$\|f\|$表示$\sup\limits_{x\in I}|f|$

$3.(4)\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\arctan\dfrac{nx}{1+n^5x^2},-\infty<x<+\infty$

$\left|\sum\limits_{n=0}^{\infty}\arctan\dfrac{nx}{1+n^5x^2}\right|\le\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|\arctan\dfrac{nx}{1+n^5x^2}\right|\le\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n|x|}{1+n^5x^2}\le\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n|x|}{2n^{\frac{5}{2}}|x|}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}<\infty$,故一致收敛

$3.(6)\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{1+x^{2n}},|x|\ge1+\varepsilon$

$\left|\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{1+x^{2n}}\right|\le\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|\dfrac{x^n}{1+x^{2n}}\right|=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{|x|^n}{1+|x|^{2n}}\le\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{|x|}\right)^n\le\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{1+\varepsilon}\right)^n=\dfrac{1}{1-\frac{1}{1+\varepsilon}}=\dfrac{1}{\varepsilon}+1$

$3.(8)\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}x^2e^{-nx},x\ge0$

令$f_n(x)=x^2e^{-nx}$,求导可知$f_n(x)\le f_n\left(\dfrac{2}{n}\right)=\dfrac{4e^{-2}}{n^2}$,显然$\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n(x)$一致收敛

$3.(12)\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{\sqrt{n^2+x^2}},-\infty<x<+\infty$

$\left|\sum\limits_{n=m}^{\infty}\dfrac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{\sqrt{n^2+x^2}}\right|\le\left|\sum\limits_{n=m}^{\infty}\dfrac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{n}\right|\xrightarrow{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{n}\text{收敛}}0(as\ n\to\infty)$,故一致收敛

$3.(14)\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\sin(2n-1)x}{n^p},\varepsilon\le x\le\pi-\varepsilon$

$\left|\sum\limits_{k=0}^{n}\sin(2k-1)x\right|=\left|\dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n}\sin x\sin(2k-1)x}{\sin x}\right|=\left|\dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n}\cos(2k-2)x-\cos2kx}{2\sin x}\right|=\left|\dfrac{\cos(-2x)-\cos2nx}{2\sin x}\right|\le\dfrac{1}{\sin x}\le\dfrac{1}{\sin\varepsilon}$部分和有界

$\dfrac{1}{n^p}$随n单调递减趋于0，于是由狄利克雷判别法: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\sin(2n-1)x}{n^p}$一致收敛

6.设$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=\infty$且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{|a_n|}$收敛.证明：级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{x-a_n}$在不包含

$a_n(n=1,2,\cdots)$的任意有界闭区间上一致收敛.

Pf: ①$\varepsilon-N$语言:

考虑$x\in[a,b],a_n\notin[a,b],\forall n$.

$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=\infty\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N>0,s.t.\forall n>N$，有$|a_n|\ge\max\{|a|,|b|\}+1\ge|x|+1$且$\sum\limits_{n=N}^{\infty}\dfrac{1}{|a_n|}<\dfrac{\varepsilon}{\max\{|a|,|b|\}}$

$\Rightarrow\dfrac{1}{|a_n|-|x|}-\dfrac{1}{|a_n|}=\dfrac{|x|}{(|a_n|-|x|)|a_n|}\le\dfrac{|x|}{|a_n|}\le\dfrac{\max\{|a|,|b|\}}{|a_n|},\forall n>N$

$\left|\sum\limits_{n=N}^{\infty}\dfrac{1}{x-a_n}\right|\le\sum\limits_{n=N}^{\infty}\dfrac{1}{|x-a_n|}\le\sum\limits_{n=N}^{\infty}\dfrac{1}{|a_n|-|x|}\le\max\{|a|,|b|\}\sum\limits_{n=N}^{\infty}\dfrac{1}{|a_n|}\le\varepsilon.$

②极限语言:

