prob_week1

✍️内容

prob12liu.pdf

```
p13, 1.1节习题
6个任选3个
p17, 1.2节习题
6个任选3个
p26, 2.1节习题
(1) (4) (6) (10)
```

习题

1. 一个铁人三项运动员, 每一项获得的名次都可能是1到10名. 写出这个试验的样本空间.
2. 一个电码由0到9四位数字组成, 但由于各种因素的干扰, 发报员发出的数字都可能被接收为另外一个数字. 写出发送一个电码这个试验的样本空间.
3. 张三从甲地步行到乙地, 第一次行走, 未带地图. 包括甲地, 共有m处分叉路口, 其中第i个路口有m_i个道路可选. 写出这个试验的样本空间.
4. 投n次硬币, 写出样本空间.

   答案: 1. $\{-1,1\}^n$; 2. $[0,1]$上的连续函数f全体, $f(0)=0$, f在每一$[\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}]$上为线性函数, 且斜率的绝对值为1.
5. 将扔硬币的试验无穷此重复下去, 写出这个试验的样本空间.

   (答案: $[0,1)$)
6. 一项流行病调查,调查对象为A,B,C,D四种疾病,结果为α,β,γ三种症状.写出这个试验的样本空间.

1 样本空间: $\Omega=\{1,2,\ldots,10\}^3$

2 $\Omega=\{0,1,\ldots,9\}^4$

3 对于第 i 个路口，为每个可选择的道路标号 $1,\dots,m_i$，第 i 个坐标表示第 i 个路口，于是

$$\Omega=\prod_{1\le i\le m}\{1,\dots,m_i\}:=\{(a_1,a_2,\dots,a_m):a_i\in\{1,2,\dots,m_i\},\forall 1\le i\le m\}$$

4 对于答案 1，存在自然同构

$$\begin{aligned}\phi:\{\text{正},\text{负}\}^n &\xrightarrow{\sim}\{1,-1\}^n\\ \text{正}&\longmapsto 1\\ \text{负}&\longmapsto -1\end{aligned}$$

对于答案 2，存在自然映射

$$\psi:\coprod_n\{1,-1\}\longrightarrow C[0,1]$$

将 $(\{1,-1\},i)$ 自然地映到答案中的<u>分段线性函数</u> f 在区间 $\left[\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}\right]$ 上的斜率 1 或 -1. 显然有自然同构:

$$\coprod_n\{\text{正},\text{负}\}\cong\coprod_n\{1,-1\}\cong\mathrm{Im}\psi$$

5 对于答案，用 1 表示正面，0 表示反面。用 I 表示抛出的次数指标集 (这是个无限集)，有自然同构

$$\begin{aligned}\phi:\coprod_{i\in I}\{1,0\}&\longrightarrow[0,1)\\ \dots\cup(1,i)\cup\dots&\longmapsto\dots+1\cdot 2^{-i}+\dots\\ \dots\cup(0,i)\cup\dots&\longmapsto\dots+0\cdot 2^{-i}+\dots\end{aligned}$$

首先 ϕ 显然是单的，其次在二进制小数的观点下，ϕ 显然是满的。集合范畴中的双射是同构，即

$$\coprod_{i\in I}\{1,0\}\cong[0,1)$$

6 指标集 $I:=\{\alpha,\beta,\gamma\}$. 于是样本空间

$$\Omega = \cancel{\coprod_{i\in I}\{A,B,C,D\}}$$

上面写错了，似乎是 $\bigcup\limits_{i,j,k,l\in I}\{(A,i),(B,j),(C,k),(D,l)\}$.

Note

上面的符号 $\coprod$ 表示集合范畴中的 coproduct (即集合中的无交并)，定义如下

定义 4.5 (集合的无交并)

令 A,B 是两个集合，我们定义它们的无交并为 $A\coprod B=\{(a,1):a\in A\}\cup\{(b,2):b\in B\}$。♣

习题

1. 证明:

(a)

$$A\setminus B = AB^c;$$

(b)

$$(A\cup B)C = AC\cup BC;$$

(c)

$$(A\setminus B)C = AC\setminus BC;$$

(d)

$$(A\setminus B)\cup C = (A\cup C)\setminus BC^c;$$

1 Proof:

(a) $\forall x\in A\setminus B$, 有
$x\in A, x\notin B \implies x\in B^c \implies x\in A\cap B^c = AB^c \implies .A\setminus B\subseteq AB^c$.

