n a_n x_0^{n-1}|, \qquad n=1,2,\cdots,$$

所以根据正项级数的比较判别法知, 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ 也绝对收敛. 因此 $r \geqslant |x_0|$, 从而 $x_0 \in [-r,r]$. 这就证明了 $r_1 \leqslant r$. 再证明 $r \leqslant r_1$. 设 $x_0 \in (-r,r)$. 取正数 s 使得 $|x_0|<s<r$. 由 $s<r$ 知级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n s^n$ 绝对收敛. 有

$$|n a_n x_0^{n-1}| = |a_n s^n|\left|\frac{n x_0^{n-1}}{s^n}\right|, \qquad n=1,2,\cdots,$$

条件 $|x_0|<s$ 蕴涵着 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{n x_0^{n-1}}{s^n}\right|=0$, 所以存在常数 $M>0$ 使 $\left|\dfrac{n x_0^{n-1}}{s^n}\right| \leqslant M$, $n=1,2,\cdots$. 这样从上式得

$$|n a_n x_0^{n-1}| \leqslant M|a_n s^n|, \qquad n=1,2,\cdots,$$

因为级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n s^n$ 绝对收敛, 所以从上面的不等式, 根据正项级数的比较判别法即知级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} na_n x_0^{n-1}$ 也绝对收敛. 因此与前类似地就得到 $r_1 \geqslant r$. 这就证明了 $r_1 = r$.

(2) 由于已经证明了 $r_1 = r$, 所以为了证明 $I_1 \subseteq I$, 只需再证明: 如果逐项求导所得级数 (12.2.1) 在收敛域 I_1 的某个端点处收敛, 则原级数也在这个端点处收敛. 以端点 $r_1 = r$ 为例, 假设级数 (12.2.1) 在该点收敛. 显然

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n = \sum_{n=1}^{\infty} na_n r^{n-1} \cdot \frac{r}{n}.$$

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n r^{n-1}$ 收敛, 而数列 $\dfrac{r}{n}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 单调递减趋于零, 所以由狄利克雷判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n r^n$ 也收敛. 这就证明了 $I_1 \subseteq I$.

(3) 最后证明 $S'(x_0) = S_1(x_0)$, $\forall x_0 \in I_1$. 对任意 $x_0 \in I_1$, 如果 x_0 不是区间 I_1 的端点, 则存在正数 s 使得 $|x_0| < s < r_1 = r$. 由于 $s < r_1$, 根据阿贝尔第二定理知级数 (12.2.1) 在区间 $[-s, s]$ 上一致收敛, 从而根据函数级数的逐项微分定理 (定理 11.4.7) 知, $S(x)$ 在区间 $[-s, s]$ 上可微, 且 $S'(x) = S_1(x)$, $\forall x \in [-s, s]$. 特别地, $S(x)$ 在点 x_0 可微, 且 $S'(x_0) = S_1(x_0)$. 如果 x_0 是区间 I_1 的端点, 不妨设是右端点, 即 $x_0 = r_1 = r$. 这意味着级数 (12.2.1) 在区间 I_1 的右端点收敛, 从而根据阿贝尔第二定理知级数 (12.2.1) 在区间 $[0, r_1]$ 上一致收敛. 于是再次根据函数级数的逐项微分定理, 即知 $S(x)$ 在区间 $[0, r_1]$ 上可微, 且 $S'(x) = S_1(x)$, $\forall x \in [0, r_1]$. 特别地, $S(x)$ 在点 $x_0 = r_1 = r$ 可微, 且 $S'(x_0) = S_1(x_0)$. 定理证毕.

以上定理表明, 幂级数的和函数在收敛域内部 (开区间内) 的每个点处都是可微的, 而且可以通过对幂级数逐项求导来求和函数的导数. 在收敛域的端点处, 如果逐项求导所得级数在该端点收敛, 则原幂级数也必在该点收敛, 而且和函数在该点可微, 并且导数等于逐项求导所得幂级数在该点的和. 但是反过来的结论不成立, 即由和函数在某个端点处可微, 不能推出逐项求导所得幂级数在该点收敛, 或者说, 由逐项求导所得幂级数在某个端点处发散, 不能断言说原幂级数的和函数就在这个端点处不可微. 例如, 幂级数

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots \tag{12.2.3}$$

的收敛域为 $(-1, 1)$, 和函数为 $\dfrac{1}{1-x}$. 因此逐项积分以后得到的级数

$$x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{1}{n}x^n + \cdots$$

的和函数为 $-\ln(1-x)$. 这个级数的收敛域为 $[-1, 1)$, 其和函数 $-\ln(1-x)$ 在收敛域

的左端点 $x=-1$ 处是可微的, 但逐项求导得到的级数 (12.2.3) 在这个端点处并不收敛.

反复应用上述定理, 就得到

定理 12.2.4 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $r>0$, 收敛域为区间 I, 和函数为 $S(x)$. 又设对它逐项求 m 阶导数所得幂级数

$$\sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)a_n x^{n-m} \tag{12.2.4}$$

的收敛半径为 r_m, 收敛域为区间 I_m, 和函数为 $S_m(x)$. 则有下列结论:

(1) $r_m=r$, 即逐项求 m 阶导数所得幂级数 (12.2.4) 的收敛半径与原幂级数的收敛半径相同;

(2) $I_m \subseteq I$, 即逐项求 m 阶导数所得幂级数 (12.2.4) 的收敛域 I_m 是原幂级数的收敛域 I 的子区间;

(3) $S^{(m)}(x)=S_m(x)$, $\forall x\in I_m$, 即幂级数的和函数 $S(x)$ 在区间 I_m 上处处有 m 阶导数, 而且成立逐项求 m 阶导数的公式

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)^{(m)}=\sum_{n=m}^{\infty}(a_n x^n)^{(m)}, \qquad \forall x\in I_m. \tag{12.2.5}$$

由以上定理的结论 (1) 知 $(-r,r)\subseteq I_m$, $m=1,2,\cdots$, 所以从上述定理立刻得到

定理 12.2.5 幂级数的和函数在其收敛域的内部即开区间 $(-r,r)$ (其中 r 为收敛半径) 上无穷可微, 并且在此区间上成立逐项求各阶导数的公式 (12.2.5).

现在来看, 10.1 节例 4 用幂级数求解贝塞尔方程的方法是否合理. 我们已经形式地求出了贝塞尔方程

$$x^2y''+xy'+(x^2-1)y=0 \tag{12.2.6}$$

的一个幂级数形式的解

$$y(x)=c\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4^k k!(k+1)!}x^{2k+1}, \tag{12.2.7}$$

其中 c 为任意常数. 根据 12.1 节例 3, 这个幂级数的收敛域为 $(-\infty,+\infty)$, 因此根据定理 12.2.5 知, 其和函数 $y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上无穷可微, 而且可以通过对幂级数逐项求各阶导数来求 $y(x)$ 的对应阶导数, 特别有

$$y'(x)=c\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k+1)}{4^k k!(k+1)!}x^{2k}, \qquad y''(x)=c\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k 2k(2k+1)}{4^k k!(k+1)!}x^{2k-1}. \tag{12.2.8}$$

把式 (12.2.7) 和式 (12.2.8) 中的两个表达式代入方程 (12.2.6), 不难知道方程 (12.2.6) 成为恒等式. 所以由幂级数 (12.2.7) 定义的函数 $y(x)$ 确实是方程 (12.2.6) 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的一个解. 这就证明了 10.1 节例 4 所用方法的合理性.

关于幂级数的逐项积分我们有下列定理

定理 12.2.6 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $r>0$, 和函数为 $S(x)$. 则有下列结论:

(1) 对任意 $x \in (-r,r)$, 成立逐项积分公式

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}; \tag{12.2.9}$$

(2) 如果式 (12.2.9) 右端的幂级数在 $x=r$ 处收敛, 则这个等式也在 $x=r$ 处成立; 同样如果式 (12.2.9) 右端的幂级数在 $x=-r$ 处收敛, 则这个等式也在 $x=-r$ 处成立.

证明 由于对任意 $0<s<r$, 幂级数在区间 $[-s,s]$ 上一致收敛, 所以在这个区间上成立逐项积分, 当然在它的任何子区间上也成立逐项积分, 从而式 (12.2.9) 对任意 $x\in[-s,s]$ 都成立. 由 s 的任意性, 即知式 (12.2.9) 对任意 $x\in(-r,r)$ 都成立. 这就证明了结论 (1). 为证明结论 (2), 令式 (12.2.9) 右端幂级数的和函数为 $T(x)$. 则由结论 (1) 知成立

$$T(x) = \int_0^x S(t)\mathrm{d}t, \qquad \forall x \in (-r,r). \tag{12.2.10}$$

如果式 (12.2.9) 右端的幂级数在 $x=r$ 处收敛, 则根据阿贝尔第二定理知 $T(x)$ 在点 $x=r$ 连续, 且

$$T(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} r^{n+1}.$$

于是在式 (12.2.10) 中令 $x\to r^-$ 取极限, 即知式 (12.2.9) 在 $x=r$ 处成立. 对 $x=-r$ 可采用类似的推理. 证毕.

例 1 求下列幂级数的和函数: (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-1}}{4n+1}$.

解 (1) 级数的收敛域为 $(-1,1)$. 记和函数为 $S(x)$. 则有

$$S(x) = x\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = x\Big(\sum_{n=1}^{\infty} nx^n\Big)' = xT'(x), \qquad -1<x<1,$$

其中 $T(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$. 由于

$$T(x)=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x\Big(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\Big)'=x\Big(\frac{1}{1-x}\Big)'=\frac{x}{(1-x)^2},\qquad -1<x<1,$$

所以

$$S(x)=xT'(x)=x\Big(\frac{x}{(1-x)^2}\Big)'=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3},\qquad -1<x<1.$$

(2) 级数的收敛域为 $(-1,1)$. 记和函数为 $S(x)$. 则有

$$S(x)=\frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}=\frac{1}{x^2}T(x),\qquad -1<x<1,$$

其中 $T(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{4n+1}}{4n+1}$. 由于

$$T'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{4n}=\frac{x^4}{1-x^4},\qquad -1<x<1,$$

所以

$$T(x)=\int_0^x\frac{t^4}{1-t^4}\mathrm{d}t=-x+\frac{1}{2}\arctan x+\frac{1}{4}\ln\Big(\frac{1+x}{1-x}\Big),\qquad -1<x<1$$

进而

$$S(x)=\frac{1}{x^2}T(x)=-\frac{1}{x}+\frac{\arctan x}{2x^2}+\frac{1}{4x^2}\ln\Big(\frac{1+x}{1-x}\Big),\qquad -1<x<1$$

例 2 证明: (1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}=\mathrm{e}^x,\ \forall x\in\mathbf{R}$;

(2) $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

证明 对于幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$, 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0,$$

所以它的收敛半径为 $r=+\infty$, 从而收敛域为整个实数轴 $(-\infty,+\infty)$. 记其和函数为 $S(x)$. 则有

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=S(x).$$

据此和 $S(0)=1$, 根据推论 5.3.2 立得 $S(x)=\mathrm{e}^x$. 这就证明了 (1).

为了求级数 $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ 的和, 考虑幂级数 $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n$. 易知这个幂级数的收敛半径为 $r=1$, 收敛域为 $[-1,1)$. 由阿贝尔第二定理知, 其和函数 $S(x)$ 在点 $x=-1$ 连续. 为了求 $S(x)$ 的表达式, 在开区间 $(-1,1)$ 上求 $S(x)$ 的导数. 由逐项微分定理有

$$\begin{aligned}S'(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}nx^{n-1}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n-2)!!}x^{n-1}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}x^n\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(2n+1)x^n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}nx^n\\&=\frac{1}{2}S(x)+xS'(x).\end{aligned}$$

所以得到

$$S'(x)=\frac{1}{2(1-x)}S(x).$$

据此和 $S(0)=1$, 应用定理 8.1.1 即得

$$S(x)=\mathrm{e}^{\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{2(1-t)}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\ln(1-x)}=\frac{1}{\sqrt{1-x}},\qquad \forall x\in(-1,1).$$

现在令 $x\to(-1)^+$, 就得到了所求级数的和:

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=S(-1)=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{1}{\sqrt{1-x}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

习　题　12.2

1. 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 $r>0$. 证明阿贝尔第二定理的下述逆命题:

(1) 如果 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $(-r,r)$ 上一致收敛, 则它的收敛域为 $[-r,r]$;

(2) 如果 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $(0,r)$ 上一致收敛而在 $(-r,0)$ 上不一致收敛, 则它的收敛域为 $(-r,r]$, 同样如果 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $(-r,0)$ 上一致收敛而在 $(0,r)$ 上不一致收敛, 则它的收敛域为 $[-r,r)$.

2. (1) 定理 12.2.2 表明, 由幂级数在收敛域的某个端点收敛可以推出其和函数在这个端点连续. 但是反过来, 不能由和函数在收敛域的某个端点连续推出幂级数在这个端点收敛. 请举例说明;

   (2) 定理 12.2.5 表明, 由幂级数的收敛半径为 $R>0$ 可以推出其和函数在 $(-R,R)$ 上无穷可微. 但是反过来, 不能由和函数的表达式是某个区间 $(-R,R)$ 上的无穷可微函数推出幂级数的收敛半径一定 $\geqslant R$. 请举例说明之.

3. 设 $p>0$. 对幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^p}$, 证明以下结论:

   (1) 收敛半径为 $r=1$;

   (2) 如果 $0<p\leqslant 1$, 则收敛域为 $[-1,1)$; 如果 $p>1$, 则收敛域为 $[-1,1]$;

   (3) 如果 $m<p\leqslant m+1$, 其中 m 为正整数, 则和函数在 $[-1,1)$ 上 m 阶连续可微, 并可在此区间上对幂级数逐项求 m 阶导数, 而在点 $x=1$ 处 $m-1$ 阶连续可微, 并可在该点对幂级数逐项求 $m-1$ 阶导数.

4. 设 $p\geqslant 0$. 对幂级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^p\ln^2 n}$, 证明以下结论:

   (1) 收敛半径为 $r=1$;

   (2) 如果 $0\leqslant p<1$, 则收敛域为 $[-1,1)$; 如果 $p\geqslant 1$, 则收敛域为 $[-1,1]$;

   (3) 如果 $m\leqslant p<m+1$, 其中 m 为正整数, 则和函数在 $[-1,1)$ 上 m 阶连续可微, 并可在此区间上对幂级数逐项求 m 阶导数, 而在点 $x=1$ 处 $m-1$ 阶连续可微, 并可在该点对幂级数逐项求 $m-1$ 阶导数.

5. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n$ 收敛. 证明: 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径 $r\geqslant 1$, 且在点 $x=1$ 收敛, 并且和函数 $S(x)$ 在点 $x=1$ 左可导, 而且 $S'_-(1)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n$.

6. 利用逐项微分或逐项积分求下列幂级数的和:

   (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(2n+1)x^n$;

   (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^n$;　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}x^{2n}$;

   (5) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{n(n-1)}$;　　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{2n+1}$;

   (7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{4n+1}$;　　(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(2n-1)}$.

7. 求下列幂级数的和:

   (1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n!3^n}x^n$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}n^2}{(n+2)!}x^n$;

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)^3}{(n+1)!}x^{2n+1}$; (4) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2+1)}{n!}x^{2n}$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$; (6) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n}}{2n+1}$;

(7) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}x^{2n}$; (8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!}x^{n+1}$.

8. 应用阿贝尔第二定理求下列级数的和:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3n-2}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{3^n}$; (4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n^2}{5^n}$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$; (6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}$;

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}$; (8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}$.

9. 设m是正整数. 证明幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{mn}}{(mn)!}$的和函数$y(x)$满足微分方程$y^{(m)}(x)=y(x)$.

10. 用幂级数方法求以下微分方程的解:

(1) $y''-xy'-y=0$; (2) $y''+xy'+y=0$;

(3) $xy''+y'+xy=0$; (4) $xy''+y'-y=0$;

(5) $(1-x)y''+y=0$; (6) $(1-x^2)y''-2xy'+m(m+1)y=0$.

11. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 $r=1$, 且 $\lim_{n\to\infty}na_n=0$. 又设该幂级数在 $(-1,1)$ 中的和函数为 $f(x)$, 且 $\lim_{x\to1^-}f(x)=S$. 证明下述陶伯尔定理: 该幂级数在点 $x=1$ 收敛, 且和为 S.

12. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 $r=1$, 且 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}=0$. 又设该幂级数在 $(-1,1)$ 中的和函数为 $f(x)$, 且 $\lim_{x\to1^-}f(x)=S$. 利用 11 题的结论证明: 该幂级数在点 $x=1$ 收敛, 且和为 S.

12.3 函数的幂级数展开

有了前两节的准备, 现在便可开始讨论本章的核心问题: 把函数表示成幂级数.

12.3.1 函数展开成幂级数的必要条件和充分条件

设 f 是定义在开区间 I 上的一个函数, x_0 是区间 I 中的一点. 如果存在常数 $r>0$, r 比较小使得 $(x_0-r,x_0+r)\subseteq I$, 和一列实数 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, 使成立

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n,\qquad \forall x\in(x_0-r,x_0+r),\tag{12.3.1}$$

即右端的幂级数在区间 (x_0-r,x_0+r) 上收敛, 且和函数在此区间上等于 f, 则称函数 f 可以在 (x_0-r,x_0+r) 上**展开成幂级数**. 如果不关心 r 的大小, 也称 f 可以在点 x_0 展开成幂级数.

本节要讨论的问题是: (1) 当函数 f 满足什么条件时, 它可以在给定的点展开成幂级数? (2) 当 f 能够展开成幂级数时, 怎么求这个幂级数?

相对于第一个问题, 第二个问题很容易回答. 事实上, 当 f 在 (x_0-r,x_0+r) 上展开成幂级数 (12.3.1) 时, 说明式 (12.3.1) 右端的幂级数的收敛半径 $\geqslant r$, 而 f 就是式 (12.3.1) 右端幂级数的和函数在区间 (x_0-r,x_0+r) 中的部分. 因此, 根据定理 12.2.5 知, f 在 (x_0-r,x_0+r) 上无穷可微, 且可通过对式 (12.3.1) 右端的幂级数逐项求各阶导数来求 f 的相应阶导数. 于是对式 (12.3.1) 右端的幂级数求 m 阶导数, $m=0,1,2,\cdots$, 便得到

$$f^{(m)}(x)=\sum_{n=m}^{\infty}n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)a_n(x-x_0)^{n-m},\qquad \forall x\in(x_0-r,x_0+r).$$

令 $x=x_0$, 则上式右端除 $n=m$ 的项之外, 其余各项全为零, 因此得到 $f^{(m)}(x_0)=m!a_m$, $m=0,1,2,\cdots$, 从而

$$a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0),\qquad n=0,1,2,\cdots.$$

这样就证明了以下定理.

定理 12.3.1 (幂级数的唯一性) 如果函数 f 可以在点 x_0 展开成幂级数, 则它必在该点的一个邻域中无穷可微, 而且所展开成的幂级数的系数为

$$a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0),\qquad n=0,1,2,\cdots.$$

对于一个给定的、在点 x_0 附近无穷可微的函数 f, 称幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n\tag{12.3.2}$$

为 f 在点 x_0 的**泰勒级数**. 定理 12.3.1 说明, 如果函数 f 可以在点 x_0 展开成幂级数, 则这个幂级数不是别的, 它恰好就是函数 f 在点 x_0 的泰勒级数.

注意只要函数 f 在点 x_0 附近无穷可微, 就可按式 (12.3.2) 写出它在该点的泰勒级数. 但是, 这个级数可能在除了点 x_0 之外的其他任何点都不收敛; 而且即使收敛, 其和函数也不一定等于函数 f. 来看两个例子.

例 1 考虑函数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-n}\cos(n^2x),\qquad \forall x\in\mathbf{R}.$$

根据 M 判别法, 易见等式右端的级数及其各阶导数都在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛, 因此 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上无穷可微. 由于 $f(x)$ 是偶函数, 所以它在点 $x=0$ 的所有奇数阶导数都等于零, 即 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的泰勒级数只含 x 的偶数阶项. 其次, 容易看出,

$$f^{(2k)}(0)=(-1)^k\sum_{n=0}^{\infty}n^{4k}\mathrm{e}^{-n},\qquad k=0,1,2,\cdots.$$

所以 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的泰勒级数为

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!}x^{2k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}n^{4k}\mathrm{e}^{-n}\Big)x^{2k}.$$

这个幂级数的 $2k$ 阶项的绝对值为

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2k)!}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}n^{4k}\mathrm{e}^{-n}\Big)x^{2k}&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n^2x)^{2k}}{(2k)!}\mathrm{e}^{-n}\geqslant\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n^2x)^{2k}}{(2k)^{2k}}\mathrm{e}^{-n}\\&>\frac{(k^2x)^{2k}}{(2k)^{2k}}\mathrm{e}^{-k}=\Big(\frac{k^2x^2}{4\mathrm{e}}\Big)^k\geqslant 1,\qquad \text{当 } k\geqslant\frac{2\sqrt{\mathrm{e}}}{|x|},\ x\neq 0.\end{aligned}$$

这说明通项在所有 $x\neq 0$ 的点都不趋于零, 所以它在所有 $x\neq 0$ 的点都发散.

例 2 考虑函数

$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{当 } x\neq 0,\\ 0, & \text{当 } x=0.\end{cases}$$

这个函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上无穷可微, 但它在点 $x=0$ 的泰勒级数并不在任何区间 $(-r,r)$ $(r>0)$ 上收敛于 $f(x)$.

证明 根据 5.2 节例 7 知这个函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上无穷可微, 且

$$f^{(n)}(0)=0,\qquad n=0,1,2,\cdots.$$

因此, 函数 f 在点 $x=0$ 的泰勒级数恒为零, 从而在任何区间 $(-r,r)$ $(r>0)$ 上, 除 $x=0$ 之外, 都不收敛于 $f(x)$. 这说明: 尽管 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上无穷可微, 但它在点 $x=0$ 不能展开成幂级数.

以上两个例子告诉我们, 函数在一点附近无穷可微只是它在该点可以展开成幂级数的必要条件, 而不是充分条件. 一个函数为了能够在一点展开成幂级数, 除了必须在该点附近无穷可微之外, 还必须满足一些其他条件.

定理 12.3.2 设函数 f 在区间 (x_0-r,x_0+r) $(0<r<\infty)$ 上无穷可微, 且存在常数 $M>0$ 使成立

$$|f^{(n)}(x)|\leqslant Mn!r^{-n},\qquad \forall x\in(x_0-r,x_0+r),\qquad n=0,1,2,\cdots. \tag{12.3.3}$$

则 f 在 x_0 点的泰勒级数在 (x_0-r,x_0+r) 上逐点收敛于 $f(x)$, 即成立

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n,\qquad \forall x\in(x_0-r,x_0+r). \tag{12.3.4}$$

而且对任意 $0<s<r$, f 在点 x_0 的泰勒级数在 $[x_0-s,x_0+s]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

证明 因为 f 在 (x_0-r,x_0+r) $(0<r<\infty)$ 上无穷可微, 所以根据泰勒公式 (定理 5.6.1) 知, 对任意 $x\in(x_0-r,x_0+r)$ 和任意正整数 m, 存在相应的位于 x_0 和 x 之间的点 $\xi=\xi_{m,x}$ 使得

$$f(x)=\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\frac{1}{(m+1)!}f^{(m+1)}(\xi)(x-x_0)^{m+1}.$$

根据条件 (12.3.3), 由此推知

$$\begin{aligned}\left|f(x)-\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n\right|&\leqslant\frac{1}{(m+1)!}|f^{(m+1)}(\xi)||x-x_0|^{m+1}\\&\leqslant\frac{1}{(m+1)!}M(m+1)!r^{-(m+1)}|x-x_0|^{m+1}\\&=M\left(\frac{|x-x_0|}{r}\right)^{m+1},\qquad \forall x\in(x_0-r,x_0+r),\end{aligned}$$

从而对每个 $x\in(x_0-r,x_0+r)$ 都有 (因 $\dfrac{|x-x_0|}{r}<1$)

$$\lim_{m\to\infty}\left|f(x)-\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n\right|=0.$$

因此式 (12.3.4) 成立. 其次, 对任意 $0<s<r$ 都有

$$M\left(\frac{|x-x_0|}{r}\right)^{m+1}\leqslant M\left(\frac{s}{r}\right)^{m+1},\qquad \forall x\in[x_0-s,x_0+s],$$

所以应用 M 判别法知 f 在点 x_0 的泰勒级数在 $[x_0-s,x_0+s]$ 上一致收敛于 $f(x)$. 证毕.

推论 12.3.1 设函数 f 在区间 (x_0-r, x_0+r) $(0<r\leqslant+\infty)$ 上无穷可微, 且存在常数 $M>0$ 使成立

$$|f^{(n)}(x)|\leqslant M, \qquad \forall x\in(x_0-r,x_0+r), \qquad n=0,1,2,\cdots. \tag{12.3.5}$$

则 f 在点 x_0 的泰勒级数在 (x_0-r,x_0+r) 上逐点收敛于 $f(x)$, 而且对任意 $0<s<r$, 这个泰勒级数在 $[x_0-s,x_0+s]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

证明 不妨设 $r<\infty$, 因为否则对每个有限的 $r_1>0$, 在 (x_0-r_1,x_0+r_1) 上讨论即可. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r^n}{n!}=0$, 所以存在常数 $M_1>0$ 使得

$$\frac{r^n}{n!}\leqslant M_1, \qquad n=0,1,2,\cdots.$$

令 $M_2=M_1M$. 则有

$$M=\frac{M_2}{M_1}\leqslant M_2n!r^{-n}, \qquad n=0,1,2,\cdots.$$

从而条件 (12.3.5) 蕴涵着

$$|f^{(n)}(x)|\leqslant M_2n!r^{-n}, \qquad \forall x\in(x_0-r,x_0+r), \qquad n=0,1,2,\cdots.$$

于是应用定理 12.3.2 即知 f 在点 x_0 的泰勒级数在 (x_0-r,x_0+r) 上逐点收敛于 $f(x)$, 而且对任意 $0<s<r$, 泰勒级数在 $[x_0-s,x_0+s]$ 上一致收敛于 $f(x)$. 证毕.

推论 12.3.1 当然也可采用定理 12.3.2 的证明方法直接证明.

定理 12.3.2 说明, 如果函数 f 在点 x_0 附近无穷可微, 并且它在点 x_0 附近的 n 阶导数当 $n\to\infty$ 时不是非常快地趋于无穷大, 即或者不趋于无穷大 [如条件 (12.3.5)], 或者趋于无穷大的速度对某个 $a>0$ 不超过 $Mn!a^n$, 那么它就可以在点 x_0 展开成幂级数 (在后一种情况下可取 $r=a^{-1}$).

12.3.2 基本初等函数的幂级数展开

下面应用泰勒公式和以上定理与推论给出几个基本初等函数的幂级数展开.

例 3 指数函数的幂级数展开. 对于指数函数 e^x, 我们有

$$\mathrm{e}^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots, \tag{12.3.6}$$

这里 $-\infty<x<+\infty$, 而且对任意 $r>0$, 上面的幂级数在 $[-r,r]$ 上一致收敛于 e^x.

事实上, 由于

$$|(\mathrm{e}^x)^{(n)}|=|\mathrm{e}^x|\leqslant\mathrm{e}^r, \qquad \forall x\in[-r,r], \qquad n=0,1,2,\cdots,$$

所以根据推论 12.3.1 即得所需要的结论.

当然也可应用泰勒公式 (5.7 节例 1) 直接证明.

知道了 e^x 在 $x=0$ 处的幂级数展开, 由等式 $\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^{x_0}\mathrm{e}^{x-x_0}$ 便不难得到它在任意一点 x_0 处的幂级数展开.

例 4 正弦函数 $\sin x$ 和余弦函数 $\cos x$ 的幂级数展开. 对这两个函数, 有

$$\sin x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\cdots, \tag{12.3.7}$$

$$\cos x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+\cdots. \tag{12.3.8}$$

这里 $-\infty<x<+\infty$, 而且对任意 $r>0$, 上面的幂级数在 $[-r,r]$ 上一致收敛.

证明与关于指数函数 e^x 幂级数展开的证明类似, 所以从略.

知道了 $\sin x$ 和 $\cos x$ 在 $x=0$ 处的幂级数展开, 由等式

$$\sin x=\sin[x_0+(x-x_0)]=\sin x_0\cos(x-x_0)+\cos x_0\sin(x-x_0),$$
$$\cos x=\cos[x_0+(x-x_0)]=\cos x_0\cos(x-x_0)-\sin x_0\sin(x-x_0)$$

便不难得到它们在任意一点 x_0 处的幂级数展开.

例 5 对数函数 $\ln(1+x)$ 的幂级数展开. 对这个函数, 有

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots \tag{12.3.9}$$

对任意 $-1<x\leqslant 1$ 成立, 而且对任意 $0<\delta<1$, 在区间 $[-1+\delta,1]$ 上是一致收敛的.

事实上, 由于

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots,\qquad -1<x<1,$$

换 x 为 $-x$, 就得到

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^nx^n+\cdots,\qquad -1<x<1,$$

所以通过逐项积分, 并应用定理 12.2.6, 即得所需要的结论.

当然也可应用泰勒公式直接证明, 但是那样讨论起来要复杂一些.

特别在式 (12.3.9) 中取 $x=1$, 就得到下列等式

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots. \tag{12.3.10}$$

知道了 $\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的幂级数展开, 由等式

$$\ln x=\ln[x_0+(x-x_0)]=\ln x_0+\ln\left(1+\frac{x-x_0}{x_0}\right)$$

便不难得到对数函数 $\ln x$ 在任意一点 $x_0>0$ 处的幂级数展开.

例 6 设 α 是给定的非零实数. 则对 $-1<x<1$ 成立

$$
\begin{aligned}
(1+x)^{\alpha}&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n\\
&=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots. \qquad (12.3.11)
\end{aligned}
$$

等式 (12.3.11) 叫做**牛顿二项公式**, 它是由牛顿推导出来的. 右端的幂级数叫做**牛顿二项级数**.

式 (12.3.11) 的证明如下. 先来求式 (12.3.11) 右端幂级数的收敛半径 r. 由于

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|\alpha-n|}{n+1}=1,$$

所以这个幂级数的收敛半径 $r=\dfrac{1}{\rho}=1$. 用 $S_\alpha(x)$ 表示它的和函数

$$S_\alpha(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n,\qquad -1<x<1.$$

逐项求导得

$$S'_\alpha(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1}=\alpha S_{\alpha-1}(x),\qquad -1<x<1.$$

因此有

$$(1+x)S'_\alpha(x)=\alpha(1+x)S_{\alpha-1}(x),\qquad -1<x<1.$$

而

$$
\begin{aligned}
(1+x)S_{\alpha-1}(x)&=(1+x)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n)}{n!}x^n\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n)}{n!}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n)}{n!}x^{n+1}\\
&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n)}{n!}+\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}\Big]x^n\\
&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}\Big[\frac{\alpha-n}{n}+1\Big]x^n\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n=S_\alpha(x),\qquad -1<x<1
\end{aligned}
$$

因此

$$(1+x)S_\alpha'(x)=\alpha S_\alpha(x), \qquad \text{即} \qquad S_\alpha'(x)-\frac{\alpha}{1+x}S_\alpha(x)=0, \qquad -1<x<1.$$

应用定理 8.1.1, 由此得到

$$S_\alpha(x)=Ce^{\int_0^x \frac{\alpha}{1+t}\mathrm{d}t}=Ce^{\alpha\ln(1+x)}=C(1+x)^\alpha, \qquad -1<x<1.$$

易见 $S_\alpha(0)=1$, 代入上式求得 $C=1$. 所以最终得到

$$S_\alpha(x)=(1+x)^\alpha, \qquad -1<x<1.$$

这就证明了式 (12.3.11).

以上结果当然也可通过应用泰勒公式来证明. 注意到没有讨论式 (12.3.11) 在端点 $x=\pm1$ 处是否成立. 在端点 $x=\pm1$ 的情况是比较复杂的, 依赖于 α 的具体取值. 这里就不详细讨论了, 请读者自己给出讨论.

应用式 (12.3.11), 不难求出幂函数 x^α 在任意一点 $x_0\neq0$ 处的幂级数展开. 注意在 $x=0$ 点, 除非 α 是正整数, x^α 都不是无穷可微的, 从而在点 $x=0$ 不能把它展开成幂级数.