$\left|\sum\limits_{n=N}^{\infty}\dfrac{1}{x-a_n}\right|\le\sum\limits_{n=N}^{\infty}\dfrac{1}{|x-a_n|}\le\sum\limits_{n=N}^{\infty}\dfrac{1}{|a_n|-|x|}\le\max\{|a|,|b|\}\sum\limits_{n=N}^{\infty}\dfrac{1}{|a_n|}\xrightarrow{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|a_n|}\text{收敛}}0(as\ N\to\infty)$

确定下列和函数的收敛域，讨论和函数连续性

8.(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2x^2}$

①$x=0$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}1$发散

②$x\neq 0$时，固定x，$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2x^2}\right|\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2x^2}=\frac{\pi^2}{6x^2}$,故收敛，收敛域为$\mathbb{R}^*$

①$x=0$处，取$x_n=\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}\to 0$可知$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{1+n^2x_n^2}\right)\right|=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{1+n^{\frac{4}{3}}}\right)\right|\to+\infty$,故不连续

②$x_0\neq 0$处,$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2x^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2x_0^2}\right|=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2x^2}-\frac{1}{1+n^2x_0^2}\right|=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2(x_0^2-x^2)}{(1+n^2x^2)(1+n^2x_0^2)}\right|$

$\leq\left|\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x_0^2}\right|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}\left|\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x_0^2}\right|\overset{\frac{1}{x^2}\text{在}\mathbb{R}^*\text{连续}}{\to}0(as\ x\to x_0)$,故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2x^2}$连续

综上: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2x^2}$在$\mathbb{R}^*$连续.

8.(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^4x^2}$

①$x=0$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^4x^2}=0$，收敛

②$x\neq 0$ 时，固定x，$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^4x^2}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n|x|}{1+n^4x^2}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\frac{1}{|x|}+n^4|x|}\leq\frac{1}{|x|}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$故收敛,收敛域为$\mathbb{R}$

①$x=0$处，取$x_n=\frac{1}{n^2}\to 0$可知$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{nx_n}{1+n^4x_n^2}-0\right)\right|=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}\right|\to+\infty$,故不连续

②$x_0\neq 0$处，$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^4x^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx_0}{1+n^4x_0^2}\right|=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^4x^2}-\frac{nx_0}{1+n^4x_0^2}\right|=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx(1+n^4x_0^2)-nx_0(1+n^4x^2)}{(1+n^4x^2)(1+n^4x_0^2)}\right|$

$=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x-x_0)+n^5xx_0(x_0-x)}{(1+n^4x^2)(1+n^4x_0^2)}\right|=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+n^5xx_0}{(1+n^4x^2)(1+n^4x_0^2)}\right||x-x_0|\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|n+n^5xx_0|}{(1+n^4x^2)(1+n^4x_0^2)}|x-x_0|$

$\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+n^5|xx_0|}{(1+n^4x^2)(1+n^4x_0^2)}|x-x_0|\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+n^5|xx_0|}{n^8x^2x_0^2}|x-x_0|=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^8x^2x_0^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5|xx_0|}{n^8x^2x_0^2}\right)|x-x_0|$

$=\left(\frac{1}{x^2x_0^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^7}+\frac{1}{|xx_0|}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\right)|x-x_0|=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^7}\right|\left|\frac{x-x_0}{x^2x_0^2}\right|+\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\right|\left|\frac{1}{|x|}-\frac{1}{|x_0|}\right|\to 0(as\ x\to x_0\neq 0)$,故连续

因此，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^4x^2}$在$\mathbb{R}^*$上连续.

