prob_week2

习题 2.2

2.2.1

1. 证明: 在二项概型中

$$\sum_{i_1,\cdots,i_n} P\left((i_1, i_2, \cdots, i_n)\right) = 1$$

这里 $\sum_{i_1,\cdots,i_n}$ 表示对所有可能的 $i_k = 0, 1$ 求和. 对多项分布叙述平行的结果并证明之.

Proof:

首先由于是二项概型，所有可能的结果 $\Omega = \bigcup\limits_{i_1,...,i_n\in\{0,1\}} (i_1, ..., i_n)$，显然有

$$\sum_{i_1,\cdots,i_n} P\left((i_1, i_2, \cdots, i_n)\right) = P\left(\sum_{i_1,...,i_n} \overbrace{(i_1, ..., i_n)}^{\text{表示事件}}\right) = P(\Omega) = 1$$

多项分布:

$$\sum_{i_1,\cdots,i_n} P\left((i_1, i_2, \cdots, i_n)\right) = 1$$

这里 $\sum_{i_1,\cdots,i_n}$ 表示对所有可能的 $i_k = 0, 1, ..., k$ 求和.

2.2.2

2. 考虑 n 重 Bernoulli 试验. 设 $1 \leqslant i < j \leqslant n$. 以 A_k 表示第 k 次掷出正面. 证明:

$$P\left(B_i B_j\right) = P\left(B_i\right) P\left(B_j\right)$$

其中 $B_k = A_k$ 或 A_k^c. 并且一般地有

$$P\left(B_{i_1} B_{i_2} \cdots B_{i_l}\right) = P\left(B_{i_1}\right) \cdots P\left(B_{i_l}\right), \quad \forall 1 \leqslant l \leqslant n, 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots i_l \leqslant n.$$

对多项概型叙述平行的结果并证明之.

Proof:

显然 $A_1, \ldots, A_n$ 两两相互独立，于是上式成立。

2.2.3

3. 在二项概型中, 以 α 表示掷出正面的次数. 证明: $P(\alpha = k)$ 在 k 满足 $(n+1)p - 1 \leqslant k \leqslant (n+1)p$ 时达到最大值. 对多项分布叙述平行的结果并证明之.

Proof:

$$P(\alpha = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

解方程

$$\begin{cases} P(\alpha = k) \geq P(\alpha = k-1) \\ P(\alpha = k) \geq P(\alpha = k+1) \end{cases}$$

解得

$$(n+1)p - 1 \leq k \leq (n+1)p$$

对于多项分布

在多项分布中，假设我们有 n 次独立试验，每次试验有 k 个可能的结果，且每个结果 i 出现的概率为 p_i ，其中 $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$ 。多项分布的概率质量函数为:

$$P\left(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_k = x_k\right) = \frac{n!}{x_1! x_2! \ldots x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_k^{x_k}$$

其中 X_i 表示第 i 类结果出现的次数，且 $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ 。

我们可以证明类似的结论：对于每个 X_i ，当 $x_i \approx (n+1)p_i - 1 \leq x_i \leq (n+1)p_i$ 时，概率 $P\left(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_k = x_k\right)$ 达到最大值。

Proof:

不会

2.2.4

4. m 个黑球 n 个白球排成一列. 求 k 个黑球前是白球的概率.

一共有 C_{m+n}^{m} 种排列方法。

若 $k > m$ 或 $k > n$ 或 $m > n$，则 $P = 0$

若 $k \leq m, k \leq n, m \leq n$，则先将 m 个黑球分为 k 类，一共有 C_{m+k-1}^{k-1} 种分法，再将 n 个白球分为 k 类，一共有 C_{n+k-1}^{k-1} 种分法，将这 k 类插空放置，于是

$$P = \frac{C_{m+k-1}^{k-1} C_{n+k-1}^{k-1}}{C_{m+n}^{m}}$$

2.2.5

5. n 个座椅排成一排, 编号为 $1, 2, \cdots, n$. 现有 n_1 个男孩和 n_2 个女孩坐上去, $n_1 + n_2 = n$.设 $n\,!$ 种不同的坐法是等可能的. 以 α_1 表示前面座位是男孩的男孩人数, α_2 表示前面座位是女孩的男孩人数, α_3 表示前面座位是男孩的女孩人数, α_4 表示前面座位是女孩的女孩人数. 求 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 的概率分布, 即对任意 i, j, k, h 求

$$P\left((\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (i, j, k, h)\right).$$

解:

Too difficult

2.2.6

6. 证明: $\forall k$ 及 $A_1, \cdots, A_k$,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{k} P\left(A_i\right)$$

Proof:

先证明

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

这是显然的，因为 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

于是

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \leq P(A_1) + P\left(\bigcup_{i=2}^{k} A_i\right) \leq \cdots \leq \sum_{i=1}^{k} P(A_i)$$

2.2.7

7. 证明:

$$P(A \Delta B) = P(A) + P(B) - 2P(AB)$$

这是显然的，因为 $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$。

2.2.8

8. 证明:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} P\left(A_i\right) - (n-1)$$

先证明

$$P(AB) \geq P(A) + P(B) - 1 \tag{1}$$

因为 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \leq 1$，所以 (1) 成立

于是

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) \geq P(A_1) + P\left(\bigcap_{i=2}^{k} A_i\right) - 1 \geq \cdots \geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1)$$

习题 2.3

2.3.1

1. 设 $\xi \sim B(n,p)$. 计算 $E\left[\xi^m\right], m$ 为正整数.