例 3 至例 6 中各个函数幂级数部分和序列的图形见 5.6 节图 5-6-1 至图 5-6-6.

例 7 反三角函数 $\arcsin x$ 和 $\arctan x$ 的幂级数展开 (见图 12-3-1 与图 12-3-2).

在 $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}=(1+x)^{-\frac12}$ 的幂级数展开式中换 x 为 $-x^2$, 就得到

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac12x^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^4+\cdots+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)}x^{2n}+\cdots, \qquad -1<x<1.$$

逐项积分并应用定理 12.2.6 得

$$\arcsin x=x+\frac12\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots, \quad -1\leqslant x\leqslant1. \tag{12.3.12}$$

上式右端的级数在 $x=1$ 处的收敛性可用高斯判别法证明 (10.2 节习题 4), 而在 $x=-1$ 处的收敛性是莱布尼茨判别法的直接推论. 其次, 在 $\dfrac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}$ 的幂级数展开式中换 x 为 x^2, 就得到

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^nx^{2n}+\cdots, \qquad -1<x<1.$$

逐项积分, 并应用定理 12.2.6, 得

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots, \qquad -1<x\leqslant1. \tag{12.3.13}$$

特别在式 (12.3.13) 中取 $x=1$, 就得到下列等式:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}+\cdots. \tag{12.3.14}$$

等式 (12.3.10) 和等式 (12.3.14) 都曾是历史上著名的无穷级数和式. 这些和式, 特别是后一个, 把如 π 这样的超越数 (不是任何有理系数的多项式的根的数) 与由 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\cdots$ 这些所有奇数的倒数构成的交错级数联系起来, 是很有趣的.

这里提请读者注意这样的一个事实: 尽管 $\arctan x$ 在整个数轴 $(-\infty,+\infty)$ 上无穷可微, 但它在 $x=0$ 点的泰勒级数却只在区间 $(-1,1]$ 上收敛, 在此区间外发散. 其中的原因, 只有学习了复变函数课程才能知晓.

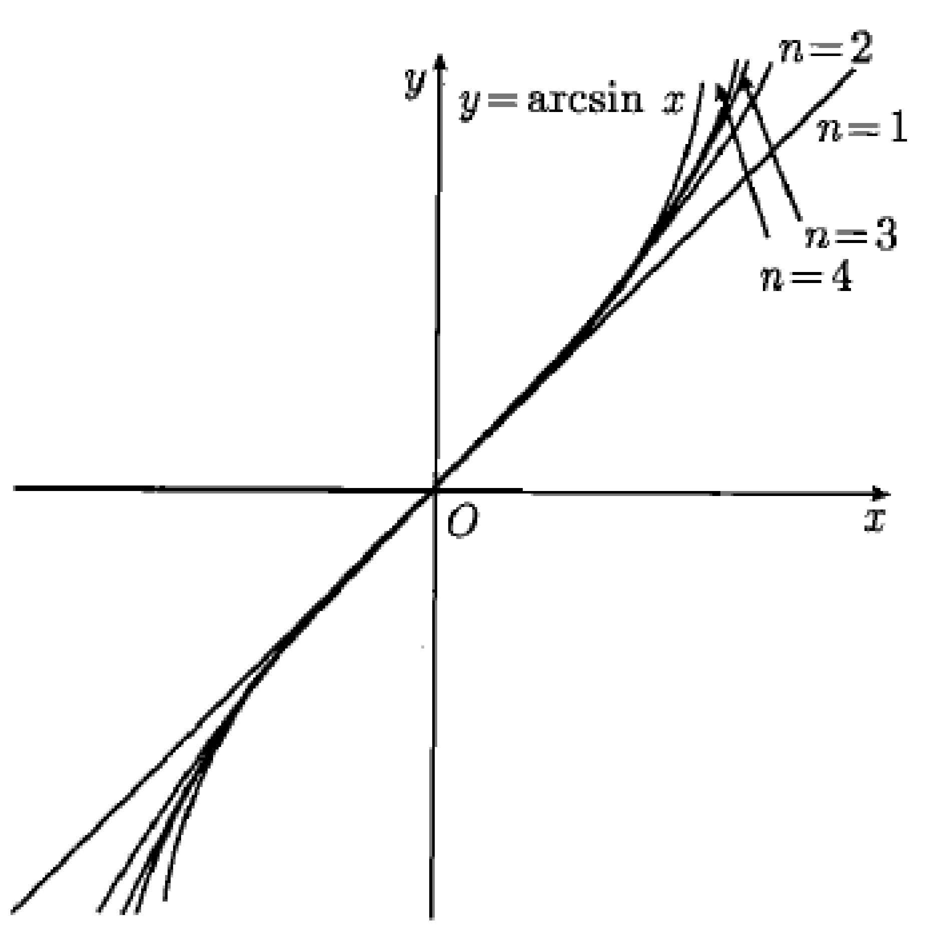


图 12-3-1 反正弦函数幂级数的部分和序列

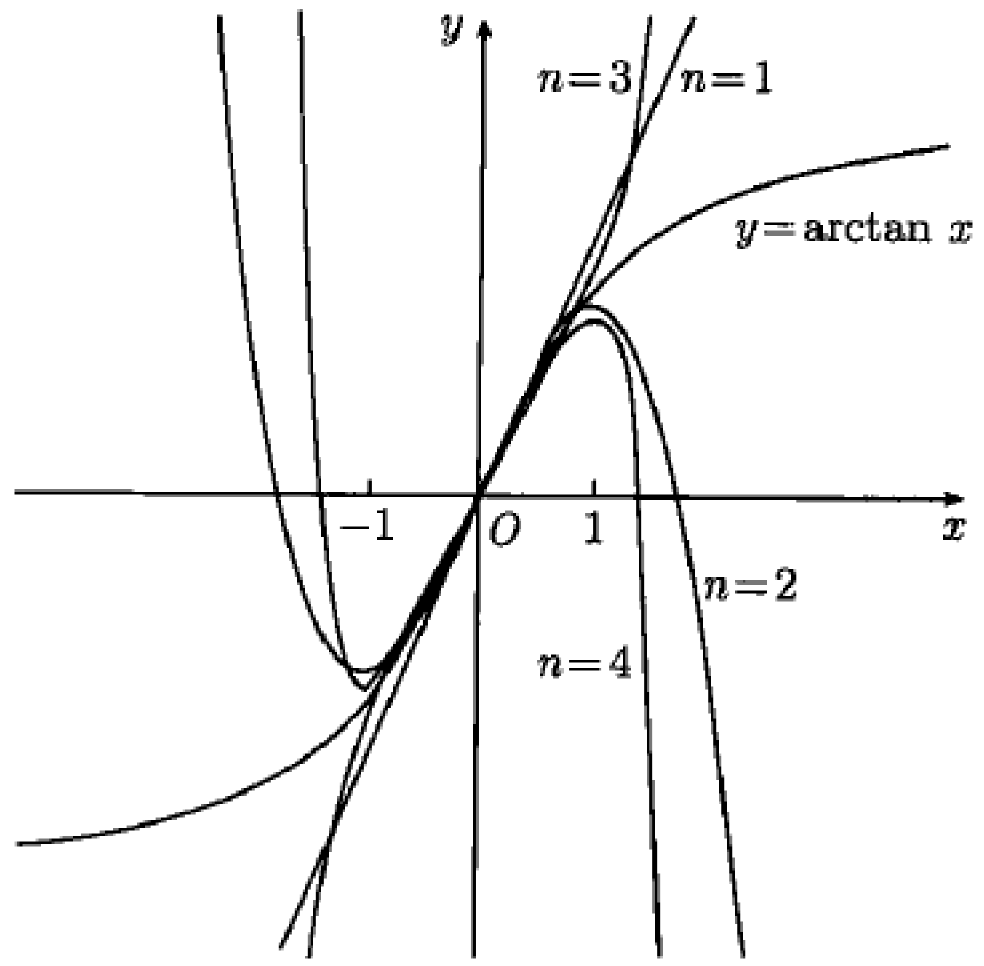


图 12-3-2 反正切函数幂级数的部分和序列

12.3.3 解析函数

定理 12.3.2 给出了无穷可微函数 f 在一点 x_0 可以展开成幂级数的一个充分条件. 这个条件实际上也是必要的. 为了证明这个结论, 需要以下引理.

引理 12.3.1 对任意正整数 m 和任意 $x\in(-1,1)$ 成立

$$\sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)x^{n-m}=\frac{m!}{(1-x)^{m+1}}.$$

证明 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ 的收敛半径为 1, 和函数为 $\frac{1}{1-x}$, 即成立

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n=\frac{1}{1-x}, \qquad -1<x<1.$$

逐项求 m 阶导数, 就得到了所需要的结果. 证毕.

定理 12.3.3 设函数 f 在开区间 I 上无穷可微, $x_0 \in I$. 则下面两个条件等价:

(1) f 可以在点 x_0 展开成幂级数;

(2) 存在常数 $\delta > 0$, $a > 0$ 和 $C > 0$ 使成立

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant Cn!a^n, \qquad \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta), \qquad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

证明 根据定理 12.3.2 可知, 从条件 (2) 可以推出条件 (1)(取 $r = \min\{a^{-1}, \delta\}$). 所以只需要再证明: 从条件 (1) 也可以推出条件 (2).

设 f 可以在点 x_0 展开成幂级数. 则存在常数 $\delta > 0$ 和数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 使得

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, \qquad \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta). \tag{12.3.15}$$

求 m 阶导数, 就得到

$$f^{(m)}(x) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)(x-x_0)^{n-m}, \qquad \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta).$$

由此推出

$$|f^{(m)}(x)| \leqslant \sum_{n=m}^{\infty} |a_n| n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)|x-x_0|^{n-m}, \qquad \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta). \tag{12.3.16}$$

在式 (12.3.15) 中取 $x = x_0 + \dfrac{\delta}{2}$, 可知级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{\delta}{2}\right)^n$ 收敛, 从而其通项趋于零, 因此存在常数 $M > 0$ 使得

$$|a_n|\left(\frac{\delta}{2}\right)^n \leqslant M, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

由此推出

$$|a_n| \leqslant M\left(\frac{2}{\delta}\right)^n, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

把这个估计式代入式 (12.3.16), 再应用引理 12.3.1, 就得到

$$\begin{aligned}|f^{(m)}(x)| &\leqslant M\left(\frac{2}{\delta}\right)^m \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)\left(\frac{2|x-x_0|}{\delta}\right)^{n-m} \\ &= M\left(\frac{2}{\delta}\right)^m m!\left(1-\frac{2|x-x_0|}{\delta}\right)^{-(m+1)}, \qquad \forall x \in \left(x_0-\frac{\delta}{2}, x_0+\frac{\delta}{2}\right).\end{aligned}$$

特别地, 把 x 限定在区间 $\left(x_0-\dfrac{\delta}{4}, x_0+\dfrac{\delta}{4}\right)$ 上, 就得到

$$|f^{(m)}(x)| \leqslant M\left(\frac{2}{\delta}\right)^m m!2^{m+1} = 2Mm!\left(\frac{4}{\delta}\right)^m, \qquad \forall x \in \left(x_0-\frac{\delta}{4}, x_0+\frac{\delta}{4}\right).$$

令 $a=\dfrac{4}{\delta}$, $C=2M$, 就得到了所需要的结果. 证毕.

应用斯特林公式 (定理 8.1.5)

$$n!=\sqrt{n}n^n\mathrm{e}^{-n+\nu_n},\qquad n=1,2,\cdots$$

$\left(\dfrac{7}{8}<\nu_n<1\right)$ 和对任意正数 λ 都成立的不等式

$$\sqrt{x}\leqslant\frac{\mathrm{e}^{\lambda x}}{\sqrt{2\mathrm{e}\lambda}},\qquad \forall x>0,$$

易见定理 12.3.3 中的条件 (2) 等价于以下条件:

(2)′ 存在常数 $\delta>0$, $a>0$ 和 $C>0$ 使成立

$$|f^{(n)}(x)|\leqslant C(na)^n,\qquad \forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta),\qquad n=0,1,2,\cdots.$$

如果一个函数 f 可以在点 x_0 展开成幂级数, 则称这个函数在点 x_0 **解析**. 如果函数 f 在开区间 I 上每一点都解析, 则称 f 在区间 I 上解析, 或称 f 是区间 I 上的**解析函数**. 应用定理 12.3.3 和有限覆盖定理, 可以证明以下定理:

定理 12.3.4 设函数 f 在开区间 I 上无穷可微. 则下面三个条件互相等价:

(1) f 在区间 I 上解析;

(2) 对任意有界闭区间 $[b,c]\subseteq I$, 存在相应的常数 $\delta>0$, $a>0$ 和 $C>0$ 使成立

$$|f^{(n)}(x)|\leqslant Cn!a^n,\qquad \forall x\in[b,c],\qquad n=0,1,2,\cdots;\tag{12.3.17}$$

(3) 对任意有界闭区间 $[b,c]\subseteq I$, 存在相应的常数 $\delta>0$, $a>0$ 和 $C>0$ 使成立

$$|f^{(n)}(x)|\leqslant C(na)^n,\qquad \forall x\in[b,c],\qquad n=0,1,2,\cdots.\tag{12.3.18}$$

证明 根据斯特林公式易知条件 (2) 和条件 (3) 是互相等价的. 另外, 由于 I 是开区间, 所以对任意 $x_0\in I$, 必存在相应的 $\delta>0$ 使 $[x_0-\delta,x_0+\delta]\subseteq I$, 因此当条件 (2) 成立时, 应用定理 12.3.3 即知 f 在区间 I 中的每个点处都是解析的, 即从条件 (2) 可以推出条件 (1). 剩下只需再证明: 从条件 (1) 也可以推出条件 (2).

设 f 在区间 I 上解析. 则 f 在区间 I 中的每个点处都解析. 对任意一个有界闭区间 $[b,c]\subseteq I$, 由 f 在 $[b,c]$ 中的每个点处都解析可知, 对任意 $x_0\in[b,c]$, 存在相应的常数 $\delta_{x_0}>0$, $a_{x_0}>0$ 和 $C_{x_0}>0$ 使成立

$$|f^{(n)}(x)|\leqslant C_{x_0}n!a_{x_0}^n,\qquad \forall x\in(x_0-\delta_{x_0},x_0+\delta_{x_0}),\qquad n=0,1,2,\cdots.\tag{12.3.19}$$

开区间族 $\{(x_0-\delta_{x_0},x_0+\delta_{x_0}):x_0\in[b,c]\}$ 完全覆盖了区间 $[b,c]$, 因此根据有限覆盖定理, 存在这个区间中的有限个点 $x_1,x_2,\cdots,x_m$, 使得

$$[b,c]\subseteq(x_1-\delta_{x_1},x_1+\delta_{x_1})\bigcup(x_2-\delta_{x_2},x_2+\delta_{x_2})\bigcup\cdots\bigcup(x_m-\delta_{x_m},x_m+\delta_{x_m}).\quad(12.3.20)$$

令 $a=\max\{a_{x_1},a_{x_2},\cdots,a_{x_m}\}$, $C=\max\{C_{x_1},C_{x_2},\cdots,C_{x_m}\}$. 则从式 (12.3.19) 和式 (12.3.20) 易见式 (12.3.17) 成立. 证毕.

解析函数的一个重要性质由以下定理给出.

定理 12.3.5 设 f 和 g 是定义在开区间 I 上的两个解析函数. 假设存在 I 的一个子区间 $(\alpha,\beta)\subseteq I$, 使得这两个函数在这个子区间上相等: $f(x)=g(x)$, $\forall x\in(\alpha,\beta)$. 则这两个函数也在整个区间 I 上相等: $f(x)=g(x)$, $\forall x\in I$.

证明 令 $h=f-g$. 则 h 是区间 I 上的解析函数, 且在 I 的一个子区间 (α,β) 上等于零: $h(x)=0$, $\forall x\in(\alpha,\beta)$. 要证明: h 也在整个区间 I 上等于零: $h(x)=0$, $\forall x\in I$. 先来证明 h 在区间 (α,β) 的右侧恒为零. 如果 (α,β) 的右端点 β 也恰是区间 I 的右端点, 则无需继续讨论. 下设 β 不是 I 的右端点, 从而 $\beta\in I$. 由于 h 在区间 I 上解析, 自然也就在点 β 解析, 所以存在常数 $\delta>0$, 使 h 可在区间 $(\beta-\delta,\beta+\delta)$ 上展开成幂级数, 即有

$$h(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}h^{(n)}(\beta)(x-\beta)^n,\qquad\forall x\in(\beta-\delta,\beta+\delta).$$

由于 h 在 (α,β) 上恒等于零, 所以由 h 及其各阶导数在点 β 的连续性可知

$$h^{(n)}(\beta)=0,\qquad n=0,1,2,\cdots.$$

这样从上面的等式就推知

$$h(x)=0,\qquad\forall x\in(\beta-\delta,\beta+\delta).$$

因此, 从 β 不是 I 的右端点, 便推知 h 在一个更大的区间 $(\alpha,\beta+\delta)$ 上恒等于零. 现在令

$$\bar\beta=\sup\{\beta_1\in I:\ \beta_1>\beta,\ h\text{ 在 }(\alpha,\beta_1)\text{ 上恒等于零}\}.$$

显然 h 在 $(\alpha,\bar\beta)$ 上恒等于零. 可以断定 $\bar\beta$ 必是区间 I 的右端点, 因为否则就有 $\bar\beta\in I$, 从而换 β 为 $\bar\beta$ 重复前面的推理, 即知存在常数 $\delta>0$, 使 h 在一个更大的区间 $(\alpha,\bar\beta+\delta)$ 上恒等于零, 而这与 $\bar\beta$ 的定义相矛盾. 这样就证明了, h 在区间 (α,β) 的右侧恒为零. 同理可证明, h 也在区间 (α,β) 的左侧恒为零. 因此, h 在整个区间 I 上恒等于零. 证毕.

定理 12.3.6 (1) 设 f 和 g 是开区间 I 上的两个解析函数, 则它们的和、差 $f\pm g$ 与乘积 fg 都是 I 上的解析函数, 并且当 $g(x)\neq0$ $(\forall x\in I)$ 时, 它们的商 f/g 也是 I 上的解析函数;

(2) 设 f 是开区间 I 上的解析函数, 其值域含于开区间 J: $f(I)\subseteq J$. 又设 g 是区间 J 上的解析函数. 则它们的复合 $g\circ f$ 也是 I 上的解析函数.

这个定理可应用定理 12.3.3 证明, 留给读者自己完成. 从这个定理和前面的例 3~ 例 7 可知, 初等函数在其无穷可微的开区间上都是解析函数. 注意这个结论和例 1~ 例 2 不矛盾, 因为这两个例子中的函数在原点的任何邻域中都不是初等函数.

习 题 12.3

1. 运用例 3 ~ 例 7 给出的基本泰勒级数, 求下列函数在点 $x=0$ 的泰勒展开, 并说明它们的收敛范围:

(1) $\cos^2 x\sin 2x$; (2) $\sin^4 x$;

(3) $\dfrac{x^5}{1-x^2}$; (4) $\dfrac{x}{\sqrt{1-2x}}$;

(5) $\ln\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$; (6) $\dfrac{x}{1+x-2x^2}$;

(7) $\dfrac{1}{(1-x)^2}$; (8) $\dfrac{x}{(1-x)(1-x^2)}$;

(9) $\dfrac{x}{1+x+x^2}$; (10) $\ln(1+x+x^2+x^3+x^4)$.

2. 运用幂级数的乘法公式 $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{n}a_{n-k}b_k\right)x^n$ 和例 3 ~ 例 7 给出的基本泰勒级数, 求下列函数在点 $x=0$ 的泰勒展开, 并说明它们的收敛范围:

(1) $\dfrac{\ln(1-x)}{1-x}$; (2) e^{-x^2+x};

(3) $\arctan^2 x$; (4) $\ln^2(1-x)$.

3. 求下列函数在点 $x=0$ 的泰勒展开, 并说明它们的收敛范围:

(1) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$; (2) $f(x)=\arctan\dfrac{2x}{2-x^2}$;

(3) $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\arctan\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$; (4) $f(x)=\arcsin\dfrac{2x}{2+x^2}$.

4. 设 $0<\theta<\pi$. 证明: 对 $|x|<1$ 成立下列等式:

(1) $\dfrac{1-x\cos\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n\cos n\theta$; (2) $\dfrac{\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n\sin(n+1)\theta$.

并应用这些等式求下列函数在点 $x=0$ 的泰勒展开, 并说明它们的收敛范围:

(1) $f(x)=\ln(1-2x\cos\theta+x^2)$; (2) $f(x)=\dfrac{1}{a+bx+cx^2}$ $(4ac>b^2)$.

5. 把下列函数展开成幂级数并说明收敛范围:

(1) $\int_0^x e^{-t^2}dt$;　　(2) $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$;

(3) $\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$;　　(4) $\int_0^x \frac{\arctan t}{t}dt$.

6. 求下列函数在指定点的泰勒展开, 并说明它们的收敛范围:

(1) $f(x)=\cos^2 x$, 在点 $x=x_0$;

(2) $f(x)=\frac{1}{x-a}$, 在点 $x=x_0$, $x_0\neq a$;

(3) $f(x)=\frac{x^2}{x^2-4x+3}$, 在点 $x=2$;

(4) $f(x)=\ln(2-2x+x^2)$, 在点 $x=1$.

7. 求下列函数按指定方式的级数展开:

(1) $f(x)=\ln x$, 按分式 $\frac{x-1}{x+1}$ 的正整数次幂展开;

(2) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x}}$, 按分式 $\frac{x}{1+x}$ 的正整数次幂展开;

(3) $f(x)=\frac{1}{1-x}$, 按 x 的负整数次幂展开.

8. 用直接计算和采用幂级数展开两种不同的方法计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x dx}{e^{x^2}+1}$ 以证明等式: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln 2$.

9. 已知 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\theta d\theta=\frac{\pi}{2}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$. 求下列函数在点 $x=0$ 的泰勒展开, 并说明收敛范围:

(1) 第一型椭圆积分 $F(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-x^2\sin^2\theta}}$;

(2) 第二型椭圆积分 $E(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-x^2\sin^2\theta}d\theta$.

10. 求下列级数的和:

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n(2n-1)}$;

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4n+1)(4n+2)}$;　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}$;

(5) $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$;　　(6) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$;

(7) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$;　　　　(8) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

11. 应用双曲正弦 $\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ 和双曲余弦 $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ 的泰勒展开

$$\sinh x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\qquad \cosh x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!},\quad \forall x\in\mathbf{R}$$

证明下列不等式:

(1) $\cosh x\leqslant\cosh\frac{x^2}{2}+\sinh\frac{x^2}{2}$, $\forall x\in\mathbf{R}$;

(2) $x\sinh x\cosh x+x^2\geqslant 2\sinh^2 x$, $\forall x\in\mathbf{R}$;

(3) $x\sinh^3 x\geqslant x^4\cosh x$, $\forall x\in\mathbf{R}$;

(4) $(\sinh^2 x+x^2)\cosh x\geqslant x(x^2+2)\sinh x$, $\forall x\in\mathbf{R}$.

对于 (2)~(4), 建议先把不等式两端的差写成 $\sum_{n=0}^{m}[P_n(x)\sinh nx+Q_n(x)\cosh nx]$ 的形式, 其中 $P_n(x)$ 和 $Q_n(x)$ 为多项式, 然后再求它们的泰勒展开进行比较.

12. 证明: 幂级数的和函数在幂级数收敛域的内域 (收敛域去掉端点的开区间) 上是解析函数.

13. 设 f 和 g 是定义在开区间 I 上的两个解析函数. 证明以下两个条件中的任何一个都蕴涵着 f 和 g 在区间 I 上相等, 即 $f(x)=g(x)$, $\forall x\in I$:

(1) 存在一点 $x_0\in I$ 使得

$$f^{(n)}(x_0)=g^{(n)}(x_0),\qquad n=0,1,2,\cdots;$$

(2) 存在一列互不相同的点 $x_n\in I$, $n=1,2,\cdots$, 使得

$$f(x_n)=g(x_n),\qquad n=1,2,\cdots,$$

且 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 I 中有极限点.

第 13 章

傅里叶级数

函数级数中, 在理论上最重要、应用中最常见的, 除了幂级数之外, 还有**三角级数**, 即形如

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos ncx+b_n\sin ncx)$$

的函数级数, 其中 a_0, a_n, b_n $(n=1,2,\cdots)$ 和 c 都是常数 (这里把常数项写成 $\frac{1}{2}a_0$ 的形式是为了以后计算的方便). 实际上, 无论从数学理论还是从物理应用的角度来看, 这类级数都比幂级数更加重要.

三角级数最初出现于天文学以及物理学中的弦振动和热传导等问题的研究中. 行星绕太阳的运动以及行星的卫星绕行星的运动都是周期性的. 弦振动的情况也类似, 而最简单的周期函数是所谓的 "圆函数", 即正弦函数 $\sin ax$ 和余弦函数 $\cos ax$ (其中 a 是常数), 所以在天文学和弦振动问题的研究中, 人们想到借助于三角级数来表示函数是很自然的. 这些思想出现于 18 世纪中叶. 然而三角级数真正地引起人们高度重视的, 是法国数学家傅里叶 (Joseph Fourier, 1768~1830) 关于热传导问题的研究工作. 在最初写于 1807 年但当时并未能够正式发表, 而迟至 1824 年才得以发表的一篇论文中, 傅里叶应用物理学原理推导出了温度函数应当满足的一个偏微分方程, 即热传导方程, 然后采用现在称为分离变量法的方法, 求出了这个方程的解. 他的这篇论文最主要的思想, 除了分离变量法这一求解偏微分方程的方法之外, 还有一个很重要的方面是*把一个给定区间 $[a,b]$ 上的任意一个函数表示成三角级数*. 这里所说的 "任意", 是指一般、普遍的意思, 是相对于如三角多项式等一些特定类型的函数的特殊性而言的. 这里不需要函数是周期函数, 甚至它在区间 $[a,b]$ 之外有无定义都无需考虑. 傅里叶虽然没有能够严格地证明这一观点 (这是他的论文未能在 1807 年及其以后的一段时间得到发表的主要原因), 但他坚信这个观点是正确的, 并从多种途径说明这一观点的正确性. 傅里叶的工作, 不仅极大地促进了偏微分方程边值问题的研究, 而且促使人们更深入地研究涉及函数的诸多问题. 由于傅里叶的这一贡献, 人们便把用以表示

一个函数的三角级数叫做这个函数的**傅里叶级数**.

傅里叶级数以及与之紧密相关的**傅里叶变换**, 现在已经成为求解诸如弹性力学、流体力学、电动力学、量子力学、热学、光学等许多物理学领域的偏微分方程问题的最基本的工具. 而从傅里叶级数和傅里叶变换理论发展出来的一门数学分支 —— 傅里叶分析, 是现代数学的一个重要的分支领域, 它不仅在分析数学的研究中很重要, 而且在数论、几何乃至拓扑、代数等许多其他数学分支领域也有重要的应用. 因此, 希望读者对本章的内容引起足够的重视.

虽然傅里叶级数和幂级数一样都是把一般的函数表示成一些简单的函数的无穷和, 但傅里叶级数理论远比幂级数理论要复杂的多. 本章将要学习的只是傅里叶级数理论的最基础的部分. 关于傅里叶级数的比较全面的理论, 需要用到很多目前还没有掌握的知识, 只能留待读者以后在专门的课程 (如傅里叶分析) 去学习. 这里需要告诉读者的是, 由于傅里叶级数与幂级数有很大的不同, 所以本章对傅里叶级数的处理方法也与第 12 章对幂级数的处理方法有很大的不同. 对于幂级数, 我们采取的是先研究幂级数的收敛区域以及它的和函数的性质, 然后应用这样获得的信息, 反过来研究怎样的函数能够展开成幂级数, 以及如何把给定的函数展开成幂级数的问题. 对于傅里叶级数, 我们直接从函数出发, 研究如果它能够表示成一个三角级数, 那么这个三角级数应具有什么形式以及在什么条件下, 这个三角级数收敛到这个函数.

13.1　函数的傅里叶级数

前面已经说明了本章的主要目的是研究当一个函数 f 满足什么条件时, 它可以表示成三角级数, 即形如

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos ncx+b_n\sin ncx) \tag{13.1.1}$$

的函数级数, 其中 a_0, a_n, b_n $(n=1,2,\cdots)$ 和 c 都是常数.

显然, 级数 (13.1.1) 中的每一项都是以 $\frac{2\pi}{c}$ 为周期的周期函数. 所以, 当一个函数 f 可以表示成形如式 (13.1.1) 的三角级数时, f 也必是以 $\frac{2\pi}{c}$ 为周期的周期函数. 不过, 关于函数周期性的这个限制不是本质性的. 这是因为, 如果关于周期函数表示成三角级数的问题已经讨论清楚了, 那么对定义在任意一个有限区间 $[a,b]$ 上的函数 f, 可以把它作以 $b-a$ 为周期的周期延拓, 得到一个在整个数轴上有定义的周期函数 f^*, 把这个周期函数 f^* 表示成三角级数, 然后再把所得结果限制在区间 $[a,b]$ 上, 就得到了原来那个只定义在区间 $[a,b]$ 上且不是周期函数的函数 f 的三角级数表示. 注意这时式 (13.1.1) 中的常数 $c=\frac{2\pi}{b-a}$. 当然也可以先把 f 延拓到一个更大的区间 $[a',b']\supseteq[a,b]$ 上, 然后再作周期延拓. 这时式 (13.1.1) 中的常数 $c=\frac{2\pi}{b'-a'}<\frac{2\pi}{b-a}$.

我们只需考虑 $c=1$ 的情形. 这是因为, 如果 $c=1$ 的情形讨论清楚了, 那么只要做自变元的变换 $x\to cx$, 就可从 $c=1$ 情形的结果推出 $c\neq 1$ 情形的结果. 因此, 以后只考虑 $c=1$ 的情形. 这时, 式 (13.1.1) 具有以下形式

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \tag{13.1.2}$$

由于这个级数中的每一项都是以 2π 为周期的周期函数, 所以应要求函数 f 也是以 2π 为周期的周期函数.

因此, 问题简化为

(1) 对于以 2π 为周期的周期函数 f, 当它满足什么条件时, 它可以展开成形如式 (13.1.2) 的三角级数, 即它是一个形如式 (13.1.2) 的三角级数的和函数?

(2) 当函数 f 可以展开成三角级数时, 系数 a_0, a_n, b_n $(n=1,2,\cdots)$ 如何计算? 在研究函数的幂级数展开问题时, 我们碰到过类似的两个问题, 即① 当函数 f 满足什么条件时, 它可以展开成幂级数? ② 当 f 可以展开成幂级数时, 幂级数的系数如何计算? 当时我们解决这些问题的方法是先研究问题②, 而假设展开式 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 成立并满足逐项求各阶导数所需要的条件, 通过逐项求导计算出系数的表达式 $a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)$, 然后再研究问题①, 把上述系数公式代入幂级数, 考虑在什么条件下, 所得到的幂级数收敛于函数 f, 从而得到函数 f 展开成幂级数所需要满足的条件. 这里我们也采用相同的思路来研究以上两个问题. 因此先来求系数 a_n 和 b_n 的表达式.

注意构成级数 (13.1.2) 的最基本的元素是下列一组函数

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \cdots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \cdots, \tag{13.1.3}$$

这组函数叫做**基本三角函数系**.

关于基本三角函数系, 除了它的周期性外, 最重要的是成立.

引理 13.1.1 基本三角函数系中任意两个不同函数的乘积, 在周期区间 $[-\pi,\pi]$ 上积分为零, 即

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x=0,\qquad \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x=0,\qquad n=1,2,\cdots, \tag{13.1.4}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\mathrm{d}x=0,\quad \int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\mathrm{d}x=0,\quad m,n=1,2,\cdots,\ m\neq n, \tag{13.1.5}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\sin nx\mathrm{d}x=0,\qquad m,n=1,2,\cdots. \tag{13.1.6}$$

此外还有

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\mathrm{d}x=\pi,\qquad \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\mathrm{d}x=\pi,\qquad n=1,2,\cdots. \tag{13.1.7}$$

证明 事实上, 对任意正整数 m 和 n, 当 $m\neq n$ 时, 有

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(m-n)x+\cos(m+n)x]\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\Big[\frac{\sin(m-n)x}{m-n}+\frac{\sin(m+n)x}{m+n}\Big]\Big|_{-\pi}^{\pi}=0,\end{aligned}$$

而当 $m=n$ 时, 有

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[1+\cos 2nx]\mathrm{d}x=\pi+\frac{\sin 2nx}{4n}\Big|_{-\pi}^{\pi}=\pi.$$

其他几个等式的证明类似, 留给读者完成.