$\forall x\in AB^c$，有
$x\in A, x\in B^c \implies x\notin B \implies x\in A\setminus B \implies AB^c\subseteq A\setminus B \implies A\setminus B = AB^c$.

(b) $\forall x\in(A\cup B)C$, 有 $x\in A\cup B, x\in C$，若 $x\in A$, 则 $x\in AC$，若 $x\in B$，则 $x\in BC$，则 $x\in AC\cup BC \implies (A\cup B)C\subseteq AC\cup BC$.

$\forall x\in AC\cup BC$，有 $x\in AC$ 或 $x\in BC$, 总有 $x\in C$，而且要么 $x\in A$，要么 $x\in B$, 于是 $x\in(A\cup B)C \implies AC\cup BC\subseteq(A\cup B)C \implies (A\cup B)C = AC\cup BC$.

(c) $\forall x \in (A \setminus B)C$, 有 $x \in A, x \in B^c, x \in C$，于是 $x \in AC$，但 $x \notin BC \subseteq B$，于是 $x \in AC \setminus BC \implies (A \setminus B)C \subseteq AC \setminus BC$.

$\forall x \in AC \setminus BC$, 有 $x \in AC, x \notin BC$，于是 $x \in A, x \in C$, 显然 $x \notin B$（否则 $x \in BC$），于是 $x \in A \setminus B$，故 $x \in (A \setminus B)C \implies (AC \setminus BC) \subseteq (A \setminus B)C \implies (AC \setminus BC) = (A \setminus B)C$.

(d) $\forall x \in (A \setminus B) \cup C$，有 $x \in A \setminus B$ 或者 $x \in C$，显然有 $x \in A \cup C$，若 $x \in BC^c$，则 $x \in B, x \in C^c$，于是 $x \in A \setminus B, x \in A$，于是 $x \notin B$，矛盾，故 $x \in (A \cup C) \setminus BC^c \implies (A \setminus B) \cup \subseteq (A \cup C) \setminus BC^c$.

$\forall x \in (A \cup C) \setminus BC^c$，有 $x \in A \cup C, x \notin BC^c$, 于是 $x \in (BC^c)^c = C \cup B^c$, 要么 $x \in C$，要么 $x \notin C^c$，此时 $x \in B^c, x \in A$，于是 $x \in A \setminus B$，于是 $x \in (A \setminus B) \cup C \implies (A \setminus B) \cup C \subseteq (A \cup C) \setminus BC^c \implies (A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus BC^c$.

2. 证明:

(a)
$$1_{\liminf_{n\to\infty} A_n} = \liminf_{n\to\infty} 1_{A_n}$$

(b)
$$1_{\limsup_{n\to\infty} A_n} = \limsup_{n\to\infty} 1_{A_n}$$

(c)
$$\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n.$$

2 (a) 只需证

显然由定义有

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \subseteq A_k \implies 1_{\liminf_{n\to\infty} A_n} \leq 1_{A_k}, \qquad \forall k \geq 1$$

于是

$$1_{\liminf_{n\to\infty} A_n} \leq \liminf_{n\to\infty} 1_{A_n}$$

显然由定义有

$$1_{A_k} \geq \liminf_{n\to\infty} 1_{A_n}, \qquad \forall k \geq 1$$

于是

$$1_{\liminf_{n\to\infty} A_n} \geq \liminf_{n\to\infty} 1_{A_n}$$

因此

$$1_{\liminf_{n\to\infty} A_n} = \liminf_{n\to\infty} 1_{A_n}$$

2 (b)

由 (a) 可知

$$1_{\liminf_{n\to\infty} A_n^c} = \liminf_{n\to\infty} 1_{A_n^c}$$

于是

$$1_{\limsup_{n\to\infty} A_n} = 1_{\lim_{n\to\infty} \cup_{k\geq n} A_k} = 1_{\Omega \setminus (\lim_{n\to\infty} \cup_{k\geq n} A_n)^c} = 1_{\Omega \setminus (\lim_{n\to\infty} \cap_{k\geq n} A_k^c)} = 1_{\Omega} - 1_{\mathrm{li}}$$

同理

$$\limsup_{n\to\infty} 1_{A_n} = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} 1_{A_k} = \lim_{n\to\infty} 1_{\cup_{k\geq n} A_k} = \lim_{n\to\infty} 1_{\Omega} - 1_{\cap_{k\geq n} A_k^c} = 1_{\Omega} - \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n}$$