由定义:

$$\mathbb{E}\left[\xi^m\right] = \sum_{k=0}^{n} k^m \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

2.3.2

2. 用例 3 的记号. 令 $\xi := \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \xi_i$, 其中 α_i 是常数. 计算 $E[\xi]$.

$$\begin{aligned} E[\xi] &= \sum_{i=1}^{n} \xi(\omega_i) P(\omega_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \xi_j(\omega_i)\right) P(\omega_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \delta_{j\omega_i}\right) P(\omega_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_{\omega_i} P(\omega_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_{\omega_i} p_i \end{aligned}$$

2.3.3

3. 设 (ξ, η) 的分布列为 $\{(x_i, y_j), p_{ij}\}$. 求
(a) ξ 和 η 的分布列;
(b) $\xi + \eta$ 的分布列.

解:

(a) ξ 的分布列为 $\left\{\left(x_i, \sum_j p_{ij}\right); i \in I\right\}$, η 的分布列为 $\left\{\left(y_j, \sum_i p_{ij}\right); j \in J\right\}$.

(b) $\xi+\eta$ 的分布列为 $\left\{\left(z_k, \sum_{n=1}^{z_k}\left(\sum_j p_{kj}\right)\cdot\left(\sum_i p_{i(z_k-n)}\right)\right); z_k \in \{x_i+y_j; i \in I, j \in J\}\right\}$

2.3.4

4. 举例说明, 有这样的二维随机变量 (ξ,η) 与 (X,Y), 它们的概率分布不同, 但 ξ 与 X 的概率分布相同, η 与 Y 的概率分布相同.

好的，下面通过一个具体的例子说明，即使两个二维随机变量 (ξ,η) 和 (X,Y) 的各自边缘分布（ξ 与 X，η 与 Y）相同，它们的联合分布仍然可以不同。

例子说明

设定

假设随机变量 ξ 和 η，以及 X 和 Y 都是取值于 $\{0,1\}$ 的二元随机变量。我们定义它们的边缘分布如下:

- **边缘分布**:

$$P(\xi=0)=P(X=0)=0.5, \quad P(\xi=1)=P(X=1)=0.5$$

$$P(\eta=0)=P(Y=0)=0.5, \quad P(\eta=1)=P(Y=1)=0.5$$

联合分布

我们构造两个不同的联合分布，使得边缘分布相同，但联合分布不同。

1. **联合分布 1：随机变量** (ξ,η)

ξ	η	**概率** $P(\xi,\eta)$
0	0	0.3
0	1	0.2
1	0	0.2
1	1	0.3

- **验证边缘分布**:

$$P(\xi=0)=0.3+0.2=0.5,\quad P(\xi=1)=0.2+0.3=0.5$$

$$P(\eta=0)=0.3+0.2=0.5,\quad P(\eta=1)=0.2+0.3=0.5$$

2. **联合分布 2：随机变量 (X,Y)**

X	Y	概率 $P(X,Y)$
0	0	0.4
0	1	0.1
1	0	0.1
1	1	0.4

- **验证边缘分布**:

$$P(X=0)=0.4+0.1=0.5,\quad P(X=1)=0.1+0.4=0.5$$

$$P(Y=0)=0.4+0.1=0.5,\quad P(Y=1)=0.1+0.4=0.5$$

对比联合分布

尽管 (ξ,η) 和 (X,Y) 的边缘分布相同，但它们的联合分布不同:

- 在 (ξ,η) 中:
  - $P(\xi=0,\eta=0)=0.3$
  - $P(\xi=1,\eta=1)=0.3$
- 在 (X,Y) 中:
  - $P(X=0,Y=0)=0.4$
  - $P(X=1,Y=1)=0.4$

这些差异表明，虽然各自的边缘分布相同，但变量之间的**依赖关系**不同，从而导致联合分布不同。

依赖关系的不同

- **在 (ξ,η)**:

ξ 和 η 存在一定的**正相关性**，因为当一个取值为1时，另一个也有较高的概率取值为1。

- **在 (X, Y)**:

  X 和 Y 同样存在正相关性，但相关程度不同于 (ξ, η)。具体来说，X 和 Y 的联合概率集中在同一状态（00 和 11）上更多。

结论

通过上述例子，我们可以看到，即使两个二维随机变量的边缘分布相同，它们的联合分布仍然可以不同。这主要是由于变量之间的**依赖关系**不同所导致的。这说明边缘分布仅描述了单个变量的分布情况，而不涉及变量之间的相互关系。要完全描述多维随机变量的分布，需要同时了解其边缘分布和联合分布。