关系式 (13.1.4)~ 式 (13.1.6) 叫做基本三角函数系 (13.1.3) 的**正交性**. 这个术语来源于线性代数中的内积空间理论. 关于为什么使用这样的术语, 读者以后学习了泛函分析课程就明白了. 这里不多做解释.

现在来考虑问题 (2). 设 f 是以 2π 为周期的周期函数 (以下简称 2π 周期函数), 并且可以表示成形如式 (13.1.2) 的三角级数, 即

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),\qquad -\infty<x<+\infty.\tag{13.1.8}$$

为使计算能够顺利进行, 假设这个级数在区间 $[-\pi,\pi]$ 上一致收敛于 f. 这时, 由于级数的每一项都是连续函数, 所以 f 也是区间 $[-\pi,\pi]$ 上的连续函数. 对式 (13.1.8) 两端都在 $[-\pi,\pi]$ 上积分, 由于一致收敛的级数可以逐项积分, 应用式 (13.1.4) 就得到

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\pi a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x\right)=\pi a_0,$$

从而

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x.\tag{13.1.9}$$

在式 (13.1.8) 两端同乘以 $\cos mx$, 然后把两端都在 $[-\pi,\pi]$ 上积分, 应用式 (13.1.5) 和式 (13.1.6) 就得到

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mx\mathrm{d}x=&\frac{1}{2}a_0\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\mathrm{d}x\\&+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\mathrm{d}x+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\sin nx\mathrm{d}x\right)=\pi a_m,\end{aligned}$$

从而

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mx\mathrm{d}x,\qquad m=1,2,\cdots.\tag{13.1.10}$$

同理, 在式 (13.1.8) 两端同乘以 $\sin mx$, 然后把两端都在 $[-\pi,\pi]$ 上积分, 并应用式 (13.1.5) 和式 (13.1.6) 计算, 就得到

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\mathrm{d}x, \qquad m = 1, 2, \cdots. \tag{13.1.11}$$

这样, 在式 (13.1.8) 右端的级数在区间 $[-\pi,\pi]$ 上一致收敛于 f 的假设下, 求出了这个级数的系数用函数 f 来计算的表达式 (13.1.9)~ 表达式 (13.1.11).

从 11.4 节的讨论 (定理 11.4.10) 知, 为了使得逐项积分可以进行, 级数一致收敛的条件并非是必须的, 只要式 (13.1.8) 右端的级数在区间 $[-\pi,\pi]$ 上积分平均收敛于 f 就足够了 (这时对它乘以 $\cos mx$ 和 $\sin mx$ 所得级数积分也平均收敛于 f 乘以相应的函数). 这样就降低了对函数 f 的要求, 可只假定它在区间 $[-\pi,\pi]$ 上是绝对可积的. 事实上, 表达式 (13.1.9)~ 表达式 (13.1.11) 也只需要 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上绝对可积就有意义, 所以我们引进

定义 13.1.1 设 f 是 2π 周期函数, 并且在 $[-\pi,\pi]$ 上绝对可积, 则称由公式

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x, & n = 0, 1, 2, \cdots, \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x, & n = 1, 2, \cdots. \end{cases} \tag{13.1.12}$$

给出的实数 a_0, a_n, b_n $(n = 1, 2, \cdots)$ 为 f 的**傅里叶系数**, 称以这些数为系数的三角级数

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

为 f 的**傅里叶级数**, 记作

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx).$$

注意上式不写成等号是因为在定义的条件下, f 的傅里叶系数 a_n 和 b_n 虽然都有意义, 进而可以构造上式右边的三角级数, 但这个三角级数是否收敛于 f, 甚至它是否收敛, 都是未知的. 所以我们不能写等号. 但为了表示这个级数是由函数 f 确定的, 我们便用符号 "~" 把它们连接起来. 另外, 现在已经看到, 把三角级数中的常数项写成 $\frac{1}{2}a_0$ 而不简单地写为 a_0, 是为了使 a_0 和 $a_n(n \geqslant 1)$ 的计算公式有统一的表达式.

从前面的推导和定义 13.1.1 之前的说明可知, 成立下述定理.

定理 13.1.1 设 f 是 2π 周期函数, 并且在 $[-\pi,\pi]$ 上绝对可积. 如果 f 可以在积分平均收敛的意义下展开成三角级数, 即存在一个三角级数

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx),$$

它在 $[-\pi,\pi]$ 上积分平均收敛于 f, 则这个三角级数必是 f 的傅里叶级数, 即它的系数必满足式 (13.1.12).

我们来对作为函数的幂级数展开的泰勒级数和作为函数的三角级数展开的傅里叶级数进行比较. 为了求函数的泰勒级数, 它必须是无穷可微函数. 而为了求函数的傅里叶级数, 则只需要函数是绝对可积的即可. 傅里叶级数对函数光滑性 (又称正则性) 的这一很弱的要求, 使得它比泰勒级数用途要广泛得多. 但泰勒级数系数的计算只用到了函数在一个点处的值以及其各阶导数在该点的值, 因而函数只需在该点附近有定义就可以了. 而傅里叶级数系数的计算则需用到函数在整个区间上的值. 泰勒级数表面上只涉及函数的局部性质 (函数在一个点附近的性质), 然而它实际上与函数的整体性态有关. 因为从定理 12.3.5 我们知道, 两个解析函数如果在一个点附近相等, 则它们在定义域的共同部分内恒相等. 而 13.2 节将要证明, 改变一个函数在一个小区间上的值, 只改变它的傅里叶级数在这个小区间上的敛散性及其和函数, 对傅里叶级数在这个小区间之外的敛散性及其和函数没有丝毫影响.

13.2 节将研究问题 (1), 现在先给出计算函数的傅里叶级数的一些例子.

例 1　设 f 是 2π 周期函数, 并且在区间 $[-\pi,\pi]$ 上如下给定

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{当 } -\pi<x<\pi, \\ 0, & \text{当 } x=-\pi,\pi. \end{cases}$$

f 的图像如图 13-1-1 所示. 求 f 的傅里叶级数.

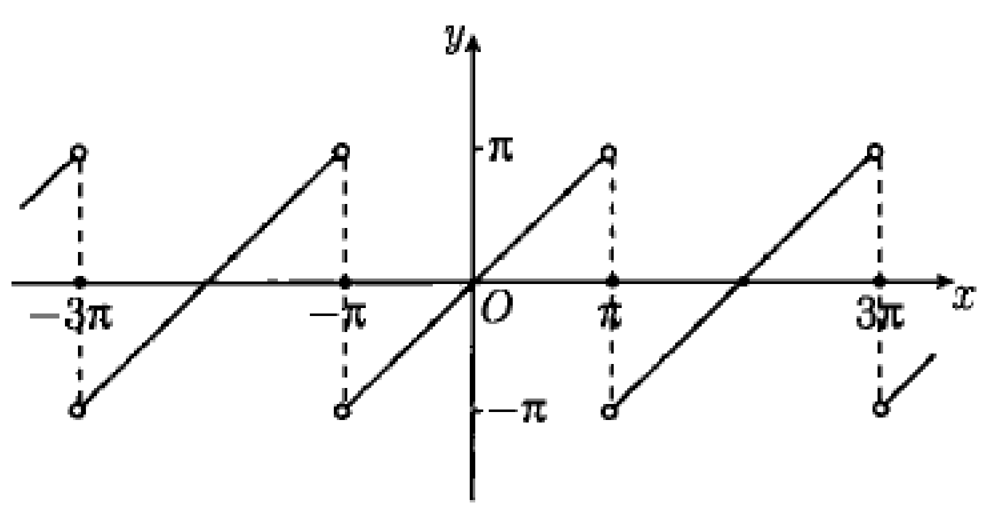


图 13-1-1

解　由于对每个非负整数 n, $x\cos nx$ 都是奇函数, 所以

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos nx\mathrm{d}x=0,\qquad n=0,1,2,\cdots.$$

对每个正整数 n 有

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{n\pi}\left[-x\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}+\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x\right]=(-1)^{n-1}\frac{2}{n}.$$

所以

$$f(x)\sim 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}.$$

在做下一个例题之前, 先证明一个引理.

引理 13.1.2 设 f 是 2π 周期函数, 则下列三个条件互相等价:

(1) f 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上广义黎曼可积;

(2) 对任意实数 a, f 在区间 $[a,a+2\pi]$ 上广义黎曼可积;

(3) f 在任意有限区间 $[a,b]$ 上广义黎曼可积.

当以上三个等价条件成立时, 对任意实数 a 成立下列等式

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{a+2\pi} f(x)\mathrm{d}x. \tag{13.1.13}$$

证明 显然条件 (3) 蕴涵着条件 (1) 和条件 (2). 我们先来证明条件 (1) 蕴涵着条件 (3). 为此对任意给定的有限区间 $[a,b]$, 取正整数 N 充分大, 使得 $[a,b]\subseteq[-(2N+1)\pi,(2N+1)\pi]$. 由 f 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上广义黎曼可积和它的 2π 周期性, 即知对每个整数 n, 它在区间 $[(2n-1)\pi,(2n+1)\pi]$ 上都广义黎曼可积, 因为

$$f(2n\pi+x)=f(x), \qquad \forall x\in[-\pi,\pi].$$

因此 f 在有限个这样的区间的并集上也广义黎曼可积. 而

$$[-(2N+1)\pi,(2N+1)\pi]=\bigcup_{n=-N}^{N}[(2n-1)\pi,(2n+1)\pi],$$

所以 f 在区间 $[-(2N+1)\pi,(2N+1)\pi]$ 上广义黎曼可积, 进而也就在其子区间 $[a,b]$ 上广义黎曼可积. 这就证明了条件 (1) 蕴涵着条件 (3). 类似地可证明条件 (2) 也蕴涵着条件 (3).

再来验证式 (13.1.12). 事实上,

$$\begin{aligned}\int_{a}^{a+2\pi} f(x)\mathrm{d}x &= \int_{a}^{-\pi} f(x)\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x+\int_{\pi}^{a+2\pi} f(x)\mathrm{d}x\\ &= \int_{a}^{-\pi} f(x)\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{a} f(t+2\pi)\mathrm{d}t\\ &= \int_{a}^{-\pi} f(x)\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{a} f(t)\mathrm{d}t\\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

证毕.

例 2 设 f 是 2π 周期函数, 并且在区间 $[0,2\pi]$ 上如下给定

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(\pi-x), & 当\ 0<x<2\pi,\\ 0, & 当\ x=0,2\pi.\end{cases}$$

f 的图像如图 13-1-2 所示. 求 f 的傅里叶级数.

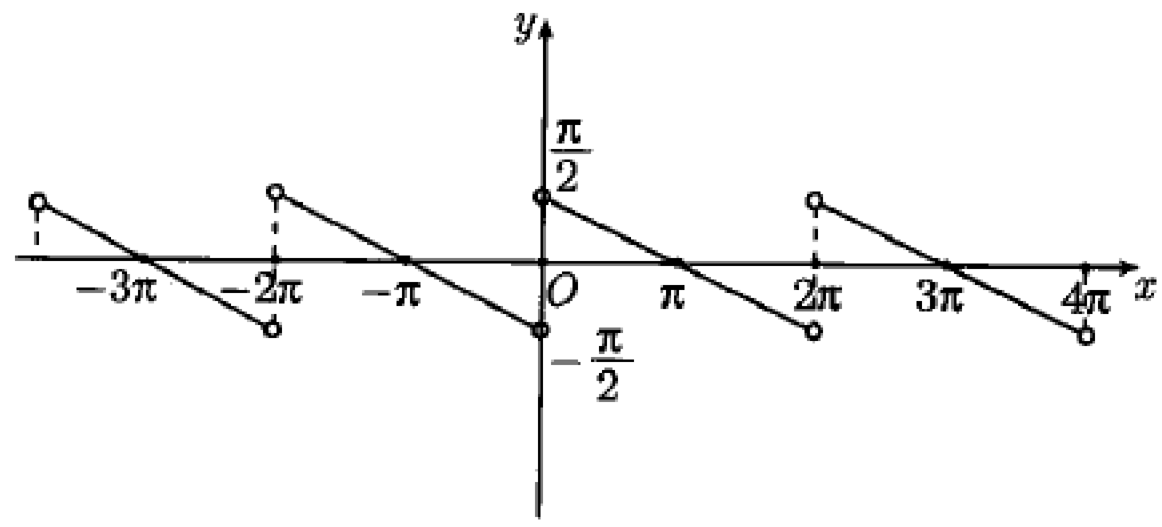


图 13-1-2

解　根据引理 13.1.2 有

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi - x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos nx\mathrm{d}x - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}x\cos nx\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2n\pi}x\sin nx\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi}\sin nx\mathrm{d}x = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_n &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi - x)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin nx\mathrm{d}x - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}x\sin nx\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2n\pi}x\cos nx\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi}\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{n}, \qquad n = 1, 2, \cdots,\end{aligned}$$

所以

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}.$$

例 3　设 f 是 2π 周期函数, 并且在区间 $[-\pi, \pi]$ 上如下给定

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{当 } -\pi < x < 0, \\ 0, & \text{当 } x = 0, \pm\pi, \\ 1, & \text{当 } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

f 的图像如图 13-1-3 所示. 求 f 的傅里叶级数.

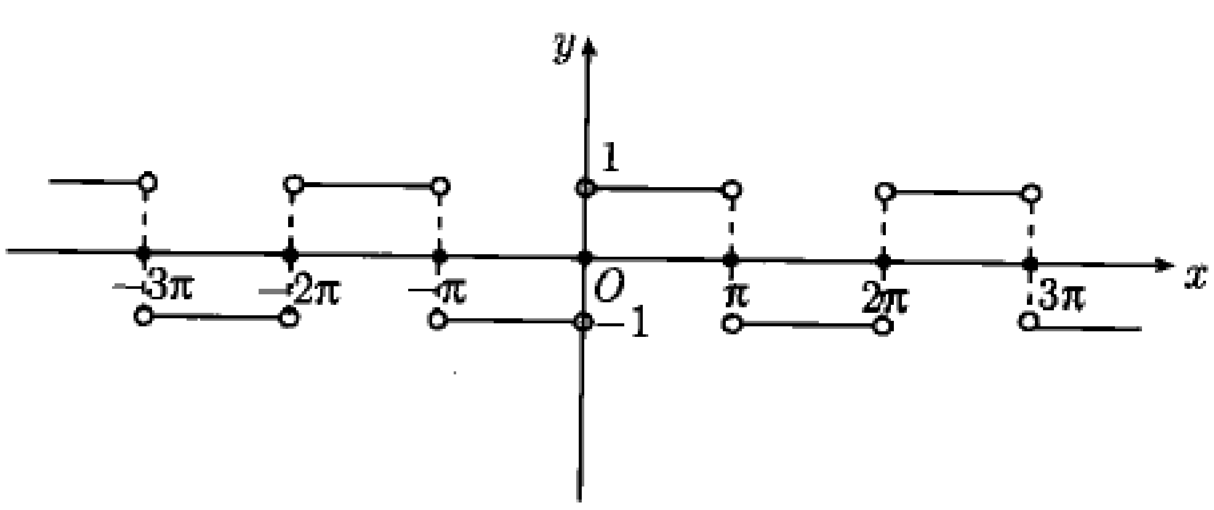


图 13-1-3

解 与例 1 类似, 由于 $f(x)$ 是奇函数, 所以

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

对每个正整数 n 有

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x = -\frac{2\cos nx}{n\pi}\Big|_0^{\pi} \\ &= \begin{cases} \dfrac{4}{n\pi}, & \text{当} n \text{是奇数}, \\ 0, & \text{当} n \text{是偶数}. \end{cases} \end{aligned}$$

所以

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}.$$

例 4 设 f 是 2π 周期函数, 并且在区间 $[-\pi, \pi]$ 上 $f(x) = |x|$. f 的图像如图 13-1-4 所示. 求 f 的傅里叶级数.

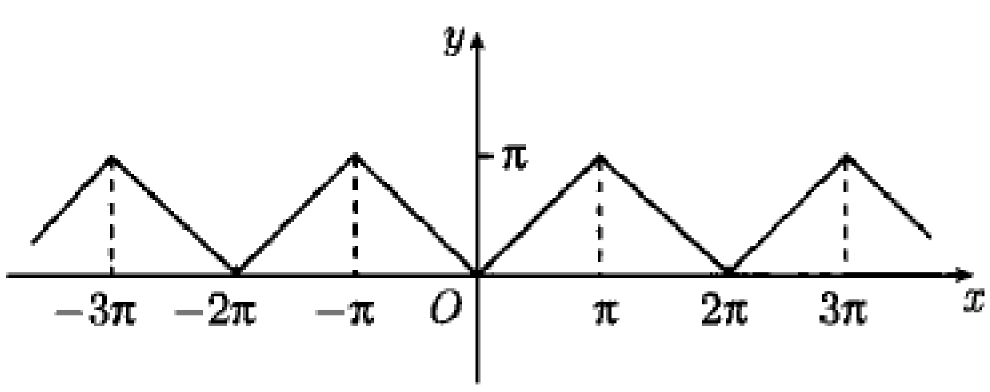


图 13-1-4

解 由于 $f(x)$ 是偶函数, 所以

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = 0,$$

$n = 1, 2, \cdots$.

另外

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\mathrm{d}x = \pi,$$

而对每个正整数 n 有

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos nx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\mathrm{d}x \\ &= -\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x = \frac{2\cos nx}{n^2\pi}\Big|_0^{\pi} \\ &= \begin{cases} -\dfrac{4}{n^2\pi}, & \text{当} n \text{是奇数}, \\ 0, & \text{当} n \text{是偶数}. \end{cases} \end{aligned}$$

所以

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.$$

习　题　13.1

1. 求下列 2π 周期函数的傅里叶级数:

(1) $f(x) = \operatorname{sgn}\sin 2x$;　　(2) $f(x) = \operatorname{sgn}\cos x$;

(3) $f(x) = \left|\sin\dfrac{x}{2}\right|$;　　(4) $f(x) = |\cos 2x|$;

(5) $f(x) = |\pi - x|$ （当 $|x| \leqslant \pi$);　　(6) $f(x)=\pi^2-x^2$ （当$|x|\leqslant\pi$);

(7) $f(x) = \begin{cases} 0, & 当\ -\pi \leqslant x < 0, \\ x, & 当\ 0 \leqslant x < \pi; \end{cases}$

(8) $f(x) = \begin{cases} \left|x + \dfrac{\pi}{2}\right| - \dfrac{\pi}{2}, & 当\ -\pi \leqslant x < 0, \\ \dfrac{\pi}{2} - \left|x - \dfrac{\pi}{2}\right|, & 当\ 0 \leqslant x < \pi; \end{cases}$

(9) $f(x) = \ln\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|$;　　(10) $f(x) = \ln\left|\cos\dfrac{x}{2}\right|$;

(11) $f(x) = \ln\left|\tan\dfrac{x}{2}\right|$;　　(12) $f(x) = \ln\left|\cot\dfrac{x}{2}\right|$.

2. 设 $f(x)$ 是 2π 周期函数, 在 $[-\pi,\pi]$ 上绝对可积, 它的傅里叶级数为

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx).$$

证明: $f(x)\sin x$ 和 $f(x)\cos x$ 的傅里叶级数分别为

$$f(x)\sin x \sim \frac{1}{2}b_1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b_{n+1}-b_{n-1}}{2}\cos nx + \frac{a_{n-1}-a_{n+1}}{2}\sin nx\right),$$

$$f(x)\cos x \sim \frac{1}{2}a_1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}\cos nx + \frac{b_{n-1}+b_{n+1}}{2}\sin nx\right),$$

其中 $b_0 = 1$. 根据这种思想的推广求以下函数的傅里叶级数:

(1) $f(x) = x\sin x$;　　(2) $f(x) = |x|\cos x$;

(3) $f(x) = |\sin x|$;　　(4) $f(x) = x\cos^2 x$.

3. 证明:

$$\sin^n x = \begin{cases} \dfrac{1}{4^m}\dbinom{2m}{m} + \dfrac{2}{4^m}\displaystyle\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\dbinom{2m}{m-k}\cos 2kx, & 当\ n = 2m, \\ \dfrac{1}{4^m}\displaystyle\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\dbinom{2m+1}{m-k}\sin(2k+1)x, & 当\ n = 2m+1, \end{cases}$$

$$\cos^n x = \begin{cases} \dfrac{1}{4^m}\dbinom{2m}{m} + \dfrac{2}{4^m}\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\dbinom{2m}{m-k}\cos 2kx, & \text{当 } n = 2m, \\ \dfrac{1}{4^m}\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\dbinom{2m+1}{m-k}\sin(2k+1)x, & \text{当 } n = 2m+1. \end{cases}$$

应用这些公式求下列函数的傅里叶级数:

(1) $f(x) = \sin^{2m+1} x \cos^{2m} x$; (2) $f(x) = \sin^{2m} x \cos^{2m+3} x$;

(3) $f(x) = \mathrm{e}^{\sin x}$; (4) $f(x) = \ln(1 + \cos x)$;

(5) $f(x) = (1 + \cos x)^{\mu}$; (6) $f(x) = \sinh(\sin x + \cos x)$.

4. 设 $|a| < 1$, 求下列函数的傅里叶级数:

(1) $f(x) = \dfrac{a\sin x}{1 - 2a\cos x + a^2}$; (2) $f(x) = \dfrac{1 - a^2}{1 - 2a\cos x + a^2}$;

(3) $f(x) = \dfrac{1 - a\cos x}{1 - 2a\cos x + a^2}$; (4) $f(x) = \ln(1 - 2a\cos x + a^2)$.

5. 设 $f(x)$ 是 2π 周期函数, 在 $[-\pi, \pi]$ 上绝对可积. 证明:

(1) 如果 $f(x+\pi) = f(x)$, 则 $a_{2n-1} = b_{2n-1} = 0$, $n = 1, 2, \cdots$;

(2) 如果 $f(x+\pi) = -f(x)$, 则 $a_{2n} = b_{2n} = 0$, $n = 0, 1, 2, \cdots$;

(3) 如果 $y = f(x)$ 的图像以点 $(0,0)$, $\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$ 和 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$ 为对称中心, 则 $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \cdots$, 且 $b_{2n-1} = 0$, $n = 1, 2, \cdots$;

(4) 如果 $y = f(x)$ 的图像以点 $(0,0)$ 为对称中心, 并以 $x = \dfrac{\pi}{2}$ 和 $x = -\dfrac{\pi}{2}$ 为对称轴, 则 $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \cdots$, 且 $b_{2n} = 0$, $n = 1, 2, \cdots$;

(5) 如果 $f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 上单调递减且有界, 则 $b_n \geqslant 0$, $n = 1, 2, \cdots$;

(6) 如果 $f'(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 上单调递增且有界, 则 $a_n \geqslant 0$, $n = 0, 1, 2, \cdots$.

6. 已知函数 $f(x)$ 的傅里叶系数为 a_0, a_n, b_n $(n = 1, 2, \cdots)$, 求下列函数的傅里叶系数:

(1) $g(x) = f(-x)$; (2) $\varphi(x) = \dfrac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$;

(3) $\psi(x) = \dfrac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$; (4) $h(x) = f(x + c)$.

7. 已知对定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上并在任意有界闭区间上都黎曼可积的函数 f, g 和 h 有

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x+t)g(t)\mathrm{d}t\right)h(x)\mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x+t)h(x)\mathrm{d}x\right)g(t)\mathrm{d}t,$$

其中 $[a,b]$ 和 $[c,d]$ 为任意有界闭区间. 由给定的条件求以下函数的傅里叶系数:

(1) $F(x) = \dfrac{1}{2h}\displaystyle\int_{x-h}^{x+h} f(t)\mathrm{d}t$, 其中 $f(x)$ 是 2π 周期函数, 在 $[-\pi, \pi]$ 上黎曼可积,

其傅里叶系数已知为 a_0, a_n, b_n $(n=1,2,\cdots)$;

(2) $h(x)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(t)g(x+t)\mathrm{d}t$, 其中 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是 2π 周期函数, 在 $[-\pi,\pi]$ 上黎曼可积, 它们的傅里叶系数已知, 分别为 a_0, a_n, b_n $(n=1,2,\cdots)$ 和 c_0, c_n, d_n $(n=1,2,\cdots)$.

8. 设 a 是一非零实数, $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是方程 $\tan x=ax$ 的全部正根按照从小到大的顺序排列所成的数列. 证明: 函数系 $\{\sin\lambda_n x\}_{n=1}^{\infty}$ 是区间 $[0,1]$ 上的一个正交系, 即

$$\int_0^1\sin\lambda_m x\sin\lambda_n x\mathrm{d}x=0,\qquad \text{当 } m\neq n.$$

13.2 傅里叶级数收敛的条件

现在我们来研究一个在周期区间 $[-\pi,\pi]$ 上绝对可积的 2π 周期函数 f, 当它满足什么条件时可以展开成三角级数. 由于 13.1 节已经证明如果 f 可以展开成三角级数, 那么这个三角级数必是它的傅里叶级数, 所以我们只须研究当 f 满足什么条件时, 其傅里叶级数收敛到它本身. 我们的方法是先求出函数 f 的傅里叶级数部分和的表达式, 然后分析在什么条件下, 这个部分和收敛到 f.

13.2.1 部分和的表示式

设 f 是 2π 周期函数, 并且在区间 $[-\pi,\pi]$ 上绝对可积. 再设

$$f(x)\sim\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

用 $S_n(f;x)$ 表示右端级数的前 n 项的和, 即

$$S_n(f;x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),\qquad n=1,2,\cdots.$$

把 a_k 和 b_k 的计算公式

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\mathrm{d}x,\qquad k=0,1,2,\cdots,$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\mathrm{d}x,\qquad k=1,2,\cdots$$

代入上面 $S_n(f;x)$ 的表达式, 就得到

$$
\begin{aligned}
S_n(f;x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos kt\cos kx + \sin kt\sin kx)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\Big(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(x-t)\Big)\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)\mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

其中

$$
D_n(x) = \frac{1}{\pi}\Big(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kx\Big), \qquad n = 1, 2, \cdots.
$$

这个函数叫做**狄利克雷核**, 其图形见 13-2-1, 上面最后那个积分叫做函数 f 的**狄利克雷积分**.

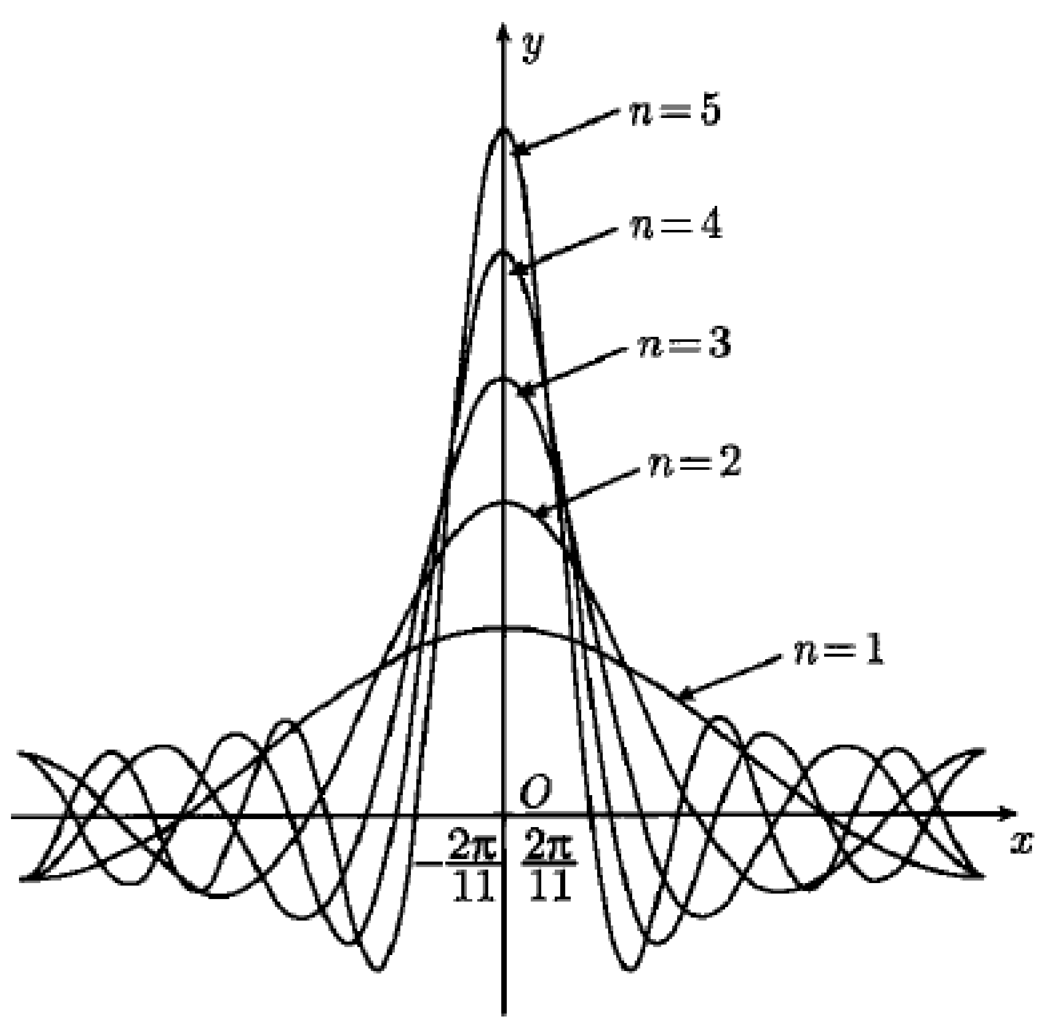


图 13-2-1 狄利克雷核的图像

进一步的推导需要借助于下列引理.

引理 13.2.1 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上, 狄利克雷核 $D_n(x)$ 有下列表达式

$$
D_n(x) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\pi\sin\frac{x}{2}} \ (\text{当}\ x \neq 0), \qquad D_n(0) = \frac{1}{2\pi} + \frac{n}{\pi}. \tag{13.2.1}
$$

而且有

$$
\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\pi} D_n(x)\mathrm{d}x = 1. \tag{13.2.2}
$$

证明 $x=0$ 的结论是显然的. 下设 $x\neq 0$, 则有

$$\begin{aligned}2\pi\sin\frac{x}{2}\cdot D_n(x)&=\sin\frac{x}{2}+\sum_{k=1}^{n}2\sin\frac{x}{2}\cos kx\\&=\sin\frac{x}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left[\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right]\\&=\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x,\end{aligned}$$

这就证明了式 (13.2.1). 式 (13.2.2) 中的第一个等号是由 $D_n(x)$ 是偶函数直接推出. 从 $D_n(x)$ 的定义式有

$$\int_{-\pi}^{\pi}D_n(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\Big(\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\mathrm{d}x\Big)=1.$$

这就证明了式 (13.2.2). 证毕.

由于 $D_n(x)$ 和 $f(x)$ 都是 2π 周期函数, 且 $D_n(x)$ 还是偶函数, 所以通过作积分变元变换并应用引理 13.1.2, 有

$$\begin{aligned}S_n(f;x)&=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)D_n(x-t)\mathrm{d}t=\int_{x-\pi}^{x+\pi}f(x-t)D_n(t)\mathrm{d}t=\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)D_n(t)\mathrm{d}t\\&=\int_{-\pi}^{0}f(x-t)D_n(t)\mathrm{d}t+\int_{0}^{\pi}f(x-t)D_n(t)\mathrm{d}t\\&=\int_{0}^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]D_n(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

把引理 13.2.1 给出的 $D_n(x)$ 的表达式代入 $S_n(f;x)$ 的这个表达式, 就得到.