因此

$$1_{\limsup_{n\to\infty} A_n} = \limsup_{n\to\infty} 1_{A_n}$$

2 (c)

事实上

$$\bigcap_{k\geq n} A_k \subseteq \bigcup_{k\geq n} A_k \qquad \forall k, n \geq 0$$

于是

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \bigcap_{k\geq n} A_k \subseteq \lim_{n\to\infty} \bigcup_{k\geq n} A_k = \limsup_{n\to\infty} A_n$$

3. 定义对称差:

$$A\Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

证明:

(a)

$$A\Delta B = B\Delta A;$$

(b)

$$(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C) = (C\Delta A)\Delta B;$$

所以可把它们统一地记为

$$A\Delta B\Delta C.$$

一般地, 也可定义

$$A_1\Delta A_2\Delta A_3 \cdots \Delta A_n.$$

(c)

$$\begin{aligned} 1_{A\Delta B} &= 1_A + 1_B - 21_{AB} \\ &= |1_A - 1_B|; \end{aligned}$$

3 Proof: (a)

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (B \setminus A) \cup (A \setminus B) = B\Delta A$$

(b) 由 (a) 可知，只需证：$(A\Delta B)C = A\Delta(B\Delta C)$

$$\begin{aligned} (A\Delta B)\Delta C &= ((A\Delta B) \setminus C) \cup (C \setminus (A\Delta B)) \\ &= (((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \setminus C) \cup (C \setminus ((A \setminus B) \cup (B \setminus A))) \\ &= ((A \setminus B) \setminus C) \cup ((B \setminus A) \setminus C) \cup ((C \setminus A) \setminus B) \cup (A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

验证 $C \setminus ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) = ((C \setminus A) \setminus B) \cup (A \cap B \cap C)$.

$\forall x \in C \setminus ((A \setminus B) \cup (B \setminus A))$, 有
$x \in C, x \notin (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \Rightarrow x \in (A \setminus B)^c, x \in (B \setminus A)^c$，于是
$x \in A^c \cup B, x \in A \cup B^c$。若 $x \in A$，则 $x \in B$，于是 $x \in A \cap B \cap C$。若 $x \notin A$，则
$x \in A^c$，故 $x \in B^c$，于是 $x \in (C \setminus A) \setminus B$。因此 $x \in ((C \setminus A) \setminus B) \cup (A \cap B \cap C)$.

$\forall x \in ((C \setminus A) \setminus B) \cup (A \cap B \cap C) = (A^c \cap B^c \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$，显然 $x \in C$, 要么
$x \in A \cap B$, 要么 $x \in A^c \cap B^c$，不可能有 $x \in A \cap B^c = A \setminus B$, 与 $x \in A^c \cap B = B \setminus A$
，故 $x \in C \setminus ((A \setminus B) \cup (B \setminus A))$. 因此
$C \setminus ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) = ((C \setminus A) \setminus B) \cup (A \cap B \cap C)$.

同理由对称性可知:

$$A\Delta(B\Delta C) = (B\Delta C)\Delta A = ((A \setminus B) \setminus C) \cup ((B \setminus A) \setminus C) \cup ((C \setminus A) \setminus B) \cup ($$

因此

$$(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C) = (C\Delta A)\Delta B$$

(c)

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \setminus AB) \cup (B \setminus AB) = (A \cup B) \setminus AB$$

于是

$$\begin{aligned} 1_{A\Delta B} &= 1_{A\cup B} - 1_{AB} = 1_A + 1_B - 2 \cdot 1_{AB} \\ &= 1_A^2 + 1_B^2 - 2 \cdot 1_A \cdot 1_B = (1_A - 1_B)^2 \\ &= \sqrt{(1_A - 1_B)^2} = |1_A - 1_B| \end{aligned}$$

4. 证明:

(a)

$$1_{A\cup B\cup C} = 1_A + 1_B + 1_C - 1_{A\cap B} - 1_{B\cap C} - 1_{C\cap A} + 1_{ABC};$$

(b)

$$1_{ABC} = 1 - 1_{A^c} - 1_{B^c} - 1_{C^c} + 1_{A^cB^c} + 1_{B^cC^c} + 1_{C^cA^c} - 1_{A^cB^cC^c};$$

(c)

$$1_{\cup_{i=1}^n A_i} = \sum_{i=1}^n 1_{A_i} - \sum_{i\neq j} 1_{A_iA_j} + \cdots + (-1)^{n-1} 1_{A_1\cdots A_n}.$$