8.(6) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 e^{-nx}$

①$x \le 0$时，$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 e^{-nx} \ge \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \to +\infty$,发散

②$x > 0$时，固定x，$\frac{d(n^3 e^{-nx})}{n} = n^2(-e^{-nx})(nx-3)$于是$n \ge \left[\frac{3}{x}\right]$时,$n^3 e^{-nx}$递减

$$\sum_{n=\left[\frac{3}{x}\right]+1}^{\infty} n^3 e^{-nx} \le \int_{\left[\frac{3}{x}\right]}^{+\infty} t^3 e^{-tx} dt = \frac{1}{x^4}\int_{\left[\frac{3}{x}\right]}^{+\infty} y^3 e^{-y} dy \le \frac{1}{x^4}\int_0^{+\infty} y^3 e^{-y} dy = \frac{\Gamma(4)}{x^4} = \frac{6}{x^4}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 e^{-nx} = \sum_{n=1}^{\left[\frac{3}{x}\right]} n^3 e^{-nx} + \sum_{n=\left[\frac{3}{x}\right]+1}^{\infty} n^3 e^{-nx} \le \sum_{n=1}^{\left[\frac{3}{x}\right]} n^3 e^{-nx} + \frac{6}{x^4} < \infty$,于是$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 e^{-nx}$收敛,故收敛域为$(0,+\infty)$

①$x=0$处,取$x_n = \frac{1}{n} \to 0$可知$\left|\sum_{n=1}^{\infty} n^3 e^{-nx_n}\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e}\right| \to +\infty$,故不连续

②$x_0 \ne 0$处，$\left|\sum_{n=1}^{\infty} n^3 e^{-nx} - \sum_{n=1}^{\infty} n^3 e^{-nx_0}\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} n^3 (e^{-nx} - e^{-nx_0})\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} n^4 e^{-n\xi(n)}\right| |x - x_0|$,其中$\xi(n)$介于$x$和$x_0$之间

x充分接近x_0时，x和x_0同号.

①若$x_0 > 0$,则$\xi(n) > 0$,显然$\left|\sum_{n=1}^{\infty} n^4 e^{-n\xi(n)}\right| < \infty$,

$\left|\sum_{n=1}^{\infty} n^3 e^{-nx} - \sum_{n=1}^{\infty} n^3 e^{-nx_0}\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} n^4 e^{-n\xi(n)}\right| |x - x_0| \to 0 (as\ x \to x_0)$

②若$x_0 < 0$,则$\xi(n) < 0$,

$\left|\sum_{n=1}^{\infty} n^3 e^{-nx} - \sum_{n=1}^{\infty} n^3 e^{-nx_0}\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} n^4 e^{-n\xi(n)}\right| |x - x_0|$

取$x_n = x_0 - \frac{1}{n}$,就有$\left|\sum_{n=1}^{\infty} n^4 e^{-n\xi(n)}\right| |x_n - x_0| = \sum_{n=1}^{\infty} n^3 e^{-n\xi(n)} \overset{\xi(n)<0}{\ge} \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \to \infty$,故不连续

所以$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 e^{-nx}$在$(0,+\infty)$连续，在$(-\infty,0]$不连续.

8.(8). 先考虑 $\ln[1+(-1)^{n-1}\frac{x}{n}]$ 有定义. 得到 $x\in(-1,2)$.

固定 x. ~~$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+(-1)^{n-1}\frac{x}{n})\right|$~~. $n\to\infty$ 时

收敛.

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty}\ln\left[1+(-1)^{k-1}\frac{x}{k}\right]\right| = \left|\sum_{k=n}^{\infty}\left[(-1)^{k-1}\frac{x}{k}+O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right]\right| = \left|\sum_{k=n}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x}{k}\right| + O\left(\frac{1}{n}\right)\to 0$$

于是 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N>0$. s.t. $\forall n\geq N$. 有

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty}\ln\left[1+(-1)^{k-1}\frac{x}{k}\right]\right| < \varepsilon/2$$

于是 $\forall m>n>N$. 有.

$$\left|\sum_{k=n}^{m}\ln\left[1+(-1)^{k-1}\frac{x}{k}\right]\right| \leq \left|\sum_{k=n}^{\infty}\ln\left[1+(-1)^{k-1}\frac{x}{k}\right]\right| + \left|\sum_{k=m}^{\infty}\ln\left[1+(-1)^{k-1}\frac{x}{k}\right]\right| < \varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

由 Cauchy 收敛准则: $\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left[1+(-1)^{k-1}\frac{x}{k}\right]$ 收敛.