引理 13.2.2 f 的傅里叶级数的前 n 项和有下列表达式

$$S_n(f;x)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t.\tag{13.2.3}$$

13.2.2 黎曼局部化原理

现在来研究本节一开始提出的问题. 先看一个更一般的问题, 即对给定的点 x_0, 当 f 满足什么条件时, 它的傅里叶级数在点 x_0 收敛. 对任意实数 A, 根据式 (13.2.2) 中的第二个等式和式 (13.2.1), 我们有

$$A=2A\int_{0}^{\pi}D_n(x)\mathrm{d}x=2A\int_{0}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\pi\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t.$$

再应用引理 13.2.2, 便得到

$$S_n(f;x_0)-A=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[f(x_0+t)+f(x_0-t)-2A]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t. \tag{13.2.4}$$

因此, f 的傅里叶级数在点 x_0 收敛于 A 的充要条件是成立

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}[f(x_0+t)+f(x_0-t)-2A]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t=0.$$

这样, 问题转化为考虑当 f 满足什么条件时, 上面的极限式成立.

先分析一下上式左端的被积函数, 由于当 $t\to 0$ 时,

$$\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\to 2n+1,$$

而当 $n\to\infty$ 时, $2n+1\to\infty$, 所以如果当 $t\to 0$ 时, $f(x_0+t)+f(x_0-t)-2A$ 不趋于零, 那么可以想象式 (13.2.5) 左端的积分中在 $t=0$ 附近的部分当 $n\to\infty$ 时将趋于无穷. 因此, 为了在这种情况下式 (13.2.5) 能够成立, 就必须左端积分中去掉 $t=0$ 附近的部分之后, 剩余的部分当 $n\to\infty$ 时也趋于无穷, 以便与 $t=0$ 附近的部分能够抵消. 然而这是不可能的, 因为只要 $\delta>0$ (充分小), 那么在 $[\delta,\pi]$ 上, $\dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}$ 的分母有正的下界 $\sin\dfrac{\delta}{2}$, 而分子的绝对值不超过 1, 所以

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\delta}^{\pi}[f(x_0+t)+f(x_0-t)-2A]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t\right|\\ \leqslant&\left(2\int_{-\pi}^{\pi}|f(x_0+t)|\mathrm{d}t+2A\pi\right)\left(\sin\frac{\delta}{2}\right)^{-1}<+\infty.\end{aligned}$$

以上的分析 (不是严格的证明) 提示我们, 为使 f 的傅里叶级数在点 x_0 收敛于 A, f 应当满足条件

$$\lim_{t\to 0}[f(x_0+t)+f(x_0-t)-2A]=0.$$

那么, 这个条件是否就是我们要寻找的条件呢? 当这个条件满足时, f 的傅里叶级数在 x_0 点就一定收敛于 A? 更深入的分析告诉我们, 虽然这个问题的答案是否定的, 但离我们的目标已经十分接近了.

做更深入分析的方法是按前面分析的思想, 把式 (13.2.5) 左端的积分分解成在 $t=0$ 附近和离 $t=0$ 比较远两个部分之和

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\pi}[f(x_0+t)+f(x_0-t)-2A]\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)t}{\sin\dfrac{t}{2}}\mathrm{d}t\\
=&\int_0^{\delta}[f(x_0+t)+f(x_0-t)-2A]\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)t}{\sin\dfrac{t}{2}}\mathrm{d}t\\
&+\int_{\delta}^{\pi}[f(x_0+t)+f(x_0-t)-2A]\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)t}{\sin\dfrac{t}{2}}\mathrm{d}t. \qquad (13.2.5)
\end{aligned}
$$

对于等式右端第二个积分, 应用被积函数的分母 $\sin\dfrac{t}{2}$ 有正的下界 $\sin\dfrac{\delta}{2}$, 而分子$\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)t$ 在区间 $[\delta,\pi]$ 上当 n 越来越大时, 在 -1 和 1 之间振动的频率越来越高, 进而在每一个使得 $f(x_0+t)+f(x_0-t)-2A$ 变化不是很大的小区间上, 积分的正负部分相互抵消, 可以得到它随着 $n\to\infty$ 而趋于零. 这样问题就归结为处理等式右端第一个积分.

以上分析可以严格化. 为此先证明下述著名的引理.

引理 13.2.3 (黎曼引理) 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上绝对可积, 则有

$$\lim_{|\lambda|\to\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x=0,$$

$$\lim_{|\lambda|\to\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x=0.$$

证明 只证明第一个等式, 第二个等式的证明类似.

先设 f 在区间 $[a,b]$ 上黎曼可积. 这时, 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 根据达布准则, 存在相应的 $\delta>0$, 使对 $[a,b]$ 的任意一个分割 Δ: $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 只要 $\|\Delta\|=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\Delta x_k<\delta$ (其中 $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$), 就有

$$\sum_{k=1}^{n}\omega_k(f)\Delta x_k<\frac{\varepsilon}{2},$$

其中 $\omega_k(f)$ 表示函数 f 在区间 $[x_{k-1},x_k]$ 上的振幅, 即 $\omega_k(f)=M_k-m_k$, 而

$$M_k=\sup_{x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k}f(x),\qquad m_k=\inf_{x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k}f(x).$$

取定满足条件 $\|\Delta\|<\delta$ 的一个这样的分割, 有

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x &= \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x\\ &= \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f(x)-m_k]\sin\lambda x\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^n m_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} \sin\lambda x\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由于对每个 $1 \leqslant k \leqslant n$, 有

$$\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} \sin\lambda x\mathrm{d}x\right| = \left|\frac{\cos\lambda x_k - \cos\lambda x_{k-1}}{\lambda}\right| \leqslant \frac{2}{|\lambda|},$$

所以

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x\right| &\leqslant \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x)-m_k|\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^n |m_k| \left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} \sin\lambda x\mathrm{d}x\right|\\ &\leqslant \sum_{k=1}^n (M_k - m_k)\Delta x_k + \sum_{k=1}^n |m_k| \frac{2}{|\lambda|} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2K}{|\lambda|},\end{aligned}$$

其中 $K = \sum\limits_{k=1}^n |m_k|$. 于是, 只要 $|\lambda| > \frac{\varepsilon}{4K}$, 就有

$$\left|\int_a^b f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

因此当 f 在区间 $[a,b]$ 上黎曼可积时, 引理的结论成立.

再设 f 在 $[a,b]$ 上只是绝对可积而不是黎曼可积, 因而有有限个瑕点. 通过把区间 $[a,b]$ 上的积分分解成有限个小区间上的积分的和, 可假设 f 在 $[a,b]$ 上只有一个瑕点, 且这个瑕点就是点 a. 这时, 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 只要取 $\delta > 0$ 充分小, 就可使

$$\left|\int_a^{a+\delta} f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^{a+\delta} |f(x)|\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2}.$$

在区间 $[a+\delta, b]$ 上, f 是黎曼可积的, 因此应用已证明的结论知, 存在 $N > 0$, 使当 $|\lambda| \geqslant N$ 时成立

$$\left|\int_{a+\delta}^b f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

把以上两个不等式相加, 即知当 $|\lambda| \geqslant N$ 时, 就有

$$\left|\int_a^b f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

因此当 f 在区间 $[a,b]$ 上绝对可积时, 引理的结论也成立. 证毕.

定理 13.2.1 (黎曼局部化原理) 设 f 和 g 是两个 2π 周期函数, 它们都在区间 $[-\pi,\pi]$ 上绝对可积. 又设 x_0 是实数轴上的任意一点, 而 f 和 g 在 x_0 的一个小邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ $(\delta > 0)$ 上相等 (在这个区间之外它们不必相等), 则 f 的傅里叶级数在点 x_0 收敛当且仅当 g 的傅里叶级数在点 x_0 收敛, 而且当它们收敛时两个和相等.

证明 由于 f 和 g 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ $(\delta>0)$ 上相等, 所以根据引理 13.2.2 给出的傅里叶级数的部分和公式, 有

$$\begin{aligned}S_n(f;x_0)-S_n(g;x_0)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\{[f(x_0+t)+f(x_0-t)]-[g(x_0+t)+g(x_0-t)]\}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi}\frac{[f(x_0+t)+f(x_0-t)]-[g(x_0+t)+g(x_0-t)]}{\sin\frac{t}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

因为在区间 $[\delta,\pi]$ 上函数 $\sin\frac{t}{2}$ 有正的下界 $\sin\frac{\delta}{2}$, 从而在这个区间上函数

$$\frac{[f(x_0+t)+f(x_0-t)]-[g(x_0+t)+g(x_0-t)]}{\sin\frac{t}{2}}$$

是绝对可积的, 所以根据黎曼引理知, 上面最后这个积分当 $n\to\infty$ 时趋于零, 说明

$$\lim_{n\to\infty}[S_n(f;x_0)-S_n(g;x_0)]=0.$$

所以极限 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(f;x_0)$ 存在当且仅当极限 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(g;x_0)$ 存在, 而且当它们存在时是相等的. 证毕.

黎曼局部化原理告诉我们, 函数 f 的傅里叶级数在点 x_0 是否收敛以及当它收敛时的和是多少, 只与 f 在点 x_0 附近的性质有关, 而与 f 在离 x_0 较远的点处的性质无关, 即 $S_n(f;x_0)$ 收敛与否以及收敛时的极限值等于什么, 只取决于函数 f 在点 x_0 的一个小邻域 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ (其中 $\delta>0$ 可取得任意小) 上的性质, 而与 f 在邻域 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 以外的性质无关.

下面我们应用黎曼局部化原理来考虑傅里叶级数的收敛性.

定理 13.2.2 f 的傅里叶级数在点 x_0 收敛于实数 A 的充要条件是存在 $\delta>0$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\delta}\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2A}{t}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\mathrm{d}t=0. \tag{13.2.6}$$

证明 由式 (13.2.4) 和式 (13.2.5) 有

$$\begin{aligned}S_n(f;x_0)-A=&\frac{1}{2\pi}\int_0^{\delta}\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2A}{\sin\frac{t}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\mathrm{d}t\\&+\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi}\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2A}{\sin\frac{t}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\mathrm{d}t\\=&\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2A}{t}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\delta [f(x_0+t)+f(x_0-t)-2A]\cdot\frac{t-2\sin\dfrac{t}{2}}{2t\sin\dfrac{t}{2}}\cdot\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\mathrm{d}t$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_\delta^\pi \frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2A}{\sin\dfrac{t}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\mathrm{d}t$$

$$=I_1+I_2+I_3.$$

类似与前面可知, 当 $n\to\infty$ 时 I_3 趋于零. 对于 I_2, 由于

$$\lim_{t\to0^+}\frac{t-2\sin\dfrac{t}{2}}{2t\sin\dfrac{t}{2}}=\lim_{t\to0^+}\frac{t-2\left(\dfrac{t}{2}+O(t^3)\right)}{2t\left(\dfrac{t}{2}+O(t^3)\right)}=\lim_{t\to0^+}\frac{O(t)}{1+O(t^2)}=0,$$

说明函数 $\dfrac{t-2\sin\dfrac{t}{2}}{2t\sin\dfrac{t}{2}}$ 在区间 $[0,\delta]$ 上连续 (在 $t=0$ 处补充定义函数值为零), 从而用它去乘绝对可积 $f(x_0+t)+f(x_0-t)-2A$ 得到的函数仍然是绝对可积的, 所以应用黎曼引理知, 当 $n\to\infty$ 时 I_2 也趋于零. 因此, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(f;x_0)=A$ 的充要条件是当 $n\to\infty$ 时 I_1 趋于零, 即式 (13.2.6) 成立. 这就证明了结论 (2). 证毕.

13.2.3 迪尼 – 利普希茨收敛定理

定理 13.2.2 虽然给出了傅里叶级数在一点 x_0 收敛的充分必要条件, 但是由于式 (13.2.6) 左端的积分一般来说是不好计算的, 所以直接应用这个定理来判断傅里叶级数是否收敛并不方便. 下面我们从这个定理出发推导一些易于检验的充分条件.

定理 13.2.3 (迪尼收敛定理) 设 f 是 2π 周期函数, 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上绝对可积. 又设 x_0 是实数轴上的任意一点. 如果存在实数 A 和 $\delta>0$ 使得

$$\int_0^\delta \frac{|f(x_0+t)+f(x_0-t)-2A|}{t}\mathrm{d}t<\infty,$$

则 f 的傅里叶级数在点 x_0 收敛, 且和等于 A.

证明 以上条件意味着函数 $\dfrac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2A}{t}$ 在区间 $[0,\delta]$ 上是绝对可积的, 所以应用黎曼引理知式 (13.2.6) 成立. 因此 f 的傅里叶级数在点 x_0 收敛, 且和等于 A. 证毕.

定义 13.2.1 设 f 是在点 x_0 及其附近有定义的函数.

(1) 如果存在 $\delta>0$ 和区间 $[0,\delta]$ 上的非负连续函数 φ 使得

$$|f(x_0\pm t)-f(x_0)|\leqslant\varphi(t),\quad \forall t\in[0,\delta],\qquad 且\qquad \int_0^\delta\frac{\varphi(t)}{t}\mathrm{d}t<\infty,$$

则称 f 在点 x_0 **迪尼连续**.

(2) 如果存在常数 $\delta > 0, 0 < \alpha \leqslant 1$ 和 $C > 0$ 使得

$$|f(x_0+t) - f(x_0)| \leqslant C|t|^{\alpha}, \qquad \forall t \in [-\delta, \delta],$$

则称 f 在点 x_0 α **阶赫尔德连续**. 特别地, 当 $\alpha=1$ 时, 也称 f 在点 x_0 **利普希茨连续**.

由 $\displaystyle\int_0^{\delta} \frac{\varphi(t)}{t}\mathrm{d}t < \infty$ 可知 $\varphi(0) = 0$, 所以 f 在点 x_0 迪尼连续蕴涵着 f 在点 x_0 连续. 易见下述函数在点 $x = 0$ 是迪尼连续的

$$f(x) = \begin{cases} |\ln x|^{-p}, & \text{当 } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{当 } -1 < x \leqslant 0, \end{cases}$$

其中 $p > 1$. 显然, 赫尔德连续 (利普希茨连续) 的函数都是迪尼连续的. 赫尔德连续函数的典型例子是函数 $f(x) = |x|^{\alpha}$, 其中 $0 < \alpha \leqslant 1$. 易见这个函数在点 $x = 0$ 是 α 阶赫尔德连续的. 应用导数的定义容易知道, 如果函数 f 在点 x_0 可导, 则它必在该点利普希茨连续. 不可导但利普希茨连续的函数的典型例子是函数 $f(x) = |x|$, 它在点 $x = 0$ 是利普希茨连续的, 但在该点不可导.

应用迪尼收敛定理我们可得到

定理 13.2.4 (迪尼–利普希茨收敛定理 1) 设 f 是 2π 周期函数, 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上广义黎曼可积. 如果 f 在点 x_0 迪尼连续 (赫尔德连续, 利普希茨连续), 则它的傅里叶级数在点 x_0 收敛于它在该点的函数值 $f(x_0)$. 特别地, 如果 f 在点 x_0 可导, 则它的傅里叶级数在点 x_0 收敛于它在该点的函数值 $f(x_0)$.

证明 当 f 在点 x_0 迪尼连续时, 我们有

$$\begin{aligned} &\int_0^{\delta} \frac{|f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2f(x_0)|}{t}\mathrm{d}t \\ \leqslant &\int_0^{\delta} \frac{|f(x_0+t) - f(x_0)|}{t}\mathrm{d}t + \int_0^{\delta} \frac{|f(x_0-t) - f(x_0)|}{t}\mathrm{d}t \\ \leqslant &2\int_0^{\delta} \frac{\varphi(t)}{t}\mathrm{d}t < \infty, \end{aligned}$$

所以应用迪尼收敛定理知, f 的傅里叶级数在点 x_0 收敛于它在该点的函数值 $f(x_0)$. 由于

$$\text{可导} \Rightarrow \text{利普希茨连续} \Rightarrow \text{赫尔德连续} \Rightarrow \text{迪尼连续}$$

所以定理的其余结论都蕴涵在上述已证明的结论中. 证毕.

从以上定理可知, 假如函数 f 在点 x_0 满足比连续稍微强一点的条件: 迪尼连续, 就可以保证它的傅里叶级数在该点收敛于它在这点的函数值 $f(x_0)$. 法国数学家雷蒙

(Du Bois Reymond) 在 1876 年证明了, 存在连续的 2π 周期函数, 它的傅里叶级数至少在一点处是发散的. 所以, 为保证傅里叶级数的收敛性, 不能把迪尼连续的条件减弱为仅仅连续.

假如函数 f 在点 x_0 不连续, 而是发生了第一类间断, 那么也可应用迪尼判别法, 得到其傅里叶级数在该点收敛的一些充分条件. 为此引进以下概念.

设 f 是在点 x_0 附近有定义的函数 (在点 x_0 可以没有定义), 并且在点 x_0 发生第一类间断.

(1) 如果存在 $\delta > 0$ 和区间 $[0, \delta]$ 上的非负连续函数 φ 使得

$$|f(x_0 \pm t) - f(x_0^{\pm})| \leqslant \varphi(t), \quad \forall t \in (0, \delta], \qquad \text{且} \qquad \int_0^{\delta} \frac{\varphi(t)}{t} \mathrm{d}t < \infty,$$

这里 $f(x_0^{\pm}) = \lim\limits_{x \to x_0^{\pm}} f(x)$, 则称 f 在点 x_0**迪尼间断**.

(2) 如果存在常数 $\delta > 0$, $0 < \alpha \leqslant 1$ 和 $C > 0$ 使得

$$|f(x_0 \pm t) - f(x_0^{\pm})| \leqslant C|t|^{\alpha}, \qquad \forall t \in (0, \delta],$$

则称 f 在点 x_0 α **阶赫尔德间断**. 特别地, 当 $\alpha = 1$ 时, 也称 f 在点 x_0 **利普希茨间断**.

(3) 如果下列极限存在

$$f'(x_0^{\pm}) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0 \pm t) - f(x_0^{\pm})}{t},$$

则称 f 在点 x_0 有**广义的左导数**(当对应于 $-$ 号的极限存在时) 或有**广义的右导数**(当对应于 $+$ 号的极限存在时).

应用迪尼收敛定理可得到定理 13.2.5

定理 13.2.5 (迪尼–利普希茨收敛定理 2) 设 f 是 2π 周期函数, 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上广义黎曼可积. 如果 f 在点 x_0 迪尼间断 (赫尔德间断, 利普希茨间断), 则它的傅里叶级数在点 x_0 收敛于

$$\frac{1}{2}[f(x_0^+) + f(x_0^-)].$$

特别地, 如果 f 在点 x_0 有广义的左、右导数, 则定理 13.2.5 的结论成立.

证明 当 f 在点 x_0 迪尼间断时, 对 $A = \frac{1}{2}[f(x_0^+) + f(x_0^-)]$ 有

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\delta} \frac{|f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2A|}{t} \mathrm{d}t \\
\leqslant &\int_0^{\delta} \frac{|f(x_0 + t) - f(x_0^+)|}{t} \mathrm{d}t + \int_0^{\delta} \frac{|f(x_0 - t) - f(x_0^-)|}{t} \mathrm{d}t \\
\leqslant &\, 2\int_0^{\delta} \frac{\varphi(t)}{t} \mathrm{d}t < \infty,
\end{aligned}$$

所以应用迪尼收敛定理知, f 的傅里叶级数在点 x_0 收敛于 $A=\dfrac{1}{2}[f(x_0^+)+f(x_0^-)]$. 由于

$$\text{有广义的左、右导数} \Rightarrow \text{利普希茨间断} \Rightarrow \text{赫尔德间断} \Rightarrow \text{迪尼间断}$$

所以定理的其余结论都蕴涵在上述已证明的结论中. 证毕.

以上讨论了函数的傅里叶级数在一点处的收敛性. 下面再来考虑它在整个区间 $[-\pi,\pi]$ 上 (从而也在整个数轴上) 的收敛性. 我们先引进下列概念.

设 f 是定义在区间 $[a,b]$ 上的函数.

(1) 如果存在 $[a,b]$ 的一个分割

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_m=b,$$

使得函数 f 在每个小的开区间 (x_{k-1},x_k) 上都连续, 且在每个分点 x_k 处左极限 $f(x_k^-)$ 和右极限 $f(x_k^+)$ 都存在, 就称 f 在 $[a,b]$ 上**分段连续**.

(2) 如果存在定义在区间 $[0,c]$ $(c=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant m}(x_k-x_{k-1}))$ 上的非负连续函数 φ 使得

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\varphi(|x-y|),\qquad \forall x,y\in(x_{k-1},x_k),\qquad k=1,2,\cdots,m$$

且

$$\int_0^c\frac{\varphi(t)}{t}\mathrm{d}t<\infty,$$

则称 f 在 $[a,b]$ 上**分段迪尼连续**.

(3) 如果存在常数 $0<\alpha\leqslant1$ 和 $C>0$ 使得

$$|f(x)-f(y)|\leqslant C|x-y|^\alpha,\qquad \forall x,y\in(x_{k-1},x_k),\qquad k=1,2,\cdots,m;$$

则称 f 在 $[a,b]$ 上**分段 α 阶赫尔德连续**. 特别地, 当 $\alpha=1$ 时, 也称 f 在 $[a,b]$ 上**分段利普希茨连续**.

(4) 如果 f 在每个小区间 (x_{k-1},x_k) 上都可微, 且在每个分点 x_k 处有广义的左导数 $f'(x_k^-)$ 和广义的右导数 $f'(x_k^+)$, 则称 f 在 $[a,b]$ 上**分段可微**.

根据函数极限的柯西准则不难看出, 如果 f 在 $[a,b]$ 上分段迪尼连续, 那么在每个分点 x_k 处的左极限 $f(x_k^-)$ 和右极限 $f(x_k^+)$ 都存在, 因此分段迪尼连续蕴涵着分段连续. 另外, 显然有

$$\text{分段可微} \Rightarrow \text{分段利普希茨连续} \Rightarrow \text{分段赫尔德连续} \Rightarrow \text{分段迪尼连续}$$

把定理 13.2.4 和定理 13.2.5 结合起来应用, 就得到.

定理 13.2.6 (迪尼–利普希茨收敛定理 3)　设 f 是 2π 周期函数, 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上分段迪尼连续 (分段赫尔德连续, 分段利普希茨连续), 则它的傅里叶级数在每个连续点 x_0 处收敛到 $f(x_0)$, 而在每个间断点 x_0 处则收敛到

$$\frac{1}{2}[f(x_0^+)+f(x_0^-)].$$

特别地, 如果 f 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上分段可微, 那么上述结论成立.

下面我们来看一组优美的函数图像, 体会一下傅里叶级数部分和函数收敛时图像曲线的走势情况, 更直观地体会一下上述几个定理及引理. 以 13.1 节中例 1~ 例 4 中函数的傅里叶级数的部分和函数为例, 其图形见图 13-2-2~ 图 13-2-5.

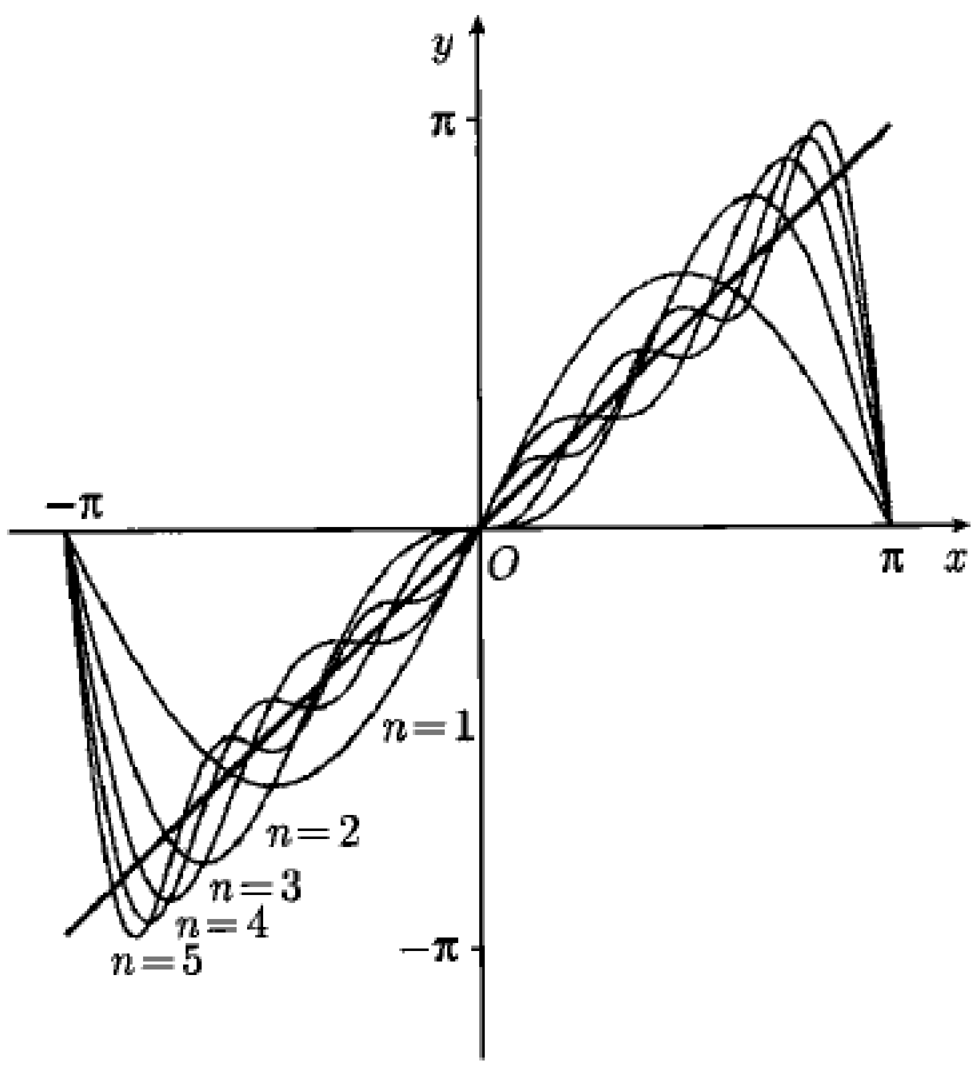


图 13-2-2 13.1 节 例 1 中函数傅里叶级数的部分和序列

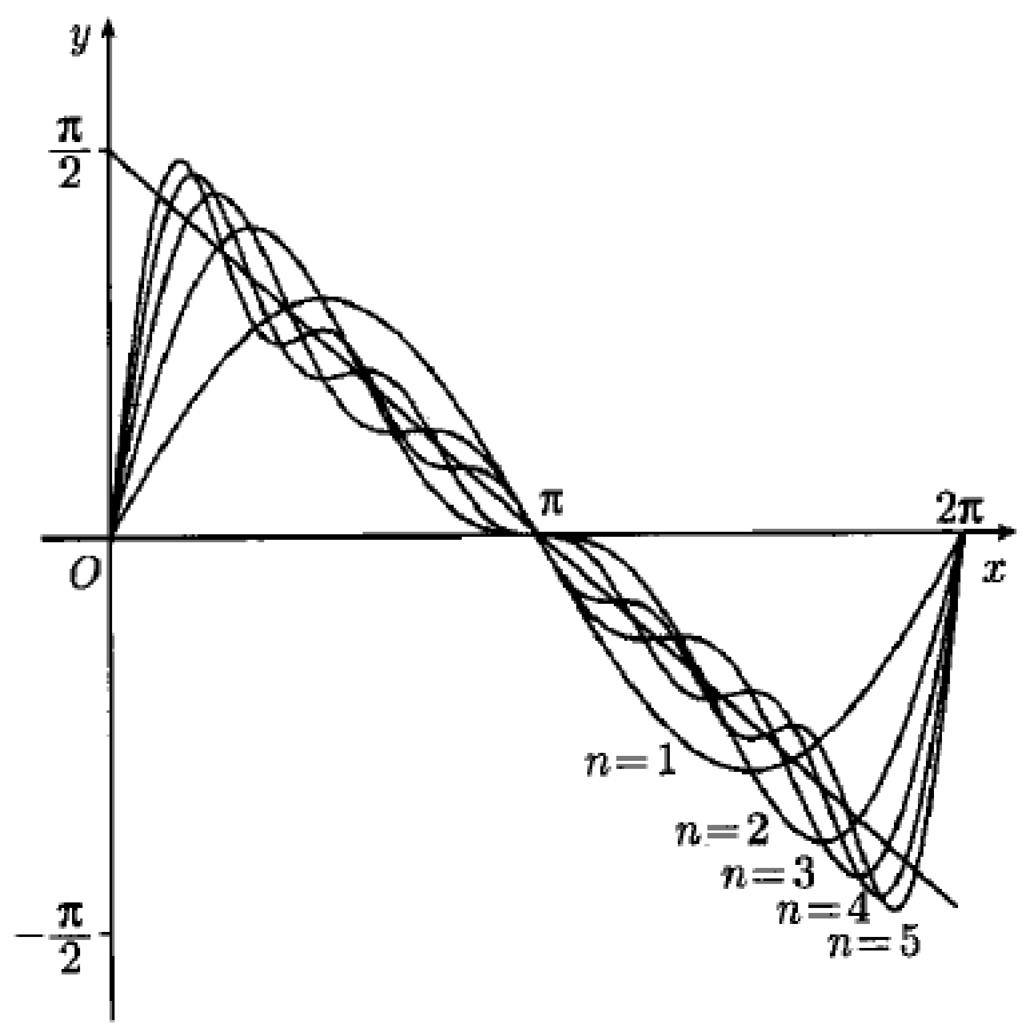


图 13-2-3 13.1 节 例 2 中函数的傅里叶级数的部分和序列

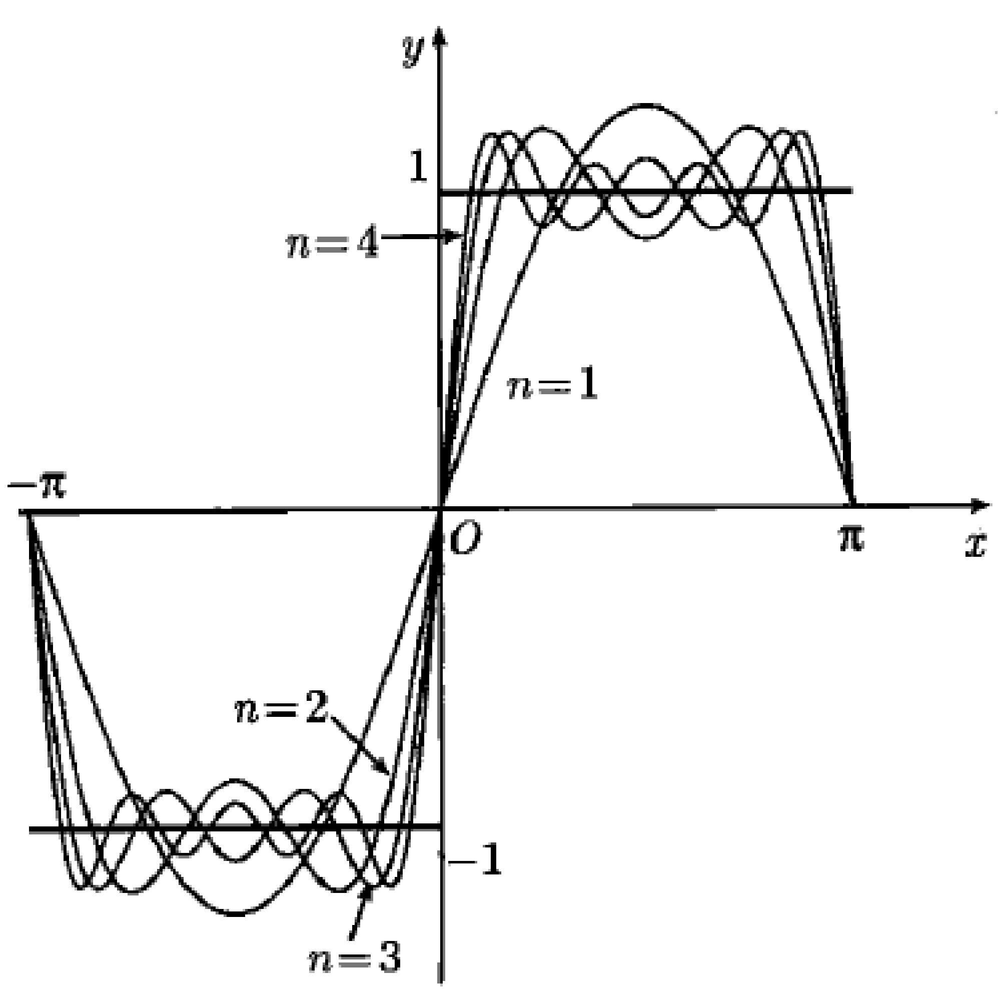


图 13-2-4 13.1 节 例 3 中函数的傅里叶级数的部分和序列

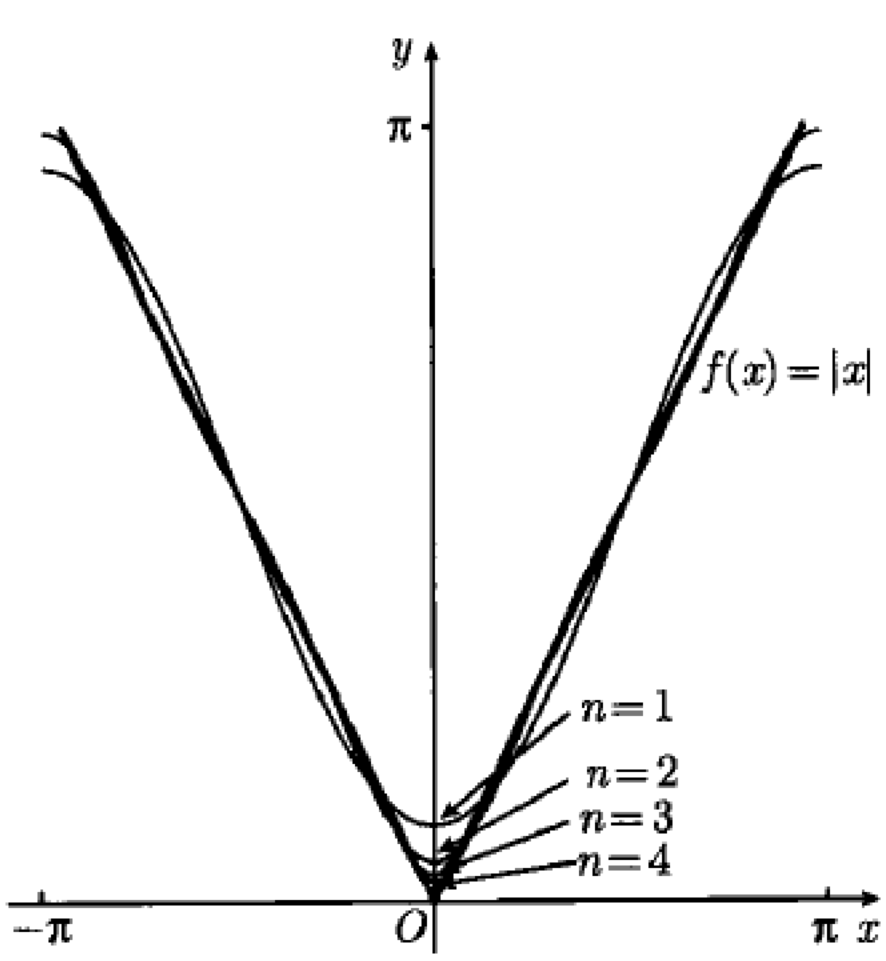


图 13-2-5 13.1 节 例 4 中函数的傅里叶级数部分和序列

13.2.4 狄利克雷收敛定理

下面我们再导出另外一类关于傅里叶级数收敛的充分条件, 这类充分条件是根据

函数的单调性来判断傅里叶级数的收敛性.