(d) 若A_i互不相交, $i=1,2,\cdots,n$, $n\in\mathbb{N}_+$或$n=\infty$. 则

$$1_{\cup_{i=1}^n A_i}=\sum_{i=1}^n 1_{A_i}.$$

(e) 设$\{a_n(\omega)\}$是依赖于参数ω的实数列, $a(\omega)$是实数. 证明:

$$\{\omega: a_n(\omega)\to a(\omega)\}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty}\left\{\omega:|a_m(\omega)-a(\omega)|<\frac{1}{k}\right\}.$$

(f) 设$A_1,\cdots,A_n$是事件.

(i) 表示出事件"$A_1,\cdots,A_n$"中恰有一个发生;

(ii) 表示出事件"$A_1,\cdots,A_n$"中至少有两个发生;

(iii) 表示出事件"$A_1,\cdots,A_n$"中最多有五个发生;

(iv) 表示出事件"$A_1,\cdots,A_n$"中一个都不发生;

(g) (i) 证明对称差的结合律

$$(A\Delta B)\Delta C=A\Delta(B\Delta C).$$

(ii) 证明:

$$A_1\Delta A_2\Delta A_3\cdots\Delta A_n=\bigcup_{N(I)=\text{奇数}}\left(\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)\bigcap\left(\bigcup_{j\in I^c}A_j^c\right)\right).$$

(iii) 证明对称差的分配律:

$$A\left(A_1\Delta A_2\Delta A_3\cdots\Delta A_n\right)=B_1\Delta B_2\Delta B_3\cdots\Delta B_n,$$

其中$B_i:=AA_i$.

4 (a) 由 Venn 图显然

(b) 将 A,B,C 分别替换为 A^c,B^c,C^c 即可

(c)

$$(y-1_{A_1}(x))\cdot\cdots\cdot(y-1_{A_n}(x))=y^n-y^{n-1}\cdot\sum_{i=1}^n 1_{A_i}(x)+\cdots+(-1)^n 1_{A_1}(x)$$

取 $y\equiv 1$，就有

$$1_{A_1^c}(x)\cdot\dots\cdot 1_{A_n^c}(x)=1-\sum_{i=1}^{n}1_{A_i}(x)+\dots+(-1)^n 1_{A_1}(x)\cdot\dots\cdot 1_{A_n}(x)$$

于是

$$1_{A_1^c\dots A_n^c}(x)=1-\sum_{i=1}^{n}1_{A_i}(x)+\dots+(-1)^n 1_{A_1\dots A_n}(x)$$

由于 $1_{A_1^c\dots A_n^c}=1-1_{\cup_{i=1}^n A_i}$, 于是

$$1_{\cup_{i=1}^n A_i}=\sum_{i=1}^{n}1_{A_i}-\sum_{i\neq j}1_{A_iA_j}+\dots+(-1)^{n-1}1_{A_1\cdots A_n}$$

(d)

由 (c) 直接得到

$$1_{\cup_{i=1}^n A_i}=\sum_{i=1}^{n}1_{A_i}\underbrace{-\sum_{i\neq j}1_{A_iA_j}+\dots+(-1)^{n-1}1_{A_1\cdots A_n}}_{=0,\text{因为}A_i,A_j\text{无交}}$$

(e)

简单的实变想法

逐点考虑，若对于 ω，有 $a_m(\omega)\to a(\omega)(as\ m\to\infty)$. 于是由极限的定义：对于任意 $k\in\mathbb{Z}_{>0}$，存在正整数 N, 使得

$$|a_m(\omega)-a(\omega)|<\frac{1}{k}\qquad\forall m\geq N$$

于是 $\omega\in\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty}\left\{\omega:|a_m(\omega)-a(\omega)|<\frac{1}{k}\right\}$.

相反地，显然有 $\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty}\left\{\omega:|a_m(\omega)-a(\omega)|<\frac{1}{k}\right\}\subseteq\{\omega:a_n(\omega)\to a(\omega)\}$.

因此

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty}\left\{\omega : |a_m(\omega)-a(\omega)|<\frac{1}{k}\right\}=\{\omega : a_n(\omega)\to a(\omega)\}$$

(f)

(i) $\sum_{i=1}^{n} 1_{A_i}(x)=1$

(ii) $\sum_{i=1}^{n} 1_{A_i}(x)\geq 2$

(iii) $\sum_{i=1}^{n} 1_{A_i}(x)\leq 5$

(iv) $\sum_{i=1}^{n} 1_{A_i}(x)=0$

(g)

Note

将这些集合的集合记为 $\mathcal{R}$，则 $(\mathcal{R},\Delta,\cap)$ 构成一个交换环，见我的笔记 document.pdf (easygl1der.github.io) (https://easygl1der.github.io/MyWebsite/%E7%AC%94%E8%AE%B0/document.pdf#page=113) 。

(g) (i) 证明对称差的结合律

$$(A\Delta B)\Delta C=A\Delta(B\Delta C).$$

(ii) 证明:

$$A_1\Delta A_2\Delta A_3\cdots\Delta A_n=\bigcup_{N(I)=\text{奇数}}\left(\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)\bigcap\left(\bigcup_{j\in I^c}A_j^c\right)\right).$$

(iii) 证明对称差的分配律:

$$A\left(A_1\Delta A_2\Delta A_3\cdots\Delta A_n\right)=B_1\Delta B_2\Delta B_3\cdots\Delta B_n,$$

其中$B_i:=AA_i$.

(i) 由 Ex 3 可知

(ii) $n=2$ 时,

$$
\begin{aligned}
A_1 \Delta A_2 &= (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_1) = (A_1 \cap A_2^c) \cup (A_2 \cap A_1^c) \\
&= \bigcup_{I \in \{\{1\},\{2\}\}} \left(\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \cap \left(\bigcup_{j \in I^c} A_j^c \right) \right) \\
&= \bigcup_{N(I)=\text{奇数}} \left(\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \cap \left(\bigcup_{j \in I^c} A_j^c \right) \right)
\end{aligned}
$$

$n=3$ 时,

$$
\begin{aligned}
A_1 \Delta A_2 \Delta A_3 &= ((A_1 \setminus A_2) \setminus A_3) \cup ((A_2 \setminus A_1) \setminus A_3) \cup ((A_3 \setminus A_1) \setminus A_2) \cup (A_1 \cap \\
&= (A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c) \cup (A_2 \cap A_1^c \cap A_3^c) \cup (A_3 \cap A_1^c \cap A_2^c) \cup (A_1 \cap A
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bigcup_{N(I)=\text{奇数}} \left(\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \cap \left(\bigcup_{j \in I^c} A_j^c \right) \right) &= \bigcup_{I=\{\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2,3\}\}} \left(\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \cap \left(\bigcup_{j \in I^c} A \right.\right. \\
&= (A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c) \cup (A_2 \cap A_1^c \cap A_3^c) \cup (A \\
&= A_1 \Delta A_2 \Delta A_3
\end{aligned}
$$

假设对 n 成立，下面对 $n+1$ 证明

$$
A_1 \Delta A_2 \Delta A_3 \cdots \Delta A_{n+1} = \bigcup_{N(I)=\text{奇数}} \left(\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \bigcap \left(\bigcup_{j \in I^c} A_j^c \right) \right)
$$

由归纳假设

$$
\begin{aligned}
A_1\Delta A_2\Delta A_3\cdots\Delta A_{n+1} &= \left(\bigcup_{\substack{N(I)=\text{奇数}\\ I\subseteq\{1,2,\ldots,n\}}}\left(\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)\bigcap\left(\bigcup_{j\in I^c}A_j^c\right)\right)\right)\Delta A_{n+1}\\
&=\left(\left(\bigcup_{\substack{N(I)=\text{奇数}\\ I\subseteq\{1,2,\ldots,n\}}}\left(\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)\bigcap\left(\bigcup_{j\in I^c}A_j^c\right)\right)\right)\bigcap A_{n+1}^c\right)\bigcup\left(A_{n+1}\bigcap\left(\bigcup_{\substack{N(I)=\\ I\subseteq\{1,2,\ldots}}\right.\right.\\
&=\left(\bigcup_{\substack{N(I)=\text{奇数}\\ I\subseteq\{1,2,\ldots,n\}}}\left(\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)\bigcap\left(\bigcup_{j\in I^c}A_j^c\right)\bigcap A_{n+1}^c\right)\right)\bigcup\left(A_{n+1}\bigcap\left(\bigcup_{\substack{N(I)=\text{奇数}\\ I\subseteq\{1,2,\ldots,n\}}}\right.\right.\\
&:=E_1\cup E_2
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
E_1 &= \bigcup_{\substack{N(I)=\text{奇数}\\ I\subseteq\{1,2,\ldots,n\}}}\left(\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)\bigcap\left(\bigcup_{j\in I^c}A_j^c\right)\bigcap A_{n+1}^c\right)\\
&= \bigcup_{\substack{N(I)=\text{奇数}\\ I\subseteq\{1,2,\ldots,n\}}}\left(\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)\bigcap\left(\bigcup_{j\in I^c\cup\{n+1\}}A_j^c\right)\right)\\
&= \bigcup_{\substack{N(I)=\text{奇数}\\ I\subseteq\{1,2,\ldots,n+1\},n+1\notin I}}\left(\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)\bigcap\left(\bigcup_{j\in I^c}A_j^c\right)\right)
\end{aligned}
$$