引理 13.2.4 (狄利克雷积分)

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

证明 首先, 由于 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin x}{x}=1$, 所以 $\dfrac{\sin x}{x}$ 在每个有界区间 $(0,a]$ 上都是有界连续函数, 因而是黎曼可积的. 其次, 根据无穷积分的狄利克雷判别法, 积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 是收敛的. 因此

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)t}{t}\mathrm{d}t.$$

最后这个等式是通过作积分变元变换 $x=(2n+1)t$ 得到的. 由于函数 $\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{\sin t}=\dfrac{\sin t-t}{t\sin t}$ 是 $(0,\frac{\pi}{2}]$ 上的有界连续函数, 因而是黎曼可积的, 所以应用黎曼引理有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)t}{t}\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\mathrm{d}t.$$

对任意正整数 n, 有

$$\begin{aligned}\sin(2n+1)t&=\sin[(2n-1)t+2t]\\&=\sin(2n-1)t\cos 2t+\cos(2n-1)t\sin 2t\\&=\sin(2n-1)t(1-2\sin^2 t)+2\cos(2n-1)t\cos t\sin t\\&=\sin(2n-1)t+2\cos 2nt\sin t.\end{aligned}$$

因此, 如果记

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\mathrm{d}t,$$

则有

$$\begin{aligned}I_n&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n-1)t}{\sin t}\mathrm{d}t+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2nt\mathrm{d}t\\&=I_{n-1}+\frac{1}{n}\sin 2nt\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=I_{n-1}.\end{aligned}$$

从这个递推公式我们得到

$$I_n=I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2},\qquad n=1,2,\cdots.$$

所以,

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}I_n=\frac{\pi}{2}.$$

证毕.

引理 13.2.5 设函数 f 在区间 $(0,\delta)$ 上单调且有界, 则

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^{\delta}f(x)\frac{\sin\lambda x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}f(0^+).$$

证明 不妨设 f 是单调递增函数 (否则用 $-f$ 替换 f 进行讨论), 我们有

$$\int_0^{\delta}f(x)\frac{\sin\lambda x}{x}\mathrm{d}x=f(0^+)\int_0^{\delta}\frac{\sin\lambda x}{x}\mathrm{d}x+\int_0^{\delta}[f(x)-f(0^+)]\frac{\sin\lambda x}{x}\mathrm{d}x=I+J.$$

对于 I, 根据引理 13.2.4, 当 $\lambda\to+\infty$ 时,

$$I=f(0^+)\int_0^{\delta}\frac{\sin\lambda x}{x}\mathrm{d}x=f(0^+)\int_0^{\lambda\delta}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\to f(0^+)\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}f(0^+).$$

对于 J, 我们有

$$J=\int_0^{\delta_1}[f(x)-f(0^+)]\frac{\sin\lambda x}{x}\mathrm{d}x+\int_{\delta_1}^{\delta}[f(x)-f(0^+)]\frac{\sin\lambda x}{x}\mathrm{d}x=J_1+J_2,$$

其中 $0<\delta_1<\delta$ 是待定的常数. 对任意 $\delta_1>0$, 由于函数 $\dfrac{f(x)-f(0^+)}{x}$ 在区间 $[\delta_1,\delta]$ 上是黎曼可积的, 所以根据黎曼引理, 当 $\lambda\to+\infty$ 时, 有

$$J_2=\int_{\delta_1}^{\delta}\frac{f(x)-f(0^+)}{x}\sin\lambda x\mathrm{d}x\to 0.$$

再来证明, 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 只要取 $\delta_1>0$ 充分小, 便可使 $|J_1|\leqslant\varepsilon$, 而无论 λ 取何值. 为此令 M 为函数 $x\mapsto\displaystyle\int_0^x\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ 的界, 即设

$$\left|\int_0^x\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\right|\leqslant M,\qquad \forall x\geqslant 0.$$

对任意给定的 $\varepsilon>0$, 取 $\delta_1>0$ 充分小使当 $0<x\leqslant\delta_1$ 时,

$$0\leqslant f(x)-f(0^+)\leqslant\frac{\varepsilon}{2M}.$$

对这样取定的 δ_1, 对 J_1 应用积分第二中值定理 (推论 7.4.1), 可知存在 $\xi\in[0,\delta_1]$ 使

$$J_1=\int_0^{\delta_1}[f(x)-f(0^+)]\frac{\sin\lambda x}{x}\mathrm{d}x=[f(\delta_1)-f(0^+)]\int_{\xi}^{\delta_1}\frac{\sin\lambda x}{x}\mathrm{d}x,$$

进而

$$|J_1| \leqslant \frac{\varepsilon}{2M}\left|\int_{\xi}^{\delta_1} \frac{\sin \lambda x}{x}\mathrm{d}x\right| = \frac{\varepsilon}{2M}\left|\int_{\lambda\xi}^{\lambda\delta_1} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right|$$

$$= \frac{\varepsilon}{2M}\left|\int_0^{\lambda\delta_1} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x - \int_0^{\lambda\xi} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2M}\cdot 2M = \varepsilon.$$

这就证明了所陈述的结论. 因此, 当 $\lambda \to +\infty$ 时也成立 $J \to 0$. 把以上关于 I 和 J 的结论合起来, 就得到了所欲证明的极限关系式. 证毕.

定理 13.2.7 (狄利克雷收敛定理 1) 设 f 是 2π 周期函数, 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上绝对可积. 又设 x_0 是实数轴上的任意一点. 如果存在 $\delta > 0$ 使 f 在区间 $(x_0-\delta, x_0)$ 和 $(x_0, x_0+\delta)$ 上分别单调且有界, 则 f 的傅里叶级数在点 x_0 收敛于

$$\frac{1}{2}[f(x_0^+) + f(x_0^-)].$$

证明 根据黎曼局部化原理, 我们只须证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} \frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{t}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}[f(x_0^+) + f(x_0^-)].$$

事实上, 从假设条件可知, t 的函数 $f(x_0+t)$ 和 $f(x_0-t)$ 都在区间 $(0,\delta)$ 上单调. 因此应用引理 13.2.4, 便有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} \frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{t}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}[f(x_0^+) + f(x_0^-)]$$

$$= \frac{1}{2}[f(x_0^+)+f(x_0^-)].$$

证毕.

类似于函数分段连续的概念, 也可引进函数分段单调的概念. 确切地说, 对定义在区间 $[a,b]$ 上的函数 f, 如果存在 $[a,b]$ 的一个分割

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m = b,$$

使得函数 f 在每个小的开区间 (x_{k-1}, x_k) 上都单调且有界 (从而在每个分点 x_k 处左极限 $f(x_k^-)$ 和右极限 $f(x_k^+)$ 都存在), 就称 f 在 $[a,b]$ 上**分段单调**. 从上面的定理我们可得到

定理 13.2.8 (狄利克雷收敛定理 2) 设 f 是 2π 周期函数, 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上分段单调, 则它的傅里叶级数在每个连续点 x_0 处收敛到 $f(x_0)$, 而在每个间断点 x_0 处则收敛到

$$\frac{1}{2}[f(x_0^+) + f(x_0^-)].$$

习 题 13.2

1. 问 13.1 节习题 1 中各个函数的傅里叶级数都在哪些点收敛? 它们的和函数是什么?
2. 设 $f(x)$ 是 2π 周期函数, 在 $(-\pi,\pi]$ 上等于 x^2.
   (1) 求 $f(x)$ 的傅里叶级数;
   (2) 问 $f(x)$ 的傅里叶级数在哪些点收敛? 它的和函数是什么?
   (3) 证明: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$;
   (4) 证明: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$.
3. 设 $f(x)$ 是 2π 周期函数, 在 $[0,2\pi)$ 上等于 $x^2(x-2\pi)^2$.
   (1) 求 $f(x)$ 的傅里叶级数;
   (2) 问 $f(x)$ 的傅里叶级数在哪些点收敛? 它的和函数是什么?
   (3) 证明: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$;
   (4) 证明: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^4}=\frac{\pi^4}{720}$.
4. 设 $f(x)$ 是 2π 周期函数, 在 $(-\pi,\pi]$ 上等于 $x(\pi^2-x^2)$.
   (1) 求 $f(x)$ 的傅里叶级数;
   (2) 问 $f(x)$ 的傅里叶级数在哪些点收敛? 它的和函数是什么?
   (3) 证明: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}=\frac{\pi^3}{32}$.
5. 设 $f(x)$ 是 2π 周期函数, 在 $(-\pi,\pi]$ 上等于 $\cos ax$, 其中 a 是非整数的正常数.
   (1) 求 $f(x)$ 的傅里叶级数;
   (2) 问 $f(x)$ 的傅里叶级数在哪些点收敛? 它的和函数是什么?
   (3) 证明: $\displaystyle\frac{1}{2a^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2-a^2}=\frac{\pi}{2a\sin a\pi}$, 其中 a 是非整数的正常数;
   (4) 证明: $\displaystyle\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}=\frac{\pi}{4}$.
6. 设 $f(x)$ 是 2π 周期函数, 在 $[0,2\pi)$ 上等于 $\sin ax$, 其中 a 是非整数的正常数.
   (1) 求 $f(x)$ 的傅里叶级数;
   (2) 问 $f(x)$ 的傅里叶级数在哪些点收敛? 它的和函数是什么?

(3) 证明: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-1)}{(2n-1)^2-a^2}=\frac{\pi\sin\frac{a\pi}{2}}{2\sin a\pi}$;

(4) 证明: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$.

7. 设 $f(x)$ 是 2π 周期函数, 在 $(-\pi,\pi]$ 上等于 $\cosh ax$, 其中 a 是常数.

(1) 求 $f(x)$ 的傅里叶级数;

(2) 问 $f(x)$ 的傅里叶级数在哪些点收敛? 它的和函数是什么?

(3) 证明: $\displaystyle\frac{1}{2a^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}=\frac{\pi}{2a}\coth a\pi$, 其中 a 是任意正常数;

(4) 证明: $\displaystyle\frac{1}{2a^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+a^2}=\frac{\pi}{2a\sinh a\pi}$, 其中 a 是任意正常数.

8. 设 $f(x)$ 是 2π 周期函数, 在 $(-\pi,\pi]$ 上等于 $\sinh ax$, 其中 a 是常数.

(1) 求 $f(x)$ 的傅里叶级数;

(2) 问 $f(x)$ 的傅里叶级数在哪些点收敛? 它的和函数是什么?

(3) 证明: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-1)}{(2n-1)^2+a^2}=\frac{\pi\sinh\frac{a\pi}{2}}{2\sinh a\pi}$, 其中 a 是任意正常数.

9. 证明:

(1) $\displaystyle x\sin x=1-\frac{1}{2}\cos x+2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2-1}\cos nx,\ \forall x\in[-\pi,\pi]$;

(2) $\displaystyle x\cos\frac{x}{2}=\frac{32}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{(4n^2-1)^2}\sin nx,\ \forall x\in[-\pi,\pi]$;

(3) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-1}=\frac{1}{4}$.

10. 设 $f(x)$ 是连续的 2π 周期函数, 它的傅里叶级数在点 x_0 收敛. 证明: $f(x)$ 的傅里叶级数在点 x_0 的和等于 $f(x_0)$.

11. 设 $f(x)$ 是 2π 周期函数, 在 $[-\pi,\pi]$ 上黎曼可积. 又设

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

(1) 证明: $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\frac{a_0}{2}x$ 也是 2π 周期函数, 在 $[-\pi,\pi]$ 上 (因而也在整个 $(-\infty,+\infty)$ 上) 利普希茨连续;

(2) 求 $F(x)$ 的傅里叶级数;

(3) 证明: 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$ 收敛, 且对任意实数 x 成立逐项积分

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x \frac{a_0}{2}\mathrm{d}t+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x (a_n\cos nt+b_n\sin nt)\mathrm{d}t$$
$$=\frac{a_0}{2}x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(-\frac{b_n}{n}\cos nx+\frac{a_n}{n}\sin nx\Big).$$

这个习题说明, 尽管函数 $f(x)$ 的傅里叶级数不一定逐点收敛于 $f(x)$, 即等式 $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 不一定逐点成立, 但在一定的条件下 (如 $f(x)$ 是分段连续), 却可对此等式进行逐项积分.

12. 证明黎曼引理的下述推广: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, $\varphi(x)$ 是以 $T>0$ 为周期的周期函数, 且在 $[0,T]$ 上可积, 则有

$$\lim_{|\lambda|\to\infty}\int_a^b f(x)\varphi(\lambda x)\mathrm{d}x=\Big(\frac{1}{T}\int_0^T\varphi(x)\mathrm{d}x\Big)\Big(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\Big).$$

13. 证明: (1) $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^1|\ln x|\cos^2\lambda x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$; (2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^1\frac{\sin\pi x}{n+x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$.

14. 证明: 当 $4n-2\leqslant\lambda\leqslant 4n$ (n 表示正整数) 时,

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\leqslant\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\lambda x}{\sin x}\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}.$$

13.3 傅里叶级数的性质

本节研究怎样从函数的性质来推断其傅里叶级数系数的性质以及反过来, 怎样从傅里叶级数系数的性质来推断函数的性质.

13.3.1 由函数的光滑性推断傅里叶系数的衰减性

首先, 应用黎曼引理我们有

引理 13.3.1 设 f 是 2π 周期函数, 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上绝对可积. 则它的傅里叶系数 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 具有性质

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0,\qquad \lim_{n\to\infty}b_n=0.$$

其次, 通过反复应用分部积分公式, 我们可以证明

定理 13.3.1 设 m 是一个正整数, 又设 f 是 2π 周期函数, 在整个直线 $(-\infty,+\infty)$ 上有 $m-1$ 阶的导数, 且 $m-1$ 阶导数连续 (当 $m=1$ 时, 这意味着函数 f 本身是连续函数), 并且在区间 $[-\pi,\pi]$ 上除有限个点之外处处有 m 阶导数, 而且 m 阶导数在

$[-\pi,\pi]$ 上绝对可积, 则它的傅里叶系数 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 具有性质

$$\lim_{n\to\infty} n^m a_n = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} n^m b_n = 0.$$

证明 当 $m=1$ 时, 应用分部积分公式 (定理 9.3.2), 我们有

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\sin nx)'\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{n\pi} f(x)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos\left(nx+\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

类似地, 应用函数 f 的 2π 周期性, 我们有

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = -\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx)'\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{n\pi} f(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin\left(nx+\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

当 $m>1$ 时, 通过作 m 次分部积分类似地可证明

$$a_n = \frac{1}{n^m\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(m)}(x)\cos\left(nx+\frac{m\pi}{2}\right)\mathrm{d}x, \tag{13.3.1}$$

$$b_n = \frac{1}{n^m\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(m)}(x)\sin\left(nx+\frac{m\pi}{2}\right)\mathrm{d}x. \tag{13.3.2}$$

因为 $f^{(m)}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上绝对可积, 所以应用黎曼引理得

$$\lim_{n\to\infty} n^m a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(m)}(x)\cos\left(nx+\frac{m\pi}{2}\right)\mathrm{d}x = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} n^m b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(m)}(x)\sin\left(nx+\frac{m\pi}{2}\right)\mathrm{d}x = 0.$$

证毕.

推论 13.3.1 在定理 13.3.1 的条件下, 存在常数 $C>0$ 使成立

$$|a_n| \leqslant Cn^{-m}, \qquad |b_n| \leqslant Cn^{-m}, \qquad n=1,2,\cdots.$$

推论 13.3.1 告诉我们函数 f 越光滑, 它的傅里叶系数 a_n 和 b_n 当 $n\to\infty$ 时收敛于零的速度越快. 如果 f 的 m 阶导数 $f^{(m)}$ 不仅是可积函数, 而且还是赫尔德连续函数, 那么推论 13.3.1 中的估计式可以进一步改进. 这就是下述定理

定理 13.3.2 设 m 是一个非负整数, $0<\alpha\leqslant 1$. 又设 f 是 2π 周期函数, 在整个直线 $(-\infty,+\infty)$ 上有 m 阶导数, 且 m 阶导数在整个直线 $(-\infty,+\infty)$ 上一致 α 阶赫尔德连续, 即存在常数 $C>0$ 使得

$$|f^{(m)}(x)-f^{(m)}(y)|\leqslant C|x-y|^{\alpha},\qquad \forall x,y\in(-\infty,+\infty)$$

(当 $m=0$ 时, 这意味着函数 f 本身在整个直线 $(-\infty,+\infty)$ 上一致 α 阶赫尔德连续), 则存在常数 $C'>0$ 使成立

$$|a_n|\leqslant C'n^{-m-\alpha},\qquad |b_n|\leqslant C'n^{-m-\alpha},\qquad n=1,2,\cdots.$$

证明 根据式 (13.3.1) 和引理 13.1.2, 我们有

$$\begin{aligned}
a_n&=\frac{1}{n^m\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^{(m)}(x)\cos\Big(nx+\frac{m\pi}{2}\Big)\mathrm{d}x\\
&=-\frac{1}{n^m\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^{(m)}(x)\cos\Big[n\Big(x+\frac{\pi}{n}\Big)+\frac{m\pi}{2}\Big]\mathrm{d}x\\
&=-\frac{1}{n^m\pi}\int_{-\pi+\frac{\pi}{n}}^{\pi+\frac{\pi}{n}}f^{(m)}\Big(t-\frac{\pi}{n}\Big)\cos\Big(nt+\frac{m\pi}{2}\Big)\mathrm{d}t\\
&=-\frac{1}{n^m\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^{(m)}\Big(x-\frac{\pi}{n}\Big)\cos\Big(nx+\frac{m\pi}{2}\Big)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

把上式与式 (13.3.1) 相加再除以 2, 就得到

$$a_n=\frac{1}{2n^m\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big[f^{(m)}(x)-f^{(m)}\Big(x-\frac{\pi}{n}\Big)\Big]\cos\Big(nx+\frac{m\pi}{2}\Big)\mathrm{d}x.$$

因此

$$|a_n|\leqslant\frac{1}{2n^m\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big|f^{(m)}(x)-f^{(m)}\Big(x-\frac{\pi}{n}\Big)\Big|\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2n^m\pi}\cdot 2\pi C\Big(\frac{\pi}{n}\Big)^{\alpha}=C'n^{-m-\alpha},$$

其中 $C'=C\pi^{\alpha}$. 这就证明了关于 a_n 的估计式. 关于 b_n 的估计式可类似证明. 证毕.

13.3.2 由傅里叶系数的衰减性推断函数的光滑性

前面我们证明了函数 f 越光滑, 它的傅里叶系数 a_n 和 b_n 收敛于零的速度就越快. 下面我们来证明反过来的结论: 函数 f 的傅里叶系数 a_n 和 b_n 收敛于零的速度越快, 它就越光滑.

先证明下述引理

引理 13.3.2 (变分引理) 设 f 是区间 $[a,b]$ 上的绝对可积函数, 并且对 $[a,b]$ 上任意在两个端点处都等于零的连续函数 φ 成立

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=0,\tag{13.3.3}$$

则 f 在 $[a,b]$ 上几乎处处为零.

证明　先设 f 在区间 $[a,b]$ 上黎曼可积, 则 f 也在 $[a,b]$ 上平方可积. 因此根据定理 11.3.7 知, 存在 $[a,b]$ 上在两个端点处都等于零的连续函数序列 φ_n, $n=1,2,\cdots$, 使在 $[a,b]$ 上平方平均收敛于 f, 即

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f(x)-\varphi_n(x)|^2\mathrm{d}x=0.$$

根据所设条件知

$$\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x=0,\qquad n=1,2,\cdots,$$

所以

$$\begin{aligned}\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x&=\int_a^b f(x)[f(x)-\varphi_n(x)]\mathrm{d}x\\&\leqslant\Big[\int_a^b |f(x)|^2\mathrm{d}x\Big]^{\frac{1}{2}}\Big[\int_a^b |f(x)-\varphi_n(x)|^2\mathrm{d}x\Big]^{\frac{1}{2}}\ (n=1,2,\cdots).\end{aligned}$$

由于不等式右端当 $n\to\infty$ 时趋于零, 我们就得到

$$\int_a^b |f(x)|^2\mathrm{d}x=0,$$

所以根据定理 10.5.1 知, f 在 $[a,b]$ 上几乎处处为零.

再设 f 在区间 $[a,b]$ 上绝对可积但不黎曼可积, 即 f 在 $[a,b]$ 上有有限个瑕点. 通过把区间 $[a,b]$ 作适当的分割, 我们可把它划分成有限个小区间, 使得函数 f 在每个小区间上只有一个瑕点, 且瑕点在小区间的端点处. 显然条件 (13.3.3) 也在每个小区间上成立. 因此问题化归为证明: 如果 f 在 $[a,b]$ 上有一个瑕点但绝对可积, 且瑕点在区间的端点, 并且满足条件 (13.3.3), 则 f 在 $[a,b]$ 上几乎处处等于零. 不妨设瑕点是左端点 a. 对任意 $0<\delta<b-a$ 和在区间 $[a+\delta,b]$ 上连续且在两个端点 $a+\delta$ 和 b 都等于零的函数 φ, 把它作零延拓使得成为区间 $[a,b]$ 上的连续函数, 即令 $\varphi(x)=0$, $\forall x\in[a,a+\delta)$, 则由条件 (13.3.3) 得

$$\int_{a+\delta}^b f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=0.$$

而函数 f 在 $[a+\delta,b]$ 上是黎曼可积的, 所以由已经证明的结论, 即知 f 在 $[a+\delta,b]$ 上几乎处处为零. 据此由 δ 的任意性易知 f 在 $[a,b]$ 上几乎处处为零. 证毕.

定理 13.3.3　设 f 是在 $[-\pi,\pi]$ 上绝对可积的 2π 周期函数, 并且它的傅里叶系数满足

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)<\infty,$$

则 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上与一连续函数几乎处处相等, 并且它的傅里叶级数在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛于此连续函数.

证明 应用级数一致收敛的 M 判别法, 易见在所设条件下 f 的傅里叶级数在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛. 由于级数的各项都是连续函数, 所以其和函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续. 剩下只须再证明函数 f 与这个和函数几乎处处相等. 为证明这一点, 我们用 $\widetilde{f}$ 表示 f 的傅里叶级数的和函数, 即

$$\widetilde{f}(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),\qquad \forall x\in\mathbf{R}.$$

显然, 在所设条件下右端的级数各项同乘以 $\cos mx$ 或 $\sin mx$ (m 为任意非负整数) 之后得到的级数仍然是一致收敛的. 因此通过这样处理之后再在 $[-\pi,\pi]$ 上逐项积分, 即知函数 $\widetilde{f}$ 与 f 有相同的傅里叶系数. $\widetilde{f}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续, 自然也在 $[-\pi,\pi]$ 上绝对可积, 所以我们只需证明如果两个在 $[-\pi,\pi]$ 上绝对可积的函数有相同的傅里叶系数, 则这两个函数几乎处处相等. 而这只需证明如果一个在 $[-\pi,\pi]$ 上绝对可积的函数的全部傅里叶系数都是零, 则这个函数几乎处处为零. 事实上, 如果函数 g 的全部傅里叶系数都是零, 则对任意三角多项式 $Q(x)$ 都成立

$$\int_{-\pi}^{\pi}g(x)Q(x)\mathrm{d}x=0.$$

据此可推知, 对 $[-\pi,\pi]$ 上的任意连续函数 φ 都成立

$$\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=0.\tag{13.3.4}$$

事实上, 对 $[-\pi,\pi]$ 上的任意连续函数 φ, 根据魏尔斯特拉斯第二逼近定理知, 存在三角多项式序列 $Q_k(x)$, $k=1,2,\cdots$, 使在 $[-\pi,\pi]$ 上 $Q_k(x)$ 一致收敛于 $\varphi(x)$. 由于

$$\int_{-\pi}^{\pi}g(x)Q_k(x)\mathrm{d}x=0,\qquad k=1,2,\cdots,$$

而由 $Q_k(x)$ 一致收敛于 $\varphi(x)$ 和 g 在 $[-\pi,\pi]$ 上绝对可积易知 $g(x)Q_k(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上积分平均收敛于 $g(x)\varphi(x)$, 故令 $k\to\infty$, 就得到

$$\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)Q_k(x)\mathrm{d}x=0.$$

这就证明了式 (13.3.4). 因此, 根据引理 13.3.2 知 g 在 $[-\pi,\pi]$ 上几乎处处为零, 进而由周期性, 即知 g 在 $(-\infty,+\infty)$ 上几乎处处为零. 证毕.

以下为定理的叙述简单起见, 我们将把几乎处处相等的函数视为同一个函数, 而不再对它们进行区分.

通过反复应用函数级数的逐项微分定理, 我们就有下述定理.

定理 13.3.4　设 m 是一个非负整数, f 是在 $[-\pi,\pi]$ 上绝对可积的 2π 周期函数, 它的傅里叶系数满足

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^m(|a_n|+|b_n|)<\infty,$$

则 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有连续的 m 阶导数, 并且 f 的 m 阶导数等于对其傅里叶级数逐项求 m 阶导数所得三角级数的和函数.

证明　在所给的条件下, 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^m(|a_n|+|b_n|)<\infty.$$

因此根据定理 13.3.3 知, f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续. 另外, 考虑逐项求导所得级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-na_n\sin nx+nb_n\cos nx). \tag{13.3.5}$$

如果 $m\geqslant 1$, 那么由所给的条件我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n|a_n|+n|b_n|)\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^m(|a_n|+|b_n|)<\infty.$$

据此可知级数 (13.3.5) 在 $[-\pi,\pi]$ 上一致收敛. 因此, 根据级数的逐项微分定理 (定理 11.4.7), 即知 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上、从而也就在 $(-\infty,+\infty)$ 上有一阶导数, 而且导函数等于级数 (13.3.5) 的和函数, 因此也连续. 如果 $m\geqslant 2$, 那么再考虑逐项求两阶导数所得到的级数. 类似的论证可知它也在 $[-\pi,\pi]$ 上一致收敛. 因此, f 在 $[-\pi,\pi]$ 上、从而也就在 $(-\infty,+\infty)$ 上有二阶导数, 而且二阶导函数等于逐项求二阶导数的级数的和函数, 因此也连续. 如此反复做下去, 最终可得所需要的结论. 证毕.

定理 13.3.5　设 m 是一个非负整数, $0<\alpha<1$. 又设 f 是在 $[-\pi,\pi]$ 上绝对可积的 2π 周期函数, 且它的傅里叶系数满足

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{m+\alpha}(|a_n|+|b_n|)<\infty,$$

则 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有 m 阶导数, 且 m 阶导数 α 阶赫尔德连续.

证明　在所给定的条件下, 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^m(|a_n|+|b_n|)\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^{m+\alpha}(|a_n|+|b_n|)<\infty,$$

所以根据前一个定理可知, f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有 m 阶导数, 并且 f 的 m 阶导数等于逐项求 m 阶导数所得级数的和函数, 即

$$\begin{aligned} f^{(m)}(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^{[\frac{m+1}{2}]}n^m a_n \sin nx + (-1)^{[\frac{m}{2}]}n^m b_n \cos nx\right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^m\left[a_n \cos\left(nx+\frac{m\pi}{2}\right) + b_n \sin\left(nx+\frac{m\pi}{2}\right)\right]. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} f^{(m)}(x)-f^{(m)}(y) = &\sum_{n=1}^{\infty} n^m\Big\{a_n\Big[\cos\left(nx+\frac{m\pi}{2}\right)-\cos\left(ny+\frac{m\pi}{2}\right)\Big] \\ &+b_n\Big[\sin\left(nx+\frac{m\pi}{2}\right)-\sin\left(ny+\frac{m\pi}{2}\right)\Big]\Big\} \\ = &\sum_{n=1}^{\infty} 2n^m\Big[-a_n\sin\frac{n(x+y)+m\pi}{2}+b_n\cos\frac{n(x+y)+m\pi}{2}\Big]\sin\frac{n(x-y)}{2}, \end{aligned}$$

进而

$$|f^{(m)}(x)-f^{(m)}(y)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} 2n^m(|a_n|+|b_n|)\left|\sin\frac{n(x-y)}{2}\right|.$$

现在应用不等式: 对任意 $0<\alpha\leqslant 1$ 和任意实数 x, 有

$$|\sin x| \leqslant |x|^\alpha.$$

这个不等式按以下方法获得: 如果 $|x|\leqslant 1$, 则用 $|\sin x|\leqslant|x|\leqslant|x|^\alpha$; 如果 $|x|>1$, 则用 $|\sin x|\leqslant 1<|x|^\alpha$. 于是有

$$|f^{(m)}(x)-f^{(m)}(y)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} 2n^m(|a_n|+|b_n|)\left|\frac{n(x-y)}{2}\right|^\alpha = C|x-y|^\alpha,$$

其中,

$$C = 2^{1-\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} n^{m+\alpha}(|a_n|+|b_n|) < \infty.$$

这就证明了函数 f 的 m 阶导数是 α 阶赫尔德连续的. 证毕.