断言

$$
E_2 = \bigcup_{\substack{N(I)=\text{奇数}\\ I\subseteq\{1,2,\ldots,n+1\},n+1\in I}}\left(\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)\bigcap\left(\bigcup_{j\in I^c}A_j^c\right)\right)
$$

即

$$A_{n+1}\bigcap\left(\bigcup_{\substack{N(I)=\text{奇数}\\ I\subseteq\{1,2,\ldots,n\}}}\left(\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)\bigcap\left(\bigcup_{j\in I^c}A_j^c\right)\right)\right)^c=\bigcup_{\substack{N(I)=\text{奇数}\\ I\subseteq\{1,2,\ldots,n+1\},n+1\in I}}\left(\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)\right.$$

> **Important**
>
> 注意这里的补，有的是关于全集 $A_1\cup\cdots\cup A_n$ 取，有的是关于全集 $A_1\cup\cdots\cup A_{n+1}$ 取。

简单验证即可知道：对于任意 n

$$\bigcup_{I\subseteq\{1,2,\ldots,n\}}\left(\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)\bigcap\left(\bigcup_{j\in I^c}A_j^c\right)\right)=\bigcup_{1\le i\le n}A_i$$

于是

$$\begin{aligned}
E_2=&A_{n+1}\bigcap\left(\bigcup_{\substack{N(I)=\text{奇数}\\ I\subseteq\{1,2,\ldots,n\}}}\left(\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)\bigcap\left(\bigcup_{j\in I^c}A_j^c\right)\right)\right)^c\\
=&A_{n+1}\bigcap\left(\bigcup_{\substack{N(I)=\text{偶数}\\ I\subseteq\{1,2,\ldots,n\}}}\left(\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)\bigcap\left(\bigcup_{j\in I^c}A_j^c\right)\right)\right)\\
=&\bigcup_{\substack{N(I)=\text{偶数}\\ I\subseteq\{1,2,\ldots,n\}}}\left(\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)\bigcap\left(\bigcup_{j\in I^c}A_j^c\right)\bigcap A_{n+1}\right)\\
=&\bigcup_{\substack{N(I)=\text{偶数}\\ I\subseteq\{1,2,\ldots,n\}}}\left(\left(\bigcup_{i\in I\cup\{n+1\}}A_i\right)\bigcap\left(\bigcup_{j\in I^c}A_j^c\right)\right)\\
=&\bigcup_{\substack{N(I)=\text{奇数}\\ I\subseteq\{1,2,\ldots,n+1\},n+1\in I}}\left(\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)\bigcap\left(\bigcup_{j\in I^c}A_j^c\right)\right)
\end{aligned}$$

因此

$$A_1 \Delta A_2 \Delta A_3 \cdots \Delta A_{n+1} = E_1 \cup E_2 = \bigcup_{N(I)=\text{奇数}} \left(\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \cap \left(\bigcup_{j \in I^c} A_j^c \right) \right)$$

归纳得证!

(iii)

> (iii) 证明对称差的分配律:
>
> $$A \left(A_1 \Delta A_2 \Delta A_3 \cdots \Delta A_n \right) = B_1 \Delta B_2 \Delta B_3 \cdots \Delta B_n,$$
>
> 其中$B_i := AA_i$.