推论 13.3.2 设 m 是一个非负整数, $0<\alpha\leqslant 1$. 又设 f 是在 $[-\pi,\pi]$ 上绝对可积的 2π 周期函数, 且它的傅里叶系数满足

$$|a_n| \leqslant Cn^{-(m+\alpha+1)}, \qquad |b_n| \leqslant Cn^{-(m+\alpha+1)}, \qquad n=1,2,\cdots,$$

其中 C 为常数, 则 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有 m 阶导数, 且对任意 $0<\beta<\alpha$, f 的 m 阶导数在 $(-\infty,+\infty)$ 上 β 阶赫尔德连续.

证明　在给定的条件下, 对任意 $0<\beta<\alpha$ 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{m+\beta}(|a_n|+|b_n|) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^{m+\beta}\cdot Cn^{-(m+\alpha+1)} = C\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-(\alpha-\beta)} < \infty.$$

所以根据定理 13.3.5 即得推论 13.3.2 的结论.

比较定理 13.3.2 和推论 13.3.2 我们看到, 由函数 f 具有 $m+\alpha$ 阶的光滑性 (f 有 m 阶导数且 m 阶导数 α 阶赫尔德连续), 可以推出其傅里叶系数当 $n\to\infty$ 时是以 $m+\alpha$ 阶衰减的. 但是反之, 由 f 的傅里叶系数当 $n\to\infty$ 时以 $m+\alpha$ 阶衰减, 只能推出 f 具有 $m-1+\beta$ 阶的光滑性, 其中 $0<\beta<\alpha$. 造成这一情况的原因在于从 f 具有的光滑性来推导其傅里叶系数的衰减性时, 即当 f 具有 $m+\alpha$ 阶的光滑性时, 其傅里叶系数具有比以 $m+\alpha$ 阶衰减更多的性质, 而这些性质人们目前还没有研究清楚. 同样在从 f 的傅里叶系数以 $m+\alpha$ 阶衰减来推导它具有 $m-1+\beta$ 阶光滑性时, 即 f 实际上具有比它有 $m-1+\beta$ 阶光滑性更多的性质, 而这些性质目前人们同样还没有研究清楚. 这些问题 (以及相关的问题) 具有重要的理论意义, 但是难度是巨大的.

习　题　13.3

1. 证明: 如果两个在 $[-\pi,\pi]$ 上绝对可积的 2π 周期函数具有相同的傅里叶系数, 则这两个函数几乎处处相等.
2. 引理 13.3.1 告诉我们: 只要 2π 周期函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上绝对可积, 则其傅里叶系数 a_n 和 b_n 当 $n\to\infty$ 时便收敛于零. 证明: 即使要求 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续, 这个结论也是不能再改进的, 即对任意趋于零的正数列 $\{c_n\}$, 无论它收敛于零的速度多么慢, 都存在连续的 2π 周期函数 $f(x)$, 其傅里叶系数中都有无穷多项大于这个数列的对应项.
3. 设 $f(x)$ 是 2π 周期函数, 在 $[-\pi,\pi]$ 上绝对可积. 又设 $f(x)$ 的傅里叶系数为 a_0, a_n, b_n $(n=1,2,\cdots)$. 证明:

   (1) 当 $n\geqslant 1$ 时, 对任意整数 k 都成立

   $$a_n=\frac{(-1)^k}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\left(x+\frac{k\pi}{n}\right)\mathrm{d}x,\quad b_n=\frac{(-1)^k}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin\left(x+\frac{k\pi}{n}\right)\mathrm{d}x;$$

   (2) 设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上是单调函数, 则成立不等式

   $$|a_n|\leqslant\frac{1}{2n}|f(\pi)-f(-\pi)|,\quad |b_n|\leqslant\frac{1}{2n}|f(\pi)-f(-\pi)|,\quad n=1,2,\cdots;$$

   (3) 定义在区间 $[a,b]$ 上的函数 $f(x)$ 叫做**有界变差函数**, 如果存在常数 $M>0$ 使对区间 $[a,b]$ 的任意一个分割 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$ 都成立

   $$\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|\leqslant M.$$

所有这样的 M 的下确界叫做 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的变差，记作 $\bigvee_a^b(f)$. 如果 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上具有有界变差，则成立不等式

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{2n}\bigvee_a^b(f), \quad |b_n| \leqslant \frac{1}{2n}\bigvee_a^b(f), \quad n=1,2,\cdots.$$

4. 根据上题证明本节推论 13.3.1 的下述改进，设 f 是 $m-1$ 阶可微的 2π 周期函数，且 $m-1$ 阶导数在 $[-\pi,\pi]$ 上具有有界变差，则存在常数 $C>0$ 使它的傅里叶系数满足以下不等式

$$|a_n| \leqslant Cn^{-m}, \qquad |b_n| \leqslant Cn^{-m}, \qquad n=1,2,\cdots.$$

5. (1) 设 $\{a_n\}$ 是一个单调递减趋于零的数列. 证明: 三角级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ 对所有 $x\in\mathbf{R}$ 都收敛，且其和函数 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ 在所有 $x\neq 2m\pi$ (m 表示整数) 的点处都连续.

   (2) 令
$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}(\pi-x), & 0<x<2\pi, \\ 0, & x=0,2\pi, \end{cases}$$
并把它以 2π 为周期作周期延拓. 求这个函数的傅里叶级数，并说明所得级数满足 (1) 中的条件.

6. (1) 设 $\{a_n\}$ 是一个单调递减趋于零的数列，证明: 三角级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin(2n-1)x$ 对所有 $x\in\mathbf{R}$ 都收敛，且其和函数在所有 $x\neq m\pi$ (m 表示整数) 的点处都连续;

   (2) 令
$$f(x)=\begin{cases} 1, & 0<x<\pi, \\ 0, & x=0,\pm\pi, \\ -1, & -\pi<x<0, \end{cases}$$
并把它以 2π 为周期作周期延拓，求这个函数的傅里叶级数，并说明所得级数满足 (1) 中的条件.

7. (1) 设 $\{a_n\}$ 是一个单调递减趋于零的数列，证明: 三角级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n \sin nx$ 对所有 $x\in\mathbf{R}$ 都收敛，且其和函数在所有 $x\neq(2m-1)\pi$ (m 表示整数) 的点处都连续;

(2) 把函数

$$f(x)=\begin{cases} x, & -\pi<x<\pi, \\ 0, & x=\pm\pi, \end{cases}$$

以 2π 为周期作周期延拓, 求所得函数的傅里叶级数, 并说明这个级数满足 (1) 中的条件.

8. 设 $\{a_n\}$ 是一个单调递减趋于零的数列. 证明: 三角级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上一致收敛的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n=0$.

13.4 傅里叶级数的积分平均收敛

从 13.2 节的讨论我们看到, 为了使一个函数 f 的傅里叶级数处处收敛于这个函数, f 需要满足比连续性稍强一些的条件, 如 f 是迪尼连续的. 如果 f 仅连续, 则不能保证它的傅里叶级数处处收敛于它. 但是, 在定义函数的傅里叶级数时, 我们只要求它是绝对可积的, 并没有要求它必须是连续的, 当然就更不需要它是迪尼连续的了. 换句话说, 任何一个绝对可积的函数都是有傅里叶级数的. 这自然地引出一个问题, 即对于那些仅是绝对可积而非迪尼连续的函数, 其傅里叶级数是以什么样的方式与这些函数相联系的? 考虑到这种函数仅是绝对可积的, 而且它们的傅里叶系数都是通过广义积分来计算的, 自然会想到是否绝对可积函数 f 的傅里叶级数是按积分平均的意义收敛于 f 的? 研究表明, 这个答案 "几乎" 是对的, 但不完全对. 确切地说, 如果一个 2π 周期函数 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上是 p 方可积的且 $p>1$, 则 f 的傅里叶级数 p 方平均收敛于 f; 但是如果 f 仅仅在 $[-\pi,\pi]$ 上绝对可积, 而不是对某个 $p>1$ 它 p 方可积, 那么并不能保证它的傅里叶级数按积分平均的意义收敛于它. 这个深刻的结果是由黎茨在 1927 年证明的. 本节介绍一个比较容易证明的结果: 如果 2π 周期函数 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上是平方可积的, 则 f 的傅里叶级数平方平均收敛于 f.

回忆一个 n 阶三角多项式 $T_n(x)$(只考虑周期为 2π 的三角多项式), 是指一个形如

$$T_n(x)=\frac{1}{2}c_0+\sum_{k=1}^{n}(c_k\cos kx+d_k\sin kx)$$

的表达式, 其中 $k=n$ 的项的系数 c_n 和 d_n 至少有一个是非零的. 整数 n 叫做这个三角多项式的**阶**. 相应地, 对于 2π 周期函数 f, 如果它的傅里叶级数为

$$f(x)\sim\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

那么我们把这个级数的部分和

$$S_n(f;x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

叫做 f 的傅里叶级数的n **阶部分和**. 注意由于可能出现 $a_n=b_n=0$ 的情况, 所以 n 阶部分和 $S_n(f;x)$ 作为三角多项式的阶可能只是不大于 n, 即有可能它的阶不等于 n.

定理 13.4.1 设 f 是 2π 周期函数, 在 $[-\pi,\pi]$ 上平方可积. 则在所有阶数不大于 n 的三角多项式 T_n 中, 当 T_n 取函数 f 的傅里叶级数的 n 阶部分和 $S_n(f;x)$ 时, T_n 与 f 的平方平均误差最小, 即有不等式

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-S_n(f;x)|^2\mathrm{d}x\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-T_n(x)|^2\mathrm{d}x,\tag{13.4.1}$$

其中 T_n 表示任意一个阶数不大于 n 的三角多项式.

证明 直接进行计算, 并应用三角多项式的正交性 (引理 13.3.1), 我们有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-T_n(x)|^2\mathrm{d}x&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\mathrm{d}x-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)T_n(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|T_n(x)|^2\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\mathrm{d}x-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\Big[\frac{1}{2}c_0+\sum_{k=1}^{n}(c_k\cos kx+d_k\sin kx)\Big]\mathrm{d}x\\
&\quad+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big[\frac{1}{2}c_0+\sum_{k=1}^{n}(c_k\cos kx+d_k\sin kx)\Big]^2\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\mathrm{d}x-\Big[\frac{1}{2}a_0c_0+\sum_{k=1}^{n}(a_kc_k+b_kd_k)\Big]+\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2}c_0^2+\sum_{k=1}^{n}(c_k^2+d_k^2)\Big]\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\Big]\\
&\quad+\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2}(a_0-c_0)^2+\sum_{k=1}^{n}\Big((a_k-c_k)^2+(b_k-d_k)^2\Big)\Big].
\end{aligned}$$

特别地, 取 $T_n(x)=S_n(f;x)$, 就得到

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-S_n(f;x)|^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\Big].\tag{13.4.2}$$

比较以上两个结果, 我们看到

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-T_n(x)|^2\mathrm{d}x&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\Big]\\
&\quad+\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2}(a_0-c_0)^2+\sum_{k=1}^{n}\Big((a_k-c_k)^2+(b_k-d_k)^2\Big)\Big]\\
&\geqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\Big]\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-S_n(f;x)|^2\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

这就证明了式 (13.4.1). 证毕.

定理 13.4.2 设 f 是 2π 周期函数, 在 $[-\pi,\pi]$ 上平方可积, 则 f 的傅里叶级数在 $[-\pi,\pi]$ 上平方平均收敛于 f, 即

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-S_n(f;x)|^2\mathrm{d}x=0. \tag{13.4.3}$$

证明 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 根据推论 11.3.3 知, 存在相应的三角多项式 Q 使得

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-Q(x)|^2\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

设 Q 的阶为 m. 则根据定理 13.4.1 我们有

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-S_m(f;x)|^2\mathrm{d}x\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-Q(x)|^2\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

对任意正整数 $n\geqslant m$, 把 $S_m(f;x)$ 视作阶数小于等于 n 的三角多项式, 再次应用定理 13.4.1, 就得到

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-S_n(f;x)|^2\mathrm{d}x\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-S_m(f;x)|^2\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

这就证明了式 (13.4.2). 证毕.

在 $[-\pi,\pi]$ 上平方可积的 2π 周期函数的傅里叶系数满足一个优美的恒等式. 这就是下述定理

定理 13.4.3 (帕塞瓦尔恒等式) 设 f 是 2π 周期函数, 在 $[-\pi,\pi]$ 上平方可积. 令 $a_0, a_n, b_n\ (n=1,2,\cdots)$ 为 f 的傅里叶系数, 则级数 $\dfrac{1}{2}a_0^2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$ 收敛, 且其和为 $\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\mathrm{d}x$, 即

$$\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\mathrm{d}x. \tag{13.4.4}$$

(帕塞瓦尔, Marc-Antoine Parseval, 1755–1836)

证明 在 (13.4.2) 中令 $n\to\infty$, 应用定理 13.4.2 就得到了定理 13.4.3. 证毕.

推论 13.4.1 (贝塞尔不等式) 设 f 是 2π 周期函数, 在 $[-\pi,\pi]$ 上平方可积. 令 $a_0, a_n, b_n\ (n=1,2,\cdots)$ 为 f 的傅里叶系数, 则对任意正整数 m 成立不等式

$$\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{n=1}^{m}(a_n^2+b_n^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\mathrm{d}x. \tag{13.4.5}$$

贝塞尔不等式当然也可直接从式 (13.4.2) 得到.

推论 13.4.2 设 f 和 g 是 2π 周期函数, 都在 $[-\pi,\pi]$ 上平方可积. 令 a_0, a_n, b_n $(n=1,2,\cdots)$ 和 c_0, c_n, d_n $(n=1,2,\cdots)$ 分别为 f 和 g 的傅里叶系数, 则

$$\frac{1}{2}a_0c_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_nc_n+b_nd_n)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)\mathrm{d}x. \tag{13.4.6}$$

证明 由于 f 和 g 都在 $[-\pi,\pi]$ 上平方可积, 应用柯西不等式可知

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)g(x)|\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}|g(x)|^2\mathrm{d}x,$$

说明 fg 在 $[-\pi,\pi]$ 上绝对可积. 又由帕塞瓦尔恒等式可知, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(c_n^2+d_n^2)$ 都收敛, 于是由柯西不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_nc_n+b_nd_n|\leqslant\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(c_n^2+d_n^2),$$

可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_nc_n+b_nd_n)$ 绝对收敛. 证明了这些结论, 式 (13.4.6) 便是帕塞瓦尔恒等式的直接推论. 事实上, 应用帕塞瓦尔恒等式可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)\mathrm{d}x&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)+g(x)]^2\mathrm{d}x-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\mathrm{d}x-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g(x)|^2\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}(a_0+c_0)^2+\sum_{n=1}^{\infty}[(a_n+c_n)^2+(b_n+d_n)^2]\right\}\\&\quad-\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\right\}-\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}c_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}(c_n^2+d_n^2)\right\}\\&=\frac{1}{2}a_0c_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_nc_n+b_nd_n).\end{aligned}$$

证毕.

下面给出本节结论的一个有趣的应用.

定理 13.4.4 (等周不等式) 设 C 是平面上的一条分段可微的简单闭曲线, 其周长为 L, 所包围区域的面积为 A, 则成立不等式

$$A\leqslant\frac{L^2}{4\pi},$$

而且等号成立当且仅当 C 是圆周.

在证明这个定理之前，首先对其中一些术语做些解释. 所谓 C 是平面上的一条分段可微的曲线，是指它的参数方程

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad a \leqslant t \leqslant b \tag{13.4.7}$$

中的两个函数 $x = x(t)$ 和 $x = y(t)$ 都是区间 $[a, b]$ 上的分段可微的连续函数，且在那些可微的 t 值处有 $|x'(t)|^2 + |y'(t)|^2 \neq 0$. 最后这个要求是为了保证在使 $x = x(t)$ 和 $x = y(t)$ 都可微的点处曲线是光滑的，因为仅 $x = x(t)$ 和 $x = y(t)$ 在某点 t_0 处都可微并不能保证曲线在点 $(x(t_0), y(t_0))$ 处光滑. 如曲线 $y = |x|$ 在原点不光滑，但是它的参数方程

$$x = t^3, \qquad y = |t|^3, \qquad -\infty < t < +\infty$$

却在 $t = 0$ 处 (对应于原点) 有连续的二阶导数. 其次，C 是闭曲线是指它首尾相接，即

$$x(a) = x(b), \qquad y(a) = y(b).$$

最后，C 是简单曲线是指它不自交，即对任意 $t_1, t_2 \in [a, b)$，当 $t_1 \neq t_2$ 时就有

$$(x(t_1), y(t_1)) \neq (x(t_2), y(t_2)).$$

这样 C 就包围平面上的一个区域. (图 13-4-1)

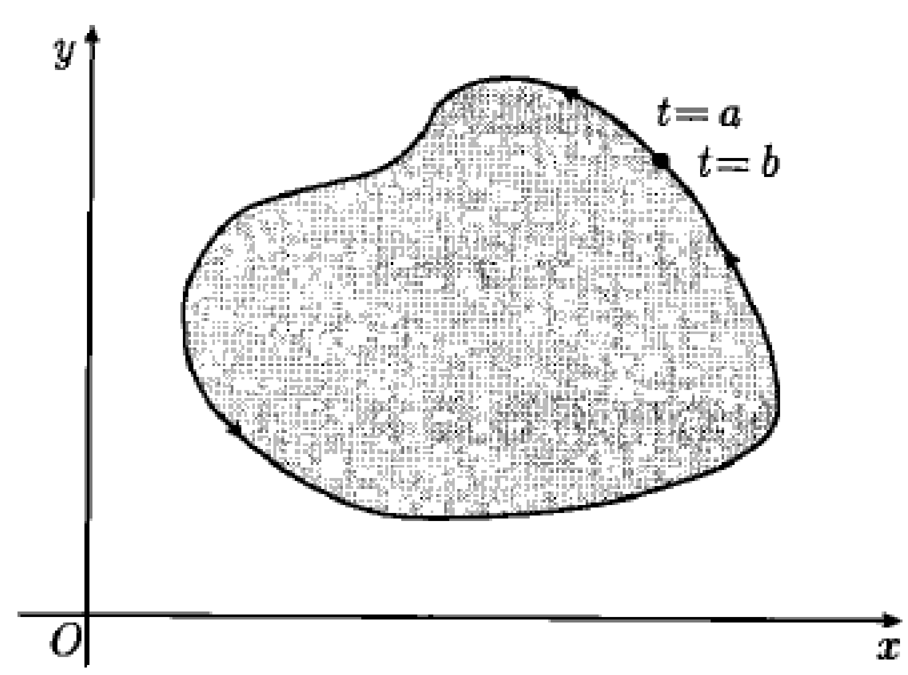


图 13-4-1　封闭曲线所围区域

定理 13.4.4 的证明　首先，通过重新定义尺度 (重新定义单位长度)，我们可设 $L = 2\pi$. 为说明这样假设的合理性，对任意正数 λ，考察 $\mathbf{R}^2$ 到自身的坐标变换

$$(x, y) \mapsto (\lambda x, \lambda y).$$

应用 8.2 节建立的曲线弧长的计算公式和平面区域面积的计算公式，易见在这个坐标变换之下，如果一条曲线的弧长为 L，则其象曲线的弧长为 λL；如果一块区域的面积为 A，则其象区域的面积为 $\lambda^2 A$. 因此，只要取 $\lambda = \dfrac{2\pi}{L}$，就把我们的问题简化为在 $L = 2\pi$ 的条件下证明 $A \leqslant \pi$.

其次，我们可设 C 的参数方程为

$$x = x(s), \qquad y = y(s), \qquad 0 \leqslant s \leqslant 2\pi,$$

其中 s 为弧长参数，即在 $x(s)$ 和 $y(s)$ 可微的 s 处成立

$$|x'(s)|^2 + |y'(s)|^2 = 1. \tag{13.4.8}$$

这是因为, 如果 C 的参数方程不满足这个条件, 那么我们可通过参数变换化为这种情况. 事实上, 设 C 的参数方程由式 (13.4.7) 给出. 令

$$\varphi(t)=\int_a^t\sqrt{|x'(\tau)|^2+|y'(\tau)|^2}\mathrm{d}\tau,\qquad a\leqslant t\leqslant b.$$

易见 φ 是区间 $[a,b]$ 上的分段可微、严格递增的连续函数, 且 $\varphi(a)=0$, $\varphi(b)=L=2\pi$, 因此值域为 $[0,2\pi]$, 所以它是 $[a,b]$ 到 $[0,2\pi]$ 的一一对应. 作参数变换 $t=\varphi^{-1}(s)$, 即令

$$\overline{x}(s)=x(\varphi^{-1}(s)),\qquad \overline{y}(s)=y(\varphi^{-1}(s)),\qquad 0\leqslant s\leqslant 2\pi,$$

则得曲线 C 的新的参数方程

$$x=\overline{x}(s),\qquad y=\overline{y}(s),\qquad 0\leqslant s\leqslant 2\pi.$$

这个参数方程的参数 s 便是弧长参数, 这是因为

$$|\overline{x}'(s)|^2+|\overline{y}'(s)|^2=\Big(|x'(\varphi^{-1}(s))|^2+|y'(\varphi^{-1}(s))|^2\Big)\cdot\frac{1}{|\varphi'(\varphi^{-1}(s))|^2}=1.$$

现在给出不等式 $A\leqslant\pi$ 的证明. 设函数 $x(s)$ 和 $y(s)$ 的傅里叶级数分别为

$$x(s)\sim\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos ns+b_n\sin ns),\qquad y(s)\sim\frac{1}{2}c_0+\sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cos ns+d_n\sin ns).$$

通过简单的计算不难知道, $x'(s)$ 和 $y'(s)$ 的傅里叶级数分别为

$$x'(s)\sim\sum_{n=1}^{\infty}(-na_n\sin ns+nb_n\cos ns),\qquad y'(s)\sim\sum_{n=1}^{\infty}(-nc_n\sin ns+nd_n\cos ns).$$

因为 $x'(s)$ 和 $y'(s)$ 都是黎曼可积的, 所以根据帕塞瓦尔恒等式和式 (13.4.8), 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^2(a_n^2+c_n^2+b_n^2+d_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[|x'(s)|^2+|y'(s)|^2]\mathrm{d}s=2.$$

应用 8.2 节建立的面积公式、推论 13.4.2、柯西不等式以及式 (13.4.8), 我们有

$$\begin{aligned}A&=\int_0^{2\pi}x(s)y'(s)\mathrm{d}s=\pi\sum_{n=1}^{\infty}(na_nd_n-nb_nc_n)\\&\leqslant\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n^2+d_n^2+b_n^2+c_n^2)\\&\leqslant\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}n^2(a_n^2+d_n^2+b_n^2+c_n^2)=\pi.\end{aligned}$$

这就证明了所期望的不等式. 为使等号成立, 上面两个不等式中的等号必须都成立. 这就必须

$$d_n = a_n, \quad c_n = -b_n, \quad \forall n \in \mathbf{N}, \qquad 且 \qquad a_n^2 + d_n^2 + b_n^2 + c_n^2 = 0, \quad 当\ n \geqslant 2.$$

根据这个条件和式 (13.4.8) 不难知道, 曲线 C 的弧长参数方程为

$$x(s) = x_0 + a\cos s + b\sin s, \qquad y(s) = y_0 - b\cos s + a\sin s, \qquad 0 \leqslant s \leqslant 2\pi,$$

其中 $a^2 + b^2 = 1$, 即 C 为圆周. 证毕.

等周不等式表明在周长相等的所有平面简单闭曲线中, 圆周围成的区域具有最大面积. 这是一个著名的几何定理. 早在古希腊时期人们就已经认识到了这个定理, 而且历史上人们曾给出过这个定理的多个证明. 但是早期的证明都不严密, 因为都假定了 "在周长相等的所有简单平面闭曲线中, 必有一条曲线所围区域的面积最小". 但是证明这个命题的难度不亚于等周不等式. 对等周不等式的第一个严格证明是由魏尔斯特拉斯在 1870 年给出的, 他采用的是变分法. 上面的证明由胡尔维兹 (Adolf Hurwitz, 1859~1919, 瑞士人) 在 1901 年给出.

习 题 13.4

1. 设 $f(x)$ 是在 $[-\pi,\pi]$ 上平方可积的 2π 周期函数. 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{b_n}{n}$ 都绝对收敛, 并且成立:

   (1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|+|b_n|}{n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3\pi}}\Big(\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{2}}$;

   (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)(\pi - x)\mathrm{d}x$.

2. 设 $f(x)$ 是连续的 2π 周期函数, 在 $(-\pi,\pi)$ 上除有限个点外处处可微, 而且导函数 $f'(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上平方可积. 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 都绝对收敛, 并且成立

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|) \leqslant \frac{1}{\sqrt{3\pi}}\Big(\int_{-\pi}^{\pi}|f'(x)|^2\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

3. 设 $f(x)$ 是具有 m 阶导数的 2π 周期函数, 而且 m 阶导函数 $f^{(m)}(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上平方可积. 令 $S_n(x)$ $(n = 0,1,2,\cdots)$ 为 $f(x)$ 的傅里叶级数的部分和序列. 其中 m 是正整数. 证明:

   (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{m}\int_{-\pi}^{\pi}|S_n^{(k)}(x) - f^{(k)}(x)|^2\mathrm{d}x = 0$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{m-1}\max\limits_{-\pi\leqslant x\leqslant\pi}|S_n^{(k)}(x)-f^{(k)}(x)|=0.$

4. 设 $f(x)$ 是连续的 2π 周期函数, 在 $(-\pi,\pi)$ 上除有限个点外处处可微, 而且导函数 $f'(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上平方可积. 证明:

(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2\pi}\Big|\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x\Big|^2+\int_{-\pi}^{\pi}|f'(x)|^2\mathrm{d}x;$

(2) 如果 $f(x)$ 以 π 为周期, 则成立更强的不等式

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2\pi}\Big|\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x\Big|^2+\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}|f'(x)|^2\mathrm{d}x.$$

5. 设 $f(x)$ 是 2π 周期函数, 在 $[-\pi,\pi]$ 上 α 阶赫尔德连续, 则当 $\alpha>\dfrac{1}{2}$ 时, 成立下述伯恩斯坦不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)\leqslant C\sup_{-\infty<x<y<+\infty}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\alpha}}.$$

其中 C 是与 $f(x)$ 无关的常数. 试按以下步骤证明这个不等式:

(1) 证明对任意正整数 m 和 n 成立下列等式

$$\begin{cases}a_n\Big(1-\cos\dfrac{n\pi}{m}\Big)+b_n\sin\dfrac{n\pi}{m}=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\Big[f(x)-f\Big(x-\frac{\pi}{m}\Big)\Big]\cos nx\mathrm{d}x,\\ -a_n\sin\dfrac{n\pi}{m}+b_n\Big(1-\cos\dfrac{n\pi}{m}\Big)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\Big[f(x)-f\Big(x-\frac{\pi}{m}\Big)\Big]\sin nx\mathrm{d}x;\end{cases}$$

(2) 应用以上等式和贝塞尔不等式证明, 对任意非负整数 k 成立不等式

$$\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}}(|a_n|^2+|b_n|^2)\leqslant\frac{C}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big[f(x)-f\Big(x-\frac{\pi}{2^{k+2}}\Big)\Big]^2\mathrm{d}x;$$

(3) 分解和式 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$ 为 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}}(|a_n|+|b_n|)$, 然后应用步骤 (2) 中的不等式和已给条件完成定理的证明.

6. 设 $0<p\leqslant\dfrac{1}{2}$, 考察级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}$. 证明: 该级数对所有实数 x 都收敛, 从而定义了一个 2π 周期函数 $f(x)$, 即该级数的和函数. 证明 $f(x)$ 在所有 $x\neq 2m\pi$ (m 为任意整数) 的点都连续, 但在每个周期区间 $[0,2\pi]$ 上都不平方可积, 当然更不黎曼可积.

7. 设 C 是平面上的一条分段可微的简单闭曲线, 其周长为 L, 所包围区域的直径为 D. 证明: 如果 C 所包围区域是凸的, 则成立不等式

$$L\leqslant\pi D.$$

但是圆周不是唯一使得等式成立的这类曲线. 如果可能, 请给出使等式成立的曲线 C 的参数方程所应满足的条件.

13.5 有限区间上的傅里叶展开

前面四节讨论了 2π 周期函数按三角函数系

$$1,\ \sin x,\ \cos x,\ \sin 2x,\ \cos 2x,\ \cdots,\ \sin nx,\ \cos nx,\ \cdots \tag{13.5.1}$$

展开的问题. 力学、物理和工程技术应用中经常遇见的, 实际上是与之相关的另一类问题: 给定区间 $[a,b]$ 上的一列函数 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, 要求把定义在 $[a,b]$ 上的任意函数 $f(x)$ 按这列函数展开, 即把 $f(x)$ 表示成下述形式的无穷级数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\varphi_n(x),\qquad x\in[a,b],$$

其中 $c_n\ (n=1,2,\cdots)$ 是由函数 $f(x)$ 和函数系 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 唯一确定的一列实数. 这类问题叫做**傅里叶展开问题**, 上面的这种展开式, 称为函数 $f(x)$ 关于函数系 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 的**傅里叶级数**或**傅里叶展开式**, 其中的系数 $c_n\ (n=1,2,\cdots)$ 叫做函数 $f(x)$ 关于函数系 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 的**傅里叶系数**.

显然, 并不是随意给定 $[a,b]$ 上的一列函数 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 之后, 都可把 $[a,b]$ 上的任意一个函数按它们展开. 问题在于当函数列 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 满足什么条件时, 才能够把 $[a,b]$ 上的任意函数 $f(x)$ 按它们展开? 这个问题的解决远超出了本课程的范围. 但是, 应用前面四节建立的 2π 周期函数的傅里叶级数理论, 我们可以对几类特殊的函数系 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, 给出上述问题的圆满解答. 由于一般的区间 $[a,b]$ 可以通过坐标平移变换化为区间 $[0,l]$, 所以为了记号简单起见, 下面我们只考虑形如 $[0,l]$ 的区间.

先来看三角函数系

$$1,\ \sin\frac{2\pi}{l}x,\ \cos\frac{2\pi}{l}x,\ \sin\frac{4\pi}{l}x,\ \cos\frac{4\pi}{l}x,\ \cdots,\ \sin\frac{2n\pi}{l}x,\ \cos\frac{2n\pi}{l}x,\ \cdots. \tag{13.5.2}$$

这个函数系是由函数系 (13.5.1) 经伸缩变换 $x\mapsto\dfrac{2\pi}{l}x$ (换函数系 (13.5.1) 中的 x 为 $\dfrac{2\pi}{l}x$) 而得到的. 由于这个伸缩变换把区间 $[0,2\pi]$ 变换为区间 $[0,l]$, 并把 2π 周期函数一一对应地变换为 l 周期函数, 而任意一个在 $[0,2\pi]$ 上平方可积的 2π 周期函数都可按函数系 (13.5.1) 展开, 所以自然地, 任意一个在 $[0,l]$ 上平方可积的 l 周期函数都可按函数系 (13.5.2) 展开. 因此, 对于只定义在区间 $[0,l]$ 上的平方可积函数 $f(x)$, 只要先把它作 l 周期的延拓, 使其延拓成在整个数轴上有定义的 l 周期函数, 然后把延拓后的函数按函数系 (13.5.2) 展开, 最后再把所得到的展开式限制在区间 $[0,l]$ 上使用, 就得到了函数 $f(x)$ 按函数系 (13.5.2) 的展开式. 注意为了能够进行延拓, 需要修改函

数 $f(x)$ 在区间 $[0,l]$ 端点处的值, 使得成立 $f(0)=f(l)$, 否则就无法进行周期为 l 的延拓. 修改函数 $f(x)$ 在区间端点处的值是可行的, 因为改变函数在一个点或两个点处的值, 并不会改变该函数的傅里叶级数及其收敛性以及当傅里叶级数收敛时它在这些被改变了值的点处的和.

这样, 把前面四节证明的一系列定理结合起来应用, 就得到了下述定理

定理 13.5.1 设 $f(x)$ 是区间 $[0,l]$ 上的平方可积函数. 则 $f(x)$ 可按函数系 (13.5.2) 在积分平均的意义下展开, 即在平方平均收敛的意义下成立等式

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos\frac{2n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{2n\pi}{l}x\Big),\qquad x\in[0,l], \tag{13.5.3}$$

其中,

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{2n\pi}{l}x\mathrm{d}x,\qquad b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{2n\pi}{l}x\mathrm{d}x,\qquad n=0,1,2,\cdots.$$

上述展开式是唯一的, 并且成立帕塞瓦尔恒等式

$$\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{2}{l}\int_0^l|f(x)|^2\mathrm{d}x. \tag{13.5.4}$$

如果 $f(x)$ 在某点 $x_0\in(0,l)$ 处迪尼连续, 则式 (13.5.3) 右端的级数在点 x_0 收敛于 $f(x_0)$; 如果 $f(x)$ 在点 $x_0\in(0,l)$ 迪尼间断, 则该级数在点 x_0 收敛于 $\frac{1}{2}[f(x_0^+)+f(x_0^-)]$. 在两个端点处, 当 $f(x)$ 在这两个端点处都是迪尼连续或迪尼间断时, 则都收敛于 $\frac{1}{2}[f(0^+)+f(l^-)]$.