Note

该分配率是显然的，因为 $(\mathcal{P}, \Delta, \cap)$ 构成交换环，下面我们简单验证

断言：$A(A_1 \Delta A_2) = (AA_1)\Delta(AA_2)$，此将推出

$$A(A_1 \Delta A_2 \Delta \ldots \Delta A_n) = (AA_1)\Delta(A(A_2 \Delta . . \Delta A_n)) = \cdots = (AA_1)\Delta(AA_2)\Delta .$$

即可得证。

断言的证明:

$$\begin{aligned} A(A_1 \Delta A_2) &= A((A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_1)) = A \cap ((A_1 \cap A_2^c) \cup (A_2 \cap A_1^c)) \\ &= (A \cap A_1 \cap A_2^c) \cup (A \cap A_2 \cap A_1^c) \\ &= (A \cap A_1 \cap A_2^c) \cup \underbrace{(A \cap A_1 \cap A^c)}_{\varnothing} \cup (A \cap A_2 \cap A_1^c) \cup \underbrace{(A \cap A_2 \cap A}_{\varnothing} \\ &= (A \cap A_1 \cap (A_2^c \cup A^c)) \cup (A \cap A_2 \cap (A_1^c \cup A^c)) \\ &= ((AA_1) \cap (AA_2)^c) \cup ((AA_2) \cap (AA_1)^c) \\ &= (AA_1)\Delta(AA_2) \end{aligned}$$

证毕!

5. 设Ω是样本空间, $A \subset \Omega$. 令

$$A_n = \begin{cases} A & n = 1, 3, 5, \cdots \\ A^c & n = 2, 4, 6, \cdots \end{cases}$$

求$\limsup_{n\to\infty} A_n$与$\liminf_{n\to\infty} A_n$.

5

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \bigcup_{k\geq n} A_k = \lim_{n\to\infty} \Omega = \Omega$$

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \bigcap_{k\geq n} A_k = \lim_{n\to\infty} \varnothing = \varnothing$$

6. 设$\{A_n\}$是一列集合, $n = 1, 2, \cdots$或$n = 1, 2, \cdots, N$均可, 其中N为正整数. 令

$$\tau(\omega) := \inf\{n : \omega \in A_n\},$$

$$B_n := \{\omega : \tau(\omega) = n\}.$$

证明$B_1, B_2, \cdots$互不相交且

$$\bigcup_n A_n = \bigcup_n B_n.$$

> **Note**
>
> 这个题很有意思

(1) 反证而设存在 $i \neq j$，使得 $B_i \cap B_j \neq \varnothing$，于是存在 $x \in B_i \cap B_j$ ，于是 $\tau(x) = i, \tau(x) = j$，这与 $\tau(x) = \inf\{n : x \in A_n\}$ 的唯一性矛盾。

因此 $B_1, B_2, \ldots$ 互不相交.

(2) $\forall x \in \bigcup\limits_n A_n$, 不妨设为无限并。在这里，一定有对于某个 N，$x \in A_N$，否则 $x \notin \bigcup\limits_n A_n$. 不妨设 N 是最小的, 使得 $x \in A_N$ 的数。于是 $\tau(x) = N$，于是 $x \in B_N \subseteq \bigcup\limits_n B_n$.

$\forall x \in \bigcup_n B_n$, $x \in B_N$, for some $N > 0$, thus $\inf\{n : x \in A_n\} = \tau(x) = N$, which means $x \in A_N \subseteq \bigcup_n A_n$.

Hence, $\bigcup_n A_n = \bigcup_n B_n$.

习题

1. 同时掷三枚硬币.

(a) 写出所有可能的结果;

(b) 所有结果出现的概率都相等吗?

(c) 求出这些概率.

把试验换为同时掷两枚骰子, 再做上面的问题.

1 (a) 结果:

$$\{正,正,正\},\{正,正,反\},\{正,反,反\},\{反,反,反\}$$

(b) 不相等

(c) 假设这些硬币是均匀的，那么这些概率为

$$P(\{正,正,正\}) = P(\{反,反,反\}) = \frac{1}{8}$$
$$P(\{正,正,反\}) = P(\{正,反,反\}) = \frac{3}{8}$$

把实验换为同时投掷两枚骰子

(a) 结果:

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2		(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3			(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4				(4,4)	(4,5)	(4,6)
5					(5,5)	(5,6)
6						(6,6)

(b) 不相等

(c) 概率为：

	1	2	3	4	5	6
1	1/36	1/18	1/18	1/18	1/18	1/18
2		1/36	1/18	1/18	1/18	1/18
3			1/36	1/18	1/18	1/18
4				1/36	1/18	1/18
5					1/36	1/18
6						1/36

2. 四只黑球和四只白球排成一列. 求所有黑白球都是间隔着的概率.

2

$$P=\frac{2}{\frac{8!}{4!\cdot 4!}}=\frac{1}{35}$$

3. 有3个黑球, 2个红球. 现依次挑出2个. 考虑有放回和无放回两种不同的挑法. 求下列事件的概率: 1. 第一次挑出的是红球; 2. 第二次挑出的是红球; 3.两个都是红球; 4. 两个都是黑球; 5. 第一个是黑球第二个是红球; 6. 第一个是红球第二个是黑球.

3

有放回：

$$\begin{aligned}
P_1&=2/5\\
P_2&=2/5\\
P_3&=4/25\\
P_4&=9/25\\
P_5&=6/25\\
P_6&=6/25
\end{aligned}$$

无放回：

$$
\begin{aligned}
P_1 &= 2/5 \\
P_2 &= 2/5 \\
P_3 &= 1/10 \\
P_4 &= 3/10 \\
P_5 &= 3/10 \\
P_6 &= 3/10
\end{aligned}
$$

4. 在$1,2,3,4,5$这5个数字中依次挑出两个，假设20种结果都是等可能的. 求下列概率: 1. 第一次挑出的是奇数; 2.第二次挑出的是奇数; 3. 两次都是奇数; 4. 两次都是偶数; 5. 第一次是奇数第二次是偶数; 6. 第一次是偶数第二次是奇数.

4

$$
\begin{aligned}
P_1 &= 3/5 \\
P_2 &= 3/5 \cdot 2/4 + 2/5 \cdot 3/4 = 3/5 \\
P_3 &= 3/5 \cdot 2/4 = 3/10 \\
P_4 &= 2/5 \cdot 1/4 = 1/10 \\
P_5 &= 3/5 \cdot 2/4 = 3/10 \\
P_6 &= 2/5 \cdot 3/4 = 3/10
\end{aligned}
$$

5. 将$1,3,8$三个数字随意排列，求排出来的数字大于350的概率.

5

$$P = \frac{1}{2}$$

6. 将m个球投入n个盒子中($m \leqslant n$)，求至少有一个盒子里有不止一个球的概率. (当$n = 365$时，这就是m个人中至少有两个人同生日的概率.)

6

$$P(\text{m个盒子中都只有1个球}) = \frac{n!}{(n-m)! \cdot n^m}$$

于是

$$P(\text{至少有一个盒子里有不止一个球}) = 1 - \frac{n!}{(n-m)! \cdot n^m}$$

7. 赤橙黄绿青蓝紫, 谁持彩练当空舞. 将赤橙黄绿青蓝紫七个球随机排列, 求赤橙黄三球按从左到右的顺序紧靠在一起的概率, 不计顺序紧靠在一起的概率.

7

$$P_1 = \frac{4! \cdot 5}{7!} = \frac{1}{42}, P_2 = \frac{3!}{42} = \frac{1}{7}$$

8. 将n个球投入n个桶中, 求刚好有一个桶是空桶的概率.

8

$$\boxed{\text{概率} = \frac{n \times C_n^2 \times (n-1)!}{n^n}} = \frac{(n-1) \cdot (n-1)!}{2n^{n-2}}$$

9. 一个人的帽子混在一堆n个帽子里, 他一个个地取出来. 求他在第k次取到自己帽子的概率$(1 \leqslant k \leqslant n)$.

9

$$P_k = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdots \frac{1}{n-k+1} = \frac{1}{n}$$

10. 设有n个球, 其中一个白球, 一个红球, $n-2$个黑球. 把它们随机排成一列. 求在白球和红球之间恰有r个黑球的概率, $r \leqslant n-2$.

10

$$P = \frac{2 \cdot (n-2-r)}{n(n-1)}$$

11. 某省有$A, B, \cdots, T$共60个县. 该省的某个高校的某个班共招收50人, 全部来自本省, 且每人来自任一县的概率相等, 各人之间是独立的. 求:

(a) 有k人来自A县的概率, $k = 0, 1, \cdots, 50$;

(b) 有某个县剃光头的概率;

(c) 有某个县不止一人的概率.

11

(a)

$$P_k = \binom{50}{k}\left(\frac{1}{60}\right)^k\left(\frac{59}{60}\right)^{50-k}$$

(b)

$$P = 1$$

(c)

$$P = \frac{C_{60}^{50} \cdot 50!}{60^{50}}$$