推论 13.5.1 设 $f(x)$ 在区间 $[0,l]$ 上迪尼连续 (赫尔德连续、利普希茨连续), 且满足条件 $f(0)=f(l)$, 则式 (13.5.3) 对每个 $x\in[0,l]$ 都成立, 即式 (13.5.3) 右端的级数在 $[0,l]$ 上逐点收敛于 $f(x)$.

再来看余弦函数系

$$1,\ \cos\frac{\pi}{l}x,\ \cos\frac{2\pi}{l}x,\ \cos\frac{3\pi}{l}x,\ \cdots,\ \cos\frac{n\pi}{l}x,\ \cdots. \tag{13.5.5}$$

它是从三角函数系 (13.5.2) 中去掉所有正弦函数 $\sin\frac{2n\pi}{l}x\ (n=1,2,\cdots)$, 而代之以余弦函数 $\cos\frac{(2n-1)\pi}{l}x\ (n=1,2,\cdots)$ 得到的. 这个函数系的特点是其中的每个函数 $\varphi_n(x)$ 都满足条件 $\varphi_n'(0)=\varphi_n'(l)=0\ (n=0,1,2,\cdots)$. 我们来证明: 区间 $[0,l]$ 上的任意平方可积函数也可按这个函数系展开. 为了证明这个结论, 我们把定义在 $[0,l]$ 上的任意函数 $f(x)$ 作偶延拓, 使其成为在 $[-l,l]$ 上定义的偶函数, 即令

$$f^*(x)=\begin{cases} f(x), & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant l,\\ f(-x), & \text{当 } -l\leqslant x<0.\end{cases}$$

与前面类似的分析可知, 区间 $[-l,l]$ 上的任意平方可积函数都可按函数系

$$1,\ \sin\frac{\pi}{l}x,\ \cos\frac{\pi}{l}x,\ \sin\frac{2\pi}{l}x,\ \cos\frac{2\pi}{l}x,\ \cdots,\ \sin\frac{n\pi}{l}x,\ \cos\frac{n\pi}{l}x,\ \cdots. \tag{13.5.6}$$

展开 (因为区间 $[-\pi,\pi]$ 经伸缩变换 $x\mapsto\frac{\pi}{l}x$ 变为区间 $[-l,l]$, 而函数系 (13.5.1) 经这个伸缩变换就变为上列函数系). 因此, 当 $f(x)$ 在 $[0,l]$ 上平方可积时, 其偶延拓 $f^*(x)$ 作为 $[-l,l]$ 上的平方可积函数, 便可按函数系 (13.5.6) 展开. 因为 $f^*(x)$ 是偶函数, 所以其展开式中所有正弦项的系数都等于零因而只剩余弦项, 且余弦项的系数为

$$A_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f^*(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x,\qquad n=0,1,2,\cdots.$$

因此在积分平均的意义下成立展开式

$$f^*(x)=\frac{1}{2}A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\frac{n\pi}{l}x,\qquad x\in[-l,l].$$

把 x 限制在区间 $[0,l]$ 上, 就得到了 $f(x)$ 的展开式.

我们把这个结果写成下述定理

定理 13.5.2 设 $f(x)$ 是区间 $[0,l]$ 上的平方可积函数. 则 $f(x)$ 可按余弦函数系 (13.5.5) 在积分平均的意义下展开, 即在平方平均收敛的意义下成立等式

$$f(x)=\frac{1}{2}A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\frac{n\pi}{l}x,\qquad x\in[0,l], \tag{13.5.7}$$

其中

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x,\qquad n=0,1,2,\cdots. \tag{13.5.8}$$

式 (13.5.8) 是唯一的, 并且成立帕塞瓦尔恒等式

$$\frac{1}{2}A_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}A_n^2=\frac{2}{l}\int_0^l|f(x)|^2\mathrm{d}x. \tag{13.5.9}$$

如果 $f(x)$ 在某点 $x_0\in(0,l)$ 处迪尼连续, 则式 (13.5.7) 右端的级数在点 x_0 收敛于 $f(x_0)$; 如果 $f(x)$ 在点 $x_0\in(0,l)$ 迪尼间断, 则该级数在点 x_0 收敛于 $\frac{1}{2}[f(x_0^+)+f(x_0^-)]$ (在后一种情况下, 当 x_0 是端点时, 如果 $x_0=0$ 则应改为 $f(0^+)$; 如果 $x_0=l$ 则应改为 $f(l^-)$).

证明 展开式 (13.5.7) 的存在性已在前面证明. 帕塞瓦尔恒等式 (13.5.9) 也可从关于函数 $f^*(x)$ 的帕塞瓦尔恒等式直接推出, 具体的推导留给读者. 下面我们证明展开式 (13.5.7) 的唯一性, 即证明当展开式 (13.5.7) 按平方平均的意义成立时 (右端级

数的部分和序列平方平均收敛于左端的 $f(x)$), 其中的系数 A_n $(n=0,1,2,\cdots)$ 只能是式 (13.5.8). 简单的计算表明余弦函数系 (13.5.5) 是正交系, 即

$$\int_0^l \cos\frac{m\pi}{l}x\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x=0,\quad 当\ m\neq n,\quad m,n=0,1,2,\cdots.$$

因此, 对式 (13.5.7) 两端同乘以 $\cos\frac{m\pi}{l}x$ 后再积分, 就得到

$$\int_0^l f(x)\cos\frac{m\pi}{l}x\mathrm{d}x=A_m\int_0^l\cos^2\frac{m\pi}{l}x\mathrm{d}x=\frac{l}{2}A_m,\quad 当\ m\geqslant 1,$$

和

$$\int_0^l f(x)\mathrm{d}x=\frac{l}{2}A_0.$$

可见式 (13.5.8) 成立. 证毕.

推论 13.5.2 设 $f(x)$ 在区间 $[0,l]$ 上迪尼连续 (赫尔德连续、利普希茨连续). 则式 (13.5.7) 对每个 $x\in[0,l]$ 都成立, 即式 (13.5.7) 右端的级数在 $[0,l]$ 上逐点收敛于 $f(x)$.

展开式 (13.5.7) 叫做函数 $f(x)$ 的**余弦展开**.

对应于余弦展开, 我们还有正弦展开, 它是区间 $[0,l]$ 上的函数按正弦函数系

$$\sin\frac{\pi}{l}x,\ \sin\frac{2\pi}{l}x,\ \sin\frac{3\pi}{l}x,\ \cdots,\ \sin\frac{n\pi}{l}x,\ \cdots \tag{13.5.10}$$

的展开式. 注意这个函数系是从三角函数系 (13.5.2) 中去掉常值函数 1 及所有余弦函数 $\cos\frac{2n\pi}{l}x$ $(n=1,2,\cdots)$, 而代之以正弦函数 $\sin\frac{(2n-1)\pi}{l}x$ $(n=1,2,\cdots)$ 得到的. 这个函数系的特点是其中的每个函数 $\varphi_n(x)$ 都满足条件 $\varphi_n(0)=\varphi_n(l)=0$ $(n=1,2,\cdots)$. 我们来证明区间 $[0,l]$ 上的任意平方可积函数也可按这个函数系展开. 为了证明这个结论, 我们只需对 $[0,l]$ 上的任意函数 $f(x)$ 作奇延拓, 使其成为在 $[-l,l]$ 上定义的奇函数, 即令

$$f^*(x)=\begin{cases} f(x), & 当\ 0<x<l,\\ 0, & 当\ x=0,\pm l,\\ -f(-x), & 当\ -l<x<0,\end{cases}$$

然后考虑函数 $f^*(x)$ 按函数系 (13.5.6) 的展开即可. 因为推导过程与余弦展开类似, 这里我们只写出结果.

定理 13.5.3 设 $f(x)$ 是区间 $[0,l]$ 上的平方可积函数. 则 $f(x)$ 可按正弦函数系 (13.5.10) 在积分平均的意义下展开, 即在平方平均收敛的意义下成立等式

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi}{l}x,\qquad x\in[0,l], \tag{13.5.11}$$

其中

$$B_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x, \qquad n=1,2,\cdots.$$

上述展开式是唯一的, 并且成立下述帕塞瓦尔恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 = \frac{2}{l}\int_0^l |f(x)|^2\mathrm{d}x. \tag{13.5.12}$$

如果 $f(x)$ 在某点 $x_0\in(0,l)$ 处迪尼连续, 则式 (13.5.10) 右端的级数在点 x_0 收敛于 $f(x_0)$; 如果 $f(x)$ 在点 $x_0\in(0,l)$ 迪尼间断, 则该级数在点 x_0 收敛于 $\frac{1}{2}[f(x_0^+)+f(x_0^-)]$. 在区间 $[0,l]$ 的两个端点处, 当 $f(x)$ 在这两个端点都是迪尼连续或迪尼间断时, 都收敛于 0.

证明 展开式 (13.5.11) 的存在性已在前面证明. 这个展开式唯一性的证明与前一定理的证明类似, 只需注意正弦函数系 (13.5.10) 也是正交系, 即成立

$$\int_0^l \sin\frac{m\pi}{l}x\sin\frac{n\pi}{l}xdx=0, \quad 当\ m\neq n, \quad m,n=1,2,\cdots.$$

帕塞瓦尔恒等式 (13.5.12) 可从关于函数 $f^*(x)$ 的帕塞瓦尔恒等式直接推出. 具体的推导细节留给读者. 证毕.

推论 13.5.3 设 $f(x)$ 在区间 $[0,l]$ 上迪尼连续 (赫尔德连续、利普希茨连续), 且满足条件 $f(0)=f(l)=0$, 则式 (13.5.11) 对每个 $x\in[0,l]$ 都成立, 即式 (13.5.11) 右端的级数在 $[0,l]$ 上逐点收敛于 $f(x)$.

展开式 (13.5.11) 叫做函数 $f(x)$ 的**正弦展开**.

注意推论 13.5.2 对函数 $f(x)$ 在区间 $[0,l]$ 端点的取值没有任何限制, 而推论 13.5.3 则要求函数 $f(x)$ 在 $[0,l]$ 的两个端点都等于零. 有这样的差别是因为当 $f(x)$ 在 $[0,l]$ 上连续时, 对它作偶延拓得到的函数 $f^*(x)$ 不仅在 $[-l,l]$ 上连续, 而且还满足条件 $f^*(-l)=f^*(l)$, 因此再作周期延拓时, 得到的函数是在整个数轴上连续的周期函数. 但是对 $f(x)$ 作奇延拓则不同, 如果 $f(0)\neq 0$, 则作奇延拓得到的函数 $f^*(x)$ 在点 $x=0$ 是间断的. 所以为了保证 $f^*(x)$ 在点 $x=0$ 连续, 就必须要求 $f(0)=0$. 又如果 $f(l)\neq 0$, 则对 $f^*(x)$ 作周期延拓时, 得到的函数便在所有形如 $x=\pm(2k-1)l$ (k 表示正整数) 的点是间断的, 所以为了保证 $f^*(x)$ 在这些点连续, 就必须要求 $f(l)=0$.

应用正弦展开和余弦展开, 我们还可得到 $[0,l]$ 上的函数关于另外两个函数系的傅里叶展开. 第一个函数系是

$$\sin\frac{\pi}{2l}x,\ \sin\frac{3\pi}{2l}x,\ \sin\frac{5\pi}{2l}x,\ \cdots,\ \sin\frac{(2n-1)\pi}{2l}x,\ \cdots. \tag{13.5.13}$$

这个函数系的特点是其中的每个函数 $\varphi_n(x)$ 都满足条件 $\varphi_n(0)=\varphi_n'(l)=0$ $(n=1,2,\cdots)$. 我们来证明区间 $[0,l]$ 上的任意平方可积函数也可按这个函数系展开. 为证

明这个结论, 我们对 $[0,l]$ 上的任意函数 $f(x)$ 按以下方法作延拓, 使其成为在 $[0,2l]$ 上的函数. 令

$$f^*(x)=\begin{cases} f(x), & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant l,\\ f(2l-x), & \text{当 } l<x\leqslant 2l.\end{cases}$$

然后对延拓后的函数作正弦展开, 则得

$$f^*(x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n^*\sin\frac{n\pi}{2l}x,\qquad x\in[0,2l], \tag{13.5.14}$$

其中

$$B_n^*=\frac{1}{l}\int_0^{2l}f^*(x)\sin\frac{n\pi}{2l}x\mathrm{d}x,\qquad n=1,2,\cdots.$$

由于当 $l<x\leqslant 2l$ 时 $f^*(x)=f(2l-x)$, 所以

$$\begin{aligned}
B_n^*&=\frac{1}{l}\int_0^{2l}f^*(x)\sin\frac{n\pi}{2l}x\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{l}\int_0^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{2l}x\mathrm{d}x+\frac{1}{l}\int_l^{2l}f(2l-x)\sin\frac{n\pi}{2l}x\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{l}\int_0^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{2l}x\mathrm{d}x+\frac{1}{l}\int_0^{l}f(x)\sin\left(n\pi-\frac{n\pi}{2l}x\right)\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{l}\int_0^{l}f(x)\left[\sin\frac{n\pi}{2l}x+(-1)^{n-1}\sin\frac{n\pi}{2l}x\right]\mathrm{d}x\\
&=\begin{cases}\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^{l}f(x)\sin\frac{(2m-1)\pi}{2l}x\mathrm{d}x, & \text{当 } n=2m-1,\\[2ex] 0, & \text{当 } n=2m.\end{cases}
\end{aligned}$$

把此结果代入式 (13.5.14), 然后把 x 限制在区间 $[0,l]$ 上, 就得到

$$f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}C_m\sin\frac{(2m-1)\pi}{2l}x,\qquad x\in[0,l], \tag{13.5.15}$$

其中

$$C_m=\frac{2}{l}\int_0^{l}f(x)\sin\frac{(2m-1)\pi}{2l}x\mathrm{d}x,\qquad m=1,2,\cdots. \tag{13.5.16}$$

因此, 应用定理 13.5.3 我们就得到了定理 13.5.4.

定理 13.5.4 设 $f(x)$ 是区间 $[0,l]$ 上的平方可积函数. 则 $f(x)$ 可按函数系 (13.5.13) 在积分平均的意义下展开, 即在平方平均收敛的意义下成立等式 (13.5.15),

其中的系数 C_m 由式 (13.5.16) 给出. 式 (13.5.16) 是唯一的, 并且成立下述帕塞瓦尔恒等式

$$\sum_{m=1}^{\infty} C_m^2 = \frac{2}{l}\int_0^l |f(x)|^2 \mathrm{d}x. \tag{13.5.17}$$

如果 $f(x)$ 在某点 $x_0 \in (0,l)$ 处迪尼连续, 则式 (13.5.14) 右端的级数在点 x_0 收敛于 $f(x_0)$. 如果 $f(x)$ 在点 $x_0 \in (0,l)$ 迪尼间断, 则该级数在点 x_0 收敛于 $\frac{1}{2}[f(x_0^+)+f(x_0^-)]$. 在区间 $[0,l]$ 的两个端点处, 当 $f(x)$ 在这两个端点都是迪尼连续或迪尼间断时, 在左端点 $x=0$ 处收敛于 0, 在右端点 $x=l$ 处收敛于 $f(l^-)$.

证明　展开式 (13.5.15) 的存在性已在前面证明. 这个展开式唯一性的证明与前一定理的证明类似, 只须注意函数系 (13.5.13) 也是正交系, 即

$$\int_0^l \sin\frac{(2m-1)\pi}{2l}x \sin\frac{(2n-1)\pi}{2l}x\mathrm{d}x = 0, \quad 当\ m \neq n, \quad m,n = 1,2,\cdots.$$

帕塞瓦尔恒等式 (13.5.17) 可从关于函数 $f^*(x)$ 的帕塞瓦尔恒等式直接推出. 具体的推导细节留给读者. 证毕.

推论 13.5.4　设 $f(x)$ 在区间 $[0,l]$ 上迪尼连续 (赫尔德连续、利普希茨连续), 且满足条件 $f(0)=0$. 则式 (13.5.15) 对每个 $x\in[0,l]$ 都成立, 即式 (13.5.15) 右端的级数在 $[0,l]$ 上逐点收敛于 $f(x)$.

第二个函数系是

$$\cos\frac{\pi}{2l}x,\ \cos\frac{3\pi}{2l}x,\ \cos\frac{5\pi}{2l}x,\ \cdots,\ \cos\frac{(2n-1)\pi}{2l}x,\ \cdots. \tag{13.5.18}$$

这个函数系的特点是其中的每个函数 $\varphi_n(x)$ 都满足条件 $\varphi_n'(0)=\varphi_n(l)=0$ $(n=1,2,\cdots)$. 由于这个函数系是由函数系 (13.5.12) 作坐标变换 $x\mapsto l-x$ 得到的, 所以应用定理 13.5.4 便可很容易地证明区间 $[0,l]$ 上的任意平方可积函数也可按这个函数系展开. 具体的定理陈述及其证明留给读者.

需要说明的是虽然上面几个展开定理, 都只保证了区间 $[0,l]$ 上的平方可积函数按这些函数系展开的可行性, 但在本章一开始我们就已经指出, 黎茨定理保证了对任意 $p>1$, 在区间 $[0,2\pi]$ 上 p 方可积的 2π 周期函数都可按三角函数系 (13.5.1) 在 p 方平均收敛的意义下展开. 应用这个定理并采用以上各个定理的证明思想, 即可证明这些定理中的条件 "$f(x)$ 是区间 $[0,l]$ 上的平方可积函数" 都可减弱为 "$f(x)$ 是区间 $[0,l]$ 上的 p 方可积函数且 $p>1$". 当然, 这时各个定理的结论也需要相应地作修改.

还需说明的是, 上面讨论的几个函数系, 仅是函数能够作傅里叶展开的最简单的几个函数系, 远不是这类函数系的全部. 对于函数按其他函数系作傅里叶展开的问题, 必须使用更深入的数学理论才能解决, 只有留待后续课程再学习.

下面我们举例说明前面介绍的傅里叶展开定理在物理中的应用. 为此先简单介绍一下二元函数及其偏导数的概念.

含有两个自变元的函数叫做**二元函数**. 例如, 矩形的面积公式 $S = ab$ (其中 a 和 b 分别表示矩形的长和宽) 和圆锥的体积公式 $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ (其中 r 为圆锥的底面半径, h 为圆锥的高) 等都是二元函数. 对于矩形的面积公式 $S = ab$, 两个自变元分别是 a 和 b; 对于圆锥的体积公式 $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, 两个自变元分别是 r 和 h. 我们用 $z = f(x, y)$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ 等符号表示一般的二元函数, 其中 x 和 y 是两个自变元, 而 z, u, v 等都是因变元. 把二元函数 $u = u(x, y)$ 的一个自变元如 y 固定, 而求它关于另外一个自变元 x 的导数, 叫做这个二元函数关于自变元 x 的**偏导数**. 当然也可以把自变元 x 固定, 而求它关于自变元 y 的偏导数. 函数 $u = u(x, y)$ 关于自变元 x 的一阶偏导数、二阶偏导数、三阶偏导数等分别记作 $\frac{\partial u}{\partial x}$、$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$、$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ 等; 它关于自变元 y 的一阶偏导数、二阶偏导数、三阶偏导数等分别记作 $\frac{\partial u}{\partial y}$、$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$、$\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}$ 等. 关于二元函数以及更一般的多元函数及其偏导数的概念, 我们将在本教程的下册学习, 这里不再做更多的讨论.

含有未知函数偏导数的函数方程叫做**偏微分方程**. 傅里叶级数在求解偏微分方程时有重要的应用. 下面的例 1 是应用傅里叶级数求解偏微分方程的一个典型例子.

例 1 (热传导问题) 设有长度为 l 的一条线段, 放置在区间 $[0, l]$ 上. 给这条线段加温一段时间之后撤去热源, 然后让它自然冷却. 假如在撤去热源时测得线段上的温度函数为 $u = u_0(x)$, 并且线段的两端是绝热的, 而线段内各点散热的速度与该点处的温度成正比, 比例系数为常数 c. 求该线段在任意时刻 $t > 0$ 的温度函数 $u = u(x, t)$.

解 线段上的各点除了向线段所处周围媒质散热外, 还伴有温度高的点向线段上周围温度低的点进行热量传递的现象, 称为**热传导**. 物理学告诉我们, 函数 $u = u(x, t)$ 满足下述偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - cu, \quad 0 < x < l, \ t > 0, \tag{13.5.19}$$

其中 a 是一个正常数, 叫做**导热系数**. 由于线段的两端是绝热的, 所以 $u = u(x, t)$ 在区间 $[0, l]$ 的两个端点满足以下边界条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0, \quad t > 0. \tag{13.5.20}$$

此外, 我们还有下述初值条件

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \tag{13.5.21}$$

所以, 给定的问题便是求方程 (13.5.19) 在条件 (13.5.20) 和条件 (13.5.21) 下的解.

考虑到边界条件 (13.5.20), 我们把待求的解 $u = u(x, t)$ 作余弦展开, 即设

$$u(x, t) = \frac{1}{2}A_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \cos\frac{n\pi}{l}x, \quad x \in [0, l], \ t \geqslant 0,$$

其中 $A_n(t)$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 为待定函数. 暂不考虑运算的合理性, 逐项求导, 得

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2}A_0'(t)+\sum_{n=1}^{\infty}A_n'(t)\cos\frac{n\pi}{l}x,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2A_n(t)\cos\frac{n\pi}{l}x.$$

把这些表达式连同 $u(x,t)$ 本身的表达式一起代入方程 (13.5.19), 就得到

$$\frac{1}{2}A_0'(t)+\sum_{n=1}^{\infty}A_n'(t)\cos\frac{n\pi}{l}x=-\frac{1}{2}cA_0(t)-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{an^2\pi^2}{l^2}+c\right)A_n(t)\cos\frac{n\pi}{l}x.$$

根据定理 13.5.2 所保证的余弦展开的唯一性, 为使上式成立, 等式两端各项的系数应对应相等, 所以得到

$$A_n'(t)=-\left(\frac{an^2\pi^2}{l^2}+c\right)A_n(t),\qquad n=0,1,2,\cdots.$$

解此微分方程得

$$A_n(t)=A_n(0)\mathrm{e}^{-\left(\frac{an^2\pi^2}{l^2}+c\right)t},\qquad n=0,1,2,\cdots.$$

现在只需要定下系数 $A_n(0)$ 即可. 把 $u(x,t)$ 的表达式代入初值条件 (13.5.21), 得

$$u(x,0)=\frac{1}{2}A_0(0)+\sum_{n=1}^{\infty}A_n(0)\cos\frac{n\pi}{l}x=u_0(x),\quad x\in[0,l].$$

这说明 $A_n(0)$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 是函数 $u_0(x)$ 的余弦展开的傅里叶系数, 所以

$$A_n(0)=\frac{2}{l}\int_0^l u_0(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x,\qquad n=0,1,2,\cdots.$$

因此

$$A_n(t)=\frac{2}{l}\left(\int_0^l u_0(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x\right)\mathrm{e}^{-\left(\frac{an^2\pi^2}{l^2}+c\right)t},\qquad n=0,1,2,\cdots.$$

这样就求得了所给问题的解如下

$$u(x,t)=\frac{1}{2}a_0\mathrm{e}^{-ct}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\mathrm{e}^{-\left(\frac{an^2\pi^2}{l^2}+c\right)t}\cos\frac{n\pi}{l}x,\quad x\in[0,l],\ \ t\geqslant 0,$$

其中 $a_n=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l u_0(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x$, $n=0,1,2,\cdots$.

为了说明上面得到的表达式确实是所给问题的解, 就必须证明前面所做的逐项求导运算是合理的. 这的确是对的, 原因在于对任意 $\delta>0$, $u(x,t)$ 本身的级数以及对它逐项求各阶导数的级数关于 $0\leqslant x\leqslant l$ 和 $t\geqslant\delta$ 都一致收敛. 因此根据函数级数的逐项微分定理, $u(x,t)$ 在 $t>0$ 时可关于 x 和 t 求任意阶的导数, 而且这些求导运算都可与求无穷和的运算 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}$ 交换次序.

类似于方程 (13.5.19) 以及比它更复杂的其他形式的偏微分方程, 在力学、物理学的许多领域大量出现, 并且是弹性力学、流体力学、电动力学、量子力学、热学、光学、广义相对论等学科领域的核心研究对象. 然而, 在傅里叶之前, 除了一阶偏微分方程和极个别特殊的二阶及以上的这类方程 (前面提到的各个学科中出现的都是二阶的这类方程) 之外, 人们不知道该如何一般地求解它们. 上例的方法可以推广来解决这些方程的求解问题. 正是由于这个原因, 傅里叶级数理论以及由此发展起来的傅里叶分析理论在上述学科领域有广泛的应用.

习　题　13.5

1. 设 $w(x)$ 是 $[a,b]$ 上的非负平方可积函数, $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $[a,b]$ 上的一列可积函数, 它们满足以下条件
$$\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)w(x)\mathrm{d}x = 0, \qquad \text{当}\ \ m \neq n.$$
证明: 如果 $[a,b]$ 上的平方可积函数 $f(x)$ 可以按函数列 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 展开, 则展开式是唯一的.
2. 把周期函数 $f(x) = x - [x]$ 展开成傅里叶级数.
3. 硅可控整流电压函数 $E(t)$ 是 $\dfrac{2\pi}{\omega}$ 周期函数, 在一个周期区间 $\left[-\dfrac{\pi}{\omega}, \dfrac{\pi}{\omega}\right]$ 中由下式给出
$$E(t) = \begin{cases} 0, & \text{当}\ -\dfrac{\pi}{\omega} \leqslant t \leqslant \dfrac{\alpha\pi}{\omega}, \\ E_0 \sin\omega t, & \text{当}\ \dfrac{\alpha\pi}{\omega} < t \leqslant \dfrac{\pi}{\omega}. \end{cases}$$
其中 α 和 E_0 都是常数且 $0 < \alpha < 1$, α 叫做整流参数. 求 $E(t)$ 的傅里叶级数展开.
4. 按指定的条件把函数 $f(x) = x$ 在区间 $[0,l]$ 上展开成傅里叶级数, 并说明这些傅里叶级数的点态和函数都是什么函数:
   (1) 按三角函数系 (13.5.2) 展开;
   (2) 展开成余弦级数;
   (3) 展开成正弦级数;
   (4) 按函数系 (13.5.13) 展开;
   (5) 按函数系 (13.5.18) 展开.
5. 应用函数的傅里叶展开, 求下列微分方程边值问题的解:
   (1) $\begin{cases} y''(x) + y(x) = \sin^3 \pi x - \sin \pi x, \ \ 0 < x < 1, \\ y(0) = y(1) = 0; \end{cases}$
   (2) $\begin{cases} y''(x) - 2y(x) = 4\cos^3 \pi x - 2\sin^2 \pi x, \ \ 0 < x < 1, \\ y'(0) = y'(1) = 0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} y''(x)+2\pi y(x)=2\sin\dfrac{\pi x}{2}, & 0<x<1, \\ y(0)=y'(1)=0; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} y''(x)-\pi^2 y(x)=f(x), & 0<x<1, \\ y'(0)=y(1)=0. \end{cases}$

其中 $f(x)$ 是区间 $[0,1]$ 上的任意二阶连续可微函数.

6. 求解下列微分方程的特征值问题

$$\begin{cases} y''(x)=\lambda y(x), & 0<x<l, \\ y(0)=y(l)=0, \end{cases}$$

即求那些使上述问题有非零解的实数 λ 及相应的非零解 $y(x)$. 有非零解的实数 λ 叫特征值, 相应的非零解 $y(x)$ 叫特征函数.

7. (弦振动问题) 有弹性的线段叫做弦. 设有一条长度为 l 的弦, 绷紧后把两端固定 (这时称弦处于平衡位置), 然后稍微拉动使其上各点离开平衡位置一个微小的距离, 则在放开之后, 弦便不停地上下振动. 设该弦在处于平衡位置时占据了区间 $[0,l]$, 而在开始振动之后的时刻 t, 坐标为 x 的点离开平衡位置的位移为 $u=u(x,t)$. 应用力学原理可以推出, 函数 $u=u(x,t)$ 满足下列偏微分方程和初值与边值条件

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0<x<l,\ t>0, \\ u(0,t)=u(l,t)=0, & t>0, \\ u(x,0)=u_0(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=u_1(x), & 0\leqslant x\leqslant l. \end{cases}$$

其中, a 是只与作成该弦的材料有关的正常数, $u_0(x)$ 是弦开始振动时坐标为 x 的点离开平衡位置的位移, $u_1(x)$ 是弦开始振动时坐标为 x 的点的速度, 它们都是已知函数. 上述方程叫弦振动方程. 试应用函数的傅里叶展开理论, 求上述问题的解. 已知二阶微分方程

$$y''(t)+\lambda y(t)=0$$

在常数 $\lambda>0$ 时的通解为 $y(t)=A\cos\sqrt{\lambda}t+B\sin\sqrt{\lambda}t$, 其中 A,B 为任意常数.

8. 对例 1 给出的热传导问题的解 $u=u(x,t)$, 证明下列结论:

(1) 当 $c>0$ 时 $\lim\limits_{t\to+\infty}u(x,t)=0$, $\forall x\in[0,l]$, 即线段上的热量最终全部散尽;

(2) 当 $c=0$ 时 $\lim\limits_{t\to+\infty}u(x,t)=\dfrac{1}{2}a_0$, $\forall x\in[0,l]$, 其中 $a_0=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l u_0(x)\mathrm{d}x$, 即线段上的热量最终均匀地分布到了整个线段上, 使得线段上各点的温度都相同.

综 合 习 题

1. 已知有界闭区间上的单调函数都是可积函数. 设 $f(x)$ 是区间 [0,1] 上的单调递减函数. 证明: 对任意 $\alpha \in (0,1)$ 成立

$$\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x \geqslant \alpha \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 且 $f(x) \geqslant 0, \forall x \in [a,b]$. 证明:

$$\int_a^b x^2 f(x)\mathrm{d}x + ab\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant (a+b)\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x.$$

3. 证明下列估计式:

(1) $\dfrac{\pi^2}{9} \leqslant \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin x}\mathrm{d}x \leqslant \frac{\pi^2}{6}$;　　(2) $\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}} \leqslant \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2-\sin^2 x}} \leqslant \frac{\pi}{2}$;

(3) $1+2\sqrt{2} \leqslant \displaystyle\int_1^4 \sqrt[x]{x}\mathrm{d}x \leqslant \sqrt{2}+2\sqrt[e]{\mathrm{e}}$.

4. 对于定义在同一区间 I 上的两个函数 f 和 g, 如果成立

$$[f(x)-f(y)][g(x)-g(y)] \geqslant 0, \qquad \forall x,y \in I,$$

则称它们在 I 上是**同调**的; 如果相反的不等式成立, 则称它们在 I 上是**反调**的. 如 $f(x)$ 和 $cf(x)$ $(c>0)$ 是同调的, $|f(x)|$ 和 $|f(x)|^p$ $(p>0)$ 是同调的. 更一般地, 如果 F 是单调递增函数且定义域包含 f 的值域, 则 $f(x)$ 和 $F(f(x))$ 是同调的. 而如果 F 是单调递减函数, 则 $f(x)$ 和 $F(f(x))$ 是反调的. 证明:

(1) 如果 f 和 g 都在区间 $[a,b]$ 上可积且同调, 则成立切比雪夫不等式

$$\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right) \leqslant (b-a)\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x,$$

如果 f 和 g 都在区间 $[a,b]$ 上可积且反调, 则成立相反的不等式;

(2) 如果 f 是 $[a,b]$ 上的单调递增函数, 则成立不等式

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x;$$

(3) 如果 f 在 $[a,b]$ 上可积, 则对任意 $p>0$ 和 $q>0$ 成立不等式

$$\left(\int_a^b |f(x)|^p\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b |f(x)|^q\mathrm{d}x\right) \leqslant (b-a)\int_a^b |f(x)|^{p+q}\mathrm{d}x;$$

(4) 如果 f 在 $[a,b]$ 上可积且恒取正值, 则对任意 $q \geqslant p > 0$ 成立不等式

$$\int_a^b f^p(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{b-a}\Big(\int_a^b f^q(x)\mathrm{d}x\Big)\Big(\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{f^{q-p}(x)}\Big);$$

(5) 如果 f 和 g 都在 $[a,b]$ 上可积且同调, 则对 $[a,b]$ 上的任意非负可积函数 w 成立下列形式的切比雪夫不等式

$$\Big(\int_a^b f(x)w(x)\mathrm{d}x\Big)\Big(\int_a^b g(x)w(x)\mathrm{d}x\Big) \leqslant \Big(\int_a^b w(x)\mathrm{d}x\Big)\Big(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\Big).$$

如果 f 和 g 都在 $[a,b]$ 上可积且反调, 则成立相反的不等式.

5. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积, 且在点 $x=0$ 连续. 证明:

$$\lim_{t\to 0^+}\int_0^1 \frac{tf(x)}{t^2+x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}f(0).$$

6. 设 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上可积, 且在点 $x=0$ 连续. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos^n x\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x} = f(0).$$

7. 计算下列定积分:

(1) $\displaystyle\int_0^1 x^{15}\sqrt{1+3x^8}\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int_{-7}^1 x\sqrt[3]{1-x}\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x+\sin^4 x}$;

(4) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cot x}\mathrm{d}x$;

(5) $\displaystyle\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^2}$;

(6) $\displaystyle\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$;

(7) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}(1+\sqrt[3]{x^2})}\mathrm{d}x$;

(8) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{x^3(2-x)}}$;

(9) $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$;

(10) $\displaystyle\int_{-1}^1 x(\arccos x)^2\mathrm{d}x$;

(11) $\displaystyle\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{2x}\sin^2 x\mathrm{d}x$;

(12) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x\ln(x+\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$.

8. 利用泰勒公式作估计结合定积分求下列极限:

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\Big(\sin\frac{\pi}{2n}\Big)\sum_{k=1}^n\Big(2+\sin\frac{k\pi}{2n}\Big)^p\cos\frac{k\pi}{2n}$;

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n\sqrt{(na+k)(na+k+1)}\ \ (a>0)$;

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\Big(1+\frac{k}{n}\Big)\sin\frac{k\pi}{n^2}$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2^{\frac{k}{n}}k}{nk+1}$.

9. 设 m,n 是正整数, $p>1$. 计算下列定积分:

(1) $\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}\ln^n x\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^m x\mathrm{d}x$;

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\mathrm{d}x$;

(5) $\displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^n\mathrm{d}x$;

(6) $\displaystyle\int_0^1\frac{x^n\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$;

(7) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\Big(\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\Big)^{2n+1}\mathrm{d}x$;

(8) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\Big)^{2n}\mathrm{d}x$.

10. (1) 证明: 如果 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的单调递增函数, 则 $F(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是 $(0,+\infty)$ 上的单调递增函数;

(2) 证明: 如果 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的凸函数, 则 $F(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是 $(0,+\infty)$ 上的凸函数.

11. 设 $f(x)=\dfrac{(x+1)^2(x-1)}{x^3(x-2)}$. 求 $\displaystyle\int_{-2}^{3}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x$.

12. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续、在 (a,b) 上可导且导函数有界. 又设存在 $x_0\in[a,b]$ 使 $f(x_0)=0$. 证明:

$$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}[(b-x_0)^2+(x_0-a)^2]\sup_{a<x<b}|f'(x)|.$$

并考虑以下问题:

(1) 上式右端与 x_0 无关的界是什么?

(2) 对 x_0 是区间 $[a,b]$ 的端点、中点和三等分点三种情况, 分别得到怎样的不等式?

(3) 如果 x_0 位于把 $[a,b]$ 三等分后所得中间的小区间中, 则会得到怎样的不等式?

(4) 如果 $f(a)=f(b)=0$, 则会得到怎样的不等式?

13. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的一阶导数, 且 $f(a)=f(b)=0$. 证明:

(1) $\displaystyle\int_a^b xf(x)f'(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\leqslant 4\Big(\int_a^b x^2f^2(x)\mathrm{d}x\Big)\Big(\int_a^b f'^2(x)\mathrm{d}x\Big)$.

14. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的二阶导数, 且 $f(a)=f(b)=0$. 证明:

(1) $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-a)(b-x)\mathrm{d}x$;

(2) $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{12}(b-a)^3 \max\limits_{a<x<b}|f''(x)|$;

(3) $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{8}(b-a)^2 \int_a^b |f''(x)|\mathrm{d}x$;

(4) $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{30}}(b-a)^{\frac{5}{2}}\left(\int_a^b |f''(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$.

15. 证明不等式:

$$\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(a^{\sin x}+a^{\cos x}\right)\mathrm{d}x\right]\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(a^{-\sin x}+a^{-\cos x}\right)\mathrm{d}x\right] \geqslant \frac{\pi^3}{4}.$$

16. 设 $f(x)$ 是定义在 $[0,+\infty)$ 上的连续函数, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a$. 证明:

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+1} f(t)\sin\frac{\pi}{t}\,\mathrm{d}t=\pi a.$$

17. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-1}^1 \frac{n}{\sqrt{n^2+x^2}}\cos\frac{\pi x}{n}\,\mathrm{d}x=2$.

18. 设 $f(x)$ 是定义在 $[0,+\infty)$ 上连续的正值函数, $w(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上连续的单增函数, $\varphi(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的可微函数, 且 $\varphi(0)=0$, $\varphi'(x)>0$, $\forall x>0$.

(1) 证明下述函数 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单增

$$F(x)=\frac{\displaystyle\int_0^{\varphi(x)} f(t)w(t)\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_0^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t}, \qquad \forall x>0;$$

(2) 求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}F(x)$;

(3) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有正的下界且 $w(x)>0$, $\forall x>0$, 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$.

19. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 恒取正值且不恒等于 1. 证明:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}>2(b-a).$$

20. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微, 且 $f(0)=0$, $0<f'(x)<1$, $\forall x\in(0,1)$. 证明:

$$\int_0^1 f^3(x)\,\mathrm{d}x<\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

21. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上有 $2m$ 阶连续导数, 且对每个 $0\leqslant k\leqslant m-1$ 都有

$$f^{(k)}(a)=f^{(k)}(b)=g^{(k)}(a)=g^{(k)}(b)=0.$$

(1) 证明: $\int_a^b f^{(2m)}(x)g(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)g^{(2m)}(x)\,\mathrm{d}x$;

(2) 已知 $\int_0^1 t^m(1-t)^m\,\mathrm{d}t=\dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}$, 证明:

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{(n!)^2(b-a)^{2n+1}}{(2n)!(2n+1)!}\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f^{(2m)}(x)|.$$

22. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 值域含于 $[\alpha,\beta]$. 又设 Ψ 是定义在 $[\alpha,\beta]$ 上的连续的凸函数.

(1) 证明不等式

$$\Psi\Big(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\Big)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b\Psi\big(f(x)\big)\mathrm{d}x;$$

(2) 更一般地, 设 $w(x)$ 是 $[a,b]$ 上恒取正值的可积函数, 证明:

$$\Psi\left(\frac{\displaystyle\int_a^b f(x)w(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b w(x)\,\mathrm{d}x}\right)\leqslant\frac{\displaystyle\int_a^b\Psi\big(f(x)\big)w(x)\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b w(x)\,\mathrm{d}x}.$$

23. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 证明:

$$\lim_{p\to+\infty}\Big(\int_a^b|f(x)|^p\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|.$$

24. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且恒取正值. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\int_a^b\sqrt[n]{f(x)}\,\mathrm{d}x\Big)^n=\exp\Big(\int_a^b\ln f(x)\,\mathrm{d}x\Big).$$

这里 $\exp x=\mathrm{e}^x$. 必要时可以利用不等式 $1+x\leqslant\mathrm{e}^x\leqslant1+x+\dfrac{x^2}{2}\mathrm{e}^{|x|}$, $\forall x\in\mathbf{R}$.

25. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. 试不用勒贝格定理证明:

(1) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上至少有一个连续点;

(2) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的全体连续点在 $[a,b]$ 中稠密, 即对任意 $x_0\in[a,b]$, 存在一列点 $x_n\in[a,b]$, $n=1,2,\cdots$, 每个 x_n 都是 $f(x)$ 的连续点, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$.

26. (1) 令 $f(x)=\displaystyle\int_0^x\sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ (当 $x\neq0$), $f(0)=0$. 证明: $f'(0)=0$, 问能否用洛必达法则解此题;

(2) 更一般地, 设 φ 是以 $T>0$ 为周期的周期函数, 且在 $[0,T]$ 上可积, 令

$$f(x)=\int_0^x\varphi\Big(\frac{1}{t}\Big)\mathrm{d}t\quad(\text{当 }x\neq0),\qquad f(0)=0,$$

证明: $f'(0)=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T\varphi(x)\mathrm{d}x$.

27. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. 证明: 对任意 $0<p<q$ 成立不等式

$$\Big(\frac{1}{b-a}\int_a^b|f(x)|^p\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}\leqslant\Big(\frac{1}{b-a}\int_a^b|f(x)|^q\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

建议应用定积分的定义并借助于凸性不等式 (5.5.10).

28. 设 $f(x)$ 是 $[0,2\pi]$ 上的单调函数. 证明:

$$\lim_{|\lambda|\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x=0,\qquad \lim_{|\lambda|\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x=0.$$

29. 设函数 f 在 $[a,b]$ 上可积. 证明:

(1) 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $[a,b]$ 上的阶梯函数 $h_1(x)$ 和 $h_2(x)$, 使成立

$$h_1(x)\leqslant f(x)\leqslant h_2(x),\qquad \forall x\in[a,b],$$

且使

$$\int_a^b[h_2(x)-h_1(x)]\mathrm{d}x<\varepsilon;$$

(2) 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $[a,b]$ 上的连续函数函数 $g_1(x)$ 和 $g_2(x)$, 使成立

$$g_1(x)\leqslant f(x)\leqslant g_2(x),\qquad \forall x\in[a,b],$$

且

$$\int_a^b[g_2(x)-g_1(x)]\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

30. 判别下列无穷积分的敛散性:

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$;　　(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p+1}\mathrm{d}x\ \ (p>0)$;

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^q\arctan x}{x^p+1}\mathrm{d}x\ (p>0,\ q>0)$;　　(4) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^p}\mathrm{d}x\ \ (p>0)$;

(5) $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p\ln^q x}\ \ (p>0,\ q>0)$;　　(6) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(1-\cos\frac{1}{x^p}\right)^q\mathrm{d}x\ \ (p>0,\ q>0)$;

(7) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\ln^p\left(\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\ (p>0)$;　　(8) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(x\tan\frac{1}{x}-1\right)^p\left(\sin\frac{1}{x}\right)^q\mathrm{d}x\ (p>0,\ q>0)$.

31. 设 $f(x)$ 是 $[a,+\infty)$ 上单调递减的可微函数, 导函数在任意有限区间 $[a,b]$ 上可积, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. 证明: 积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f'(x)\sin^2 x\mathrm{d}x$ 收敛.

32. 设 $f(x)$ 是 $[a,+\infty)$ 上的可微函数, 且当 $x\to+\infty$ 时 $f'(x)$ 单调递增趋于 $+\infty$. 证明: 积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty}\sin f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\displaystyle\int_a^{+\infty}\cos f(x)\mathrm{d}x$ 都收敛.

33. 设 $p>0$, $q>p+1$. 证明: 积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}x^p\sin x^q\sin x\mathrm{d}x$ 收敛.

34. 设 $f(x)$ 是 $[a,+\infty)$ 上的单调函数, 且积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 证明:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)=0$;

(2) 如果 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上可微且导函数在任意有限区间 $[a,b]$ 上可积, 则积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty}xf'(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 且

$$\int_0^{+\infty} xf'(x)\mathrm{d}x = af(a) - \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

35. 设积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上非负, 且存在 $p>0$ 使当 x 充分大时 $x^{-p}f(x)$ 单调递减. 证明: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0$.

36. 设积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 且当 x 充分大时 $xf(x)$ 单调递减. 证明: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xf(x) \ln x = 0$.

37. 设积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上非负. 证明: $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_a^t xf(x)\mathrm{d}x = 0$.

38. 证明傅茹兰尼定理:

(1) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续且 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = c$, 则对任意实数 a, b 成立

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x = [f(0)-c]\ln\frac{b}{a};$$

(2) 如果把条件 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = c$ 改为积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ 对某个 $a>0$ 收敛, 则有

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x = f(0)\ln\frac{b}{a};$$

(3) 应用傅茹兰尼定理计算 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x}\mathrm{d}x$ 和 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan ax - \arctan bx}{x}\mathrm{d}x$.

39. 判别下列瑕积分的敛散性:

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^p x}\ (p>0)$; (2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p x|\ln\sin x|^q\mathrm{d}x\ (p>0,\ q>0)$;

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{|\ln x|^\mu}{x^p}\mathrm{d}x\ (p>0,\ \mu\in\mathbf{R})$; (4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{\ln x}\mathrm{d}x\ (p>0,\ q>0)$;

(5) $\displaystyle\int_0^2 \frac{\ln(1+x^p)}{[x-\ln(1+x)]^q}\mathrm{d}x\ (p>0,\ q>0)$; (6) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1-\cos x^p)^q}\ (p>0,\ q>0)$.

40. 证明: 对任意实数 α 都有 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} = \frac{\pi}{2}$.

41. 设 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的有界连续函数. 证明: 对任意实数 α 都有

$$\int_0^{+\infty} f\left(x^\alpha + \frac{1}{x^\alpha}\right)\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x = 0.$$

42. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上广义可积. 证明: $f\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$ 也在 $(-\infty,+\infty)$ 上广义可积, 且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

43. (1) 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上广义可积, 且 $f(x)>0, \forall x\in(a,b)$, 证明:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0;$$

(2) 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续且非负, 并且不恒等于零, 又设 $g(x)$ 在 (a,b) 上广义可积, 且 $g(x)>0, \forall x\in(a,b)$, 再设 $f(x)g(x)$ 也在 (a,b) 上广义可积, 证明:

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x>0.$$

44. 设 $g(x)$ 在 (a,b) 上广义可积. 证明:

(1) 如果 $f(x)$ 在 (a,b) 上单调递减、非负且有界, 则存在 $\xi\in[a,b]$ 使

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(a+)\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x;$$

(2) 如果 $f(x)$ 在 (a,b) 上单调递增、非负且有界, 则存在 $\xi\in[a,b]$ 使

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(b-)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x;$$

(3) 如果 $f(x)$ 在 (a,b) 上单调且有界, 则存在 $\xi\in[a,b]$ 使

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(a+)\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x+f(b-)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x.$$

45. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^\infty u_n$ 的通项单调递减. 证明:

(1) 级数 $\sum\limits_{n=1}^\infty u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^\infty 2^n u_{2^n}$ 有相同的敛散性;

(2) 设 $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ 是一个严格单调递增的正整数列, 且满足以下条件存在常数 $C>0$ 使

$$p_{n+1}-p_n\leqslant C(p_n-p_{n-1}),\qquad n=1,2,\cdots,$$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^\infty u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^\infty (p_{n+1}-p_n)u_{p_n}$ 有相同的敛散性.

46. 证明: 对正项级数 $\sum\limits_{n=1}^\infty u_n$, 若存在 $r>0$ 使当 n 充分大时 $\dfrac{\ln u_n}{\ln n}\leqslant-(1+r)$, 则该级数收敛. 而若尔当 n 充分大时 $\dfrac{\ln u_n}{\ln n}\geqslant -1$, 则该级数发散.

运用这个判别法讨论下列级数的敛散性: (1) $\sum\limits_{n=9}^\infty \dfrac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}$; (2) $\sum\limits_{n=9}^\infty \dfrac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$.

47. 讨论下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^\infty \dfrac{a^n}{n^2}\left(\sqrt[n]{n}+\cos\dfrac{2n\pi}{3}\right)^n\quad\left(a>0, a\neq\dfrac{1}{2}\right)$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[an\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)+\dfrac{(-1)^n b}{\sqrt[n]{n^3}}\right]^n$ $(a>0,\ b>0,\ a+b\neq 1)$.

48. 对正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, 设 $\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=1$. 记

$$\omega_n=n(\sqrt[n]{u_n}-1).$$

证明: 当 $\limsup\limits_{n\to\infty}\omega_n>-\infty$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散, 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\omega_n=-\infty$ 时, 设有

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\omega_n}{\ln n}=\limsup_{n\to\infty}\frac{n(\sqrt[n]{u_n}-1)}{\ln n}=-p.$$

则当 $p>1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 当 $p<1$ 时该级数发散.

运用这个判别法讨论下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{p\ln n}{n}\right)^n$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt[n]{n^p}}\cos\dfrac{2n\pi}{3}\right)^n$ $(p\neq 2)$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}\left(2n\tan\dfrac{1}{n}+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n^p}}\right)^n$ $(p\neq 3)$.

49. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散. 令 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k$. 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_n}{S_n^p}$ 当 $p>1$ 时收敛, 当 $p\leqslant 1$ 时发散.

50. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛. 令 $R_n=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}u_k$. 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_n}{R_n^p}$ 当 $p<1$ 时收敛, 当 $p\geqslant 1$ 时发散.

51. (1) 设 u_n, v_n $(n=1,2,\cdots)$ 是两个正数列且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 收敛而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散. 又设 $\lim\limits_{n\to\infty}v_{2n-1}=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}v_{2n}=b$, 且 $a\neq b$, 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n v_n$ 发散;

(2) 在上题中, 如果 $a=b$, 能否断定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n v_n$ 收敛或发散? 请举例说明.

52. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}ku_k=0$.

53. (1) 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛, 且 $|u_n|<a$, $n=1,2,\cdots$, 又设 f 是区间 $(-a,a)$ 上的可微函数, 且 $f(0)=0$, 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(u_n)$ 也绝对收敛;

(2) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 都收敛, 且 $|u_n| < a$, $n = 1, 2, \cdots$, 又设 f 是区间 $(-a, a)$ 上的二次可微函数, 且 $f(0) = 0$, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(u_n)$ 也收敛;

(3) 设 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上无穷可微, 且 $f(0) = 0$, 问能否由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛推出级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(u_n)$ 也收敛? 请举例说明.

54. 设函数 f 在 $[0, +\infty)$ 上可微, 且存在常数 $C > 0$ 使 $|f'(x)| \leqslant Cx^{-2}$, $\forall x \geqslant 1$. 又设积分 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛. 证明:

(1) 对任意 $h > 0$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(nh)$ 绝对收敛;

(2) $\lim_{h \to 0^+} h \sum_{n=1}^{\infty} f(nh) = \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$;

(3) $\lim_{h \to 0^+} h \sum_{n=1}^{\infty} |f(nh)| = \int_0^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$;

(4) 求 $\lim_{t \to +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{t}{n^2 + t^2}$;

(5) 求 $\lim_{t \to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{t^n - t^{n+1}}{1 + t^n}$.

55. 已知当 $|x| < 1$ 时成立 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$, $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)x^{2n-2} = \dfrac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$. 据此证明: 当 $|x| < 1$ 时成立下列等式:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} n x^n}{1 + x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} x^n}{(1 + x^n)^2}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n-1)x^{2n-1}}{1 - x^{4n-2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{2n-1}(1 + x^{4n-2})}{(1 - x^{4n-2})^2}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{1 - x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} d(n) x^n$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{(1 - x^n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n) x^n$.

其中, $d(n)$ 表示正整数 n 的所有正因子 (包括 1 和 n) 的个数, $\sigma(n)$ 表示 n 的所有正因子的和.

56. 给定区间 $[0,+\infty)$ 上的函数序列 $\{f_n(x)\}$ 如下:

$$f_n(x)=\frac{x\ln^\alpha n}{n^x},\qquad n=1,2,\cdots.$$

问当 α 取何值时, $f_n(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛?

57. 设 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的函数. 令

$$f_n(x)=\frac{[nf(x)]}{n},\qquad n=1,2,\cdots.$$

证明: $f_n(x)$ 在 I 上一致收敛于 $f(x)$.

58. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上黎曼可积. 归纳地定义

$$f_1(x)=f(x),\qquad f_{n+1}(x)=\int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t,\qquad n=1,2,\cdots.$$

证明: $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于零.

59. 设 $f(x)$ 在开区间 I 上有连续的导函数 $f'(x)$. 令

$$f_n(x)=n\Big[f\Big(x+\frac{1}{n}\Big)-f(x)\Big],\qquad n=1,2,\cdots.$$

证明: 对任意有界闭区间 $[a,b]\subseteq I$, $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f'(x)$. 并举例说明, $f_n(x)$ 不必在区间 I 上一致收敛于 $f'(x)$.

60. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 且对每个 $x\neq 0$ 都有 $|f(x)|<|x|$. 定义函数序列 $\{f_n(x)\}$ 如下

$$f_1(x)=f(x),\quad f_{n+1}(x)=f(f_n(x)),\quad n=1,2,\cdots.$$

证明: 对任意 $a>0$, $f_n(x)$ 在 $[-a,a]$ 上一致收敛于零.

61. 设 $\{f_n(x)\}$ 是区间 I 上的一列连续函数, 在 I 上一致收敛于函数 $f(x)$. 证明: 对任意 $x\in I$ 和 I 中收敛于 x 的点列 x_n, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x_n)=f(x)$.

62. 设 $f(x)$ 和 $\varphi_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 都在 $[a,b]$ 上黎曼可积, 且 $f(x)$ 在左端点 a 处右连续. 又设 $\varphi_n\geqslant 0$, $\int_a^b\varphi_n(x)\mathrm{d}x=1$, $n=1,2,\cdots$. 再设对任意 $a<c<b$, $\varphi_n(x)$ 在 $[c,b]$ 上一致收敛于零. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x=f(0).$$

63. 应用上题的结果求以下极限, 假定每个 $f(x)$ 都在所积分的区间上连续:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}n\int_0^1 f(x)x^n\mathrm{d}x$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)!}{4^n(n!)^2}\int_0^1 f(x)(1-x^2)^n\mathrm{d}x$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin^{2n}x\mathrm{d}x$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)!!}{(2n)!!}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{f(x)x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

64. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在开区间 (a,b) 上一致收敛, 它的每项 $u_n(x)$ 都在闭区间 $[a,b]$ 上连续. 证明:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛;

(2) 和函数 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续.

65. 形如 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}a_n$ 的级数叫做**罗朗级数**, 规定当且仅当两个级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{-n}$ 都收敛时, $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}a_n$ 才收敛, 并且和等于这两个级数的和. 证明: 罗朗级数 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{(x-n)^2}$ 在所有 $x\neq 0,\pm1,\pm2,\cdots$ 的点都收敛, 和函数在所有收敛点连续且为周期等于 1 的周期函数.

66. 试证明迪尼定理: 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的每项 $u_n(x)$ 都在区间 $[a,b]$ 上非负并且连续. 又设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上逐点收敛, 并且和函数在 $[a,b]$ 上连续, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

67. 设 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是由区间 $[0,1]$ 中的全体有理数排成的数列. 证明: 函数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sgn}(x-r_n)}{2^n}$$

对所有 $x\in[0,1]$ 有定义, 但它只在无理点连续而在有理点不连续.

68. 设 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是由区间 $[0,1]$ 中的全体有理数排成的数列. 证明: 函数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x-r_n|}{2^n}$$

对所有 $x\in[0,1]$ 有定义并在此区间上连续, 但它只在无理点可微而在有理点不可微.

69. 设 $\alpha,\beta>0$. 证明: $\displaystyle\int_0^1\frac{x^{\alpha-1}}{1+x^{\beta}}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha+n\beta}$.

70. 设 $a>-1$, $b>-1$, 且 $a\neq b$. 证明: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+a)(n+b)}=\frac{1}{b-a}\int_0^1\frac{x^a-x^b}{1-x}\mathrm{d}x$.

71. 已知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$. 证明: $\int_0^1\frac{\ln(1-x)}{x}\mathrm{d}x=-\frac{\pi^2}{6}$.

72. 证明: $\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 x^n\sin\pi x\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\sin\pi x}{x}\mathrm{d}x$.

73. 已知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$. 首先推导等式 (1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$. 然后应用这些结论证明:

(1) $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x=-\frac{\pi^2}{12}$;

(2) $\int_0^1\frac{\ln^2(1-x)}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{3}$;

(3) $\int_0^1\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\pi^2}{4}$;

(4) $\int_0^1\ln x\ln(1-x)\mathrm{d}x=2-\frac{\pi^2}{6}$;

(5) $\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+1}=\frac{\pi^2}{12}$;

(6) $\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{\sinh x}=\frac{\pi^2}{4}$.

74. 证明: $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$.

75. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 $R=+\infty$, 和函数为 $f(x)$. 令 $f_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$, $n=1,2,\cdots$. 证明: 对任意 $-\infty<a<b<+\infty$, $f_n(f_n(x))$ 都在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(f(x))$.

76. 根据正弦函数和余弦函数的泰勒展开

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\qquad \cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

和幂级数的乘法公式证明以下三角公式:

(1) $\sin^2x+\cos^2x=1$;

(2) $2\sin x\cos x=\sin 2x$;

(3) $\cos^2x-\sin^2x=\cos 2x$;

(4) $4\sin^3x=3\sin x-\sin 3x$;

(5) $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$.

77. (1) 设 f 和 g 都在点 x_0 解析, 证明: 它们的乘积 fg 也在点 x_0 解析, 并且当 $g(x_0)\neq 0$ 时它们的商 f/g 也在点 x_0 解析;

(2) 设 f 都在点 x_0 解析, g 在点 $y_0=f(x_0)$ 解析, 证明: 复合函数 $g\circ f$ 在点 x_0 解析.

78. 求函数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\frac{\sin nx}{\sin x}.$$

的傅里叶级数, 其中 $|\varepsilon|<1$.

79. 设 $f(x)$ 是 2π 周期函数, 在 $(-\pi,\pi)$ 上分段单调且有界. 证明: $f(x)$ 的傅里叶系数满足

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right), \qquad b_n = O\left(\frac{1}{n}\right), \qquad \text{当 } n\to\infty.$$

80. 设 $f(x)$ 是连续 2π 周期函数, 在 $[-\pi,\pi]$ 上分段有连续的导数. 证明: $f(x)$ 的傅里叶级数在 $(-\infty,\infty)$ 上一致收敛于 $f(x)$.

81. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是 2π 周期函数, 且都在 $(-\pi,\pi)$ 上平方可积. 又设

$$f(x)\sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

证明: 级数

$$\frac{1}{2}a_0 g(x)+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n g(x)\cos nx+b_n g(x)\sin nx]$$

在 $(-\pi,\pi)$ 上积分平均收敛于 $f(x)g(x)$.

82. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是 2π 周期函数, 在 $(-\pi,\pi)$ 上平方可积, 它们的傅里叶系数分别为 a_0, a_n, b_n $(n=1,2,\cdots)$ 和 a_0', a_n', b_n' $(n=1,2,\cdots)$. 证明: 三角级数

$$\frac{1}{2}a_0a_0'+\sum_{n=1}^{\infty}(a_na_n'\cos nx+b_nb_n'\sin nx)$$

在 $(-\infty,\infty)$ 上一致收敛于 $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)g(t)\mathrm{d}t$.

83. 设 $f(x)$ 是连续的 2π 周期函数, 其傅里叶级数为

$$f(x)\sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

令 $S_n(x)$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 为这个级数的部分和序列, 再令 $\sigma_n(x)$ 为前 $n+1$ 项部分和的算术平均

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{n+1}\sum_{n=0}^{\infty}S_n(x), \qquad n=0,1,2,\cdots.$$

(1) 记 $F_n(t)=\dfrac{1}{2n\pi}\left(\dfrac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2$ (称为**费耶核**), 应用等式 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t=\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$ 证明

$$\sigma_n(x)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)F_n(t)\mathrm{d}t, \qquad n=0,1,2,\cdots;$$

(2) 证明: $F_n(t)\geqslant 0$, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}F_n(t)\mathrm{d}t=1$, 且对任意 $0<\delta<\pi$ 有 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}F_n(t)\mathrm{d}t=0$;

(3) 证明费耶定理: 当 $n\to\infty$ 时, $\sigma_n(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

参考文献

阿黑波夫, 萨多夫尼奇, 丘巴里阔夫. 2006. 数学分析讲义. 3 版. 王昆扬译. 北京：高等教育出版社.

邓东皋, 尹小玲. 2006. 数学分析简明教程 (上、下册). 2 版. 北京：高等教育出版社.

方企勤. 1986. 数学分析 (第一册). 北京：高等教育出版社.

菲赫金哥尔茨. 2006. 微积分学教程 (第一、二卷). 8 版. 杨弢高等译. 北京：高等教育出版社.

吉林大学数学系. 1978. 数学分析 (上、下册). 北京：人民教育出版社.

吉米多维奇. 2010. 数学分析习题集. 李荣, 李植译. 北京：高等教育出版社.

克莱鲍尔. 1981. 数学分析原理. 庄亚栋译. 上海：上海科学技术出版社.

廖可人, 李正元. 1986. 数学分析 (第三册). 北京：高等教育出版社.

林源渠等. 1986. 数学分析习题集. 北京：高等教育出版社.

卢丁. 1979. 数学分析原理 (上、下册). 赵慈庚, 蒋铎译. 北京：人民教育出版社.

裴礼文. 2006. 数学分析中的典型问题与方法. 2 版. 北京：高等教育出版社.

萨多夫尼奇, 波德科尔津. 1981. 大学奥林匹克数学竞赛试题解答集. 王英新, 李世华译. 长沙：湖南科学技术出版社.

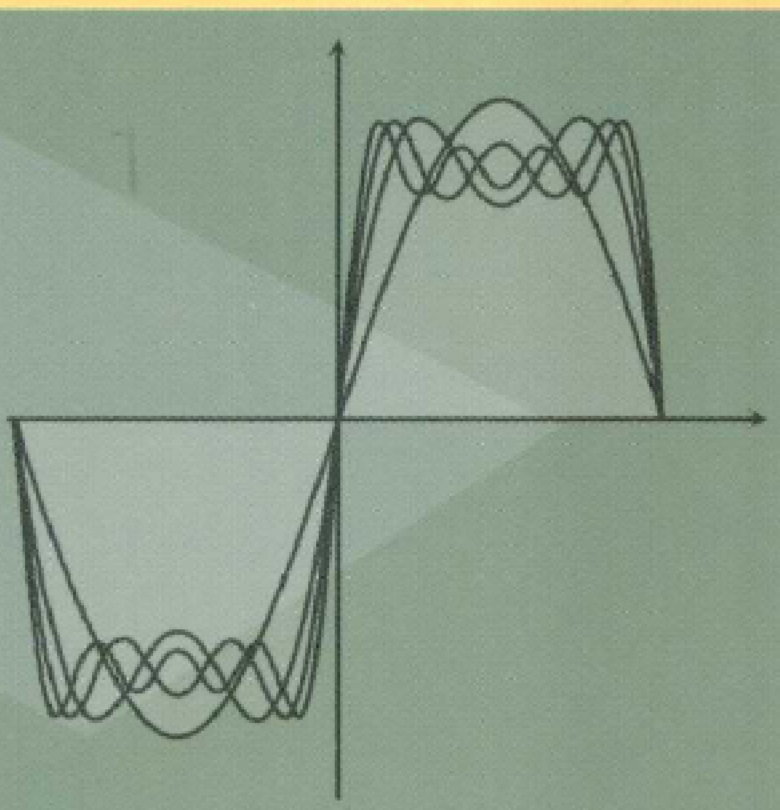
沈燮昌. 1986. 数学分析 (第二册). 北京：高等教育出版社.

周民强. 2010. 数学分析习题演练 (第一、二册). 2 版. 北京：科学出版社.

卓里奇. 2006. 数学分析 (第一卷). 4 版. 蒋铎等译. 北京：高等教育出版社.

(O-5062.0101)

数学分析教程(中册)



www.sciencep.com

ISBN 978-7-03-036806-5

定 价: 36.00 元

高等教育出版中心　数理出版分社
联系电话：010-64034725
E-mail：mph@mail.sciencep.com