对于任意给定的 $x_0\in(-1,2)$. $\ln(1+(-1)^{k-1}\frac{x}{k})-\ln(1+(-1)^{k-1}\frac{x_0}{k}) = \dfrac{\frac{(-1)^{k-1}}{k}}{1+(-1)^{k-1}\frac{\xi(k)}{k}}(x-x_0)$

(Lagrange 中值定理). 其中 $\xi(k)$ 是与 k 相关的, 介于 x_0, x 之间的数.

于是 $\left|\sum_{k=1}^{\infty}\left[\ln(1+(-1)^{k-1}\frac{x}{k})-\ln(1+(-1)^{k-1}\frac{x_0}{k})\right]\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k+(-1)^{k-1}\xi(k)}\right| |x-x_0| = \left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}k-\xi(k)}{k^2-\xi(k)}\right| |x-x_0|$.

断言 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}k-\xi(k)}{k^2-\xi(k)}$ 收敛. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}k}{k^2-\xi(k)} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k-\frac{\xi(k)}{k}}$. 由于 $\xi(k)\in(-1,2)$. 故.

$k+1-\frac{\xi(k+1)}{k+1} > k-\frac{\xi(k)}{k} \Leftrightarrow 1>\frac{\xi(k+1)}{k+1}-\frac{\xi(k)}{k} \Leftarrow 1>\frac{2}{k}+\frac{2}{k} \Leftrightarrow k>4$. 于是 $k>4$ 时 $\frac{1}{k-\frac{\xi(k)}{k}}\downarrow 0$

故 $\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k-\frac{\xi(k)}{k}}\right|<\infty$, 而 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\xi(k)}{k^2-\xi(k)} \leq \left|\sum_{k=1}^{3}\frac{\xi(k)}{k^2-\xi(k)}\right| + \left|\sum_{k=4}^{\infty}\frac{\xi(k)}{k^2-\xi(k)}\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{3}\frac{\xi(k)}{k^2-\xi(k)}\right| + \left|\sum_{k=4}^{\infty}\frac{2}{k^2-2}\right|<\infty$

于是 $\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}k-\xi(k)}{k^2-\xi(k)}\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}k}{k^2-\xi(k)}\right| + \left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\xi(k)}{k^2-\xi(k)}\right|<\infty$. 于是 $x\to x_0$ 时, 有

$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\ln(1+(-1)^{k-1}\frac{x}{k})-\ln(1+(-1)^{k-1}\frac{x_0}{k})\right]\to 0$ 故. 和函数连续

12.研究下列函数级数的和函数在指定区间中的连续性和可微性(包括高阶可微性)

12.(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}, -\infty<x<+\infty$

首先$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|}{1+n^4x^2}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|}{2n^2|x|}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}=\frac{\pi^2}{12}<\infty$,故一致收敛

又因为$\frac{x}{1+n^4x^2}$在$\mathbb{R}$上连续，故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$在$\mathbb{R}$上连续

记$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}, f_n(x)=\frac{x}{1+n^4x^2}, f_n'(x)=\frac{1-n^4x^2}{(1+n^4x^2)^2}, f_n''(x)=\frac{2n^4x(n^4x^2-3)}{(1+n^4x^2)^3}$

$\frac{d^k\frac{x}{1+n^4x^2}}{dx^k}=\sum_{i=0}^{k}C_k^i(x)^{(k-i)}\left(\frac{1}{1+n^4x^2}\right)^{(i)}=k\left(\frac{1}{1+n^4x^2}\right)^{(k-1)}+x\left(\frac{1}{1+n^4x^2}\right)^{(k)}$,导数在$\mathbb{R}$上存在

先考虑一阶导$f_n'(x)$,对于任意$\varepsilon>0$,

①显然$\sum_{n=1}^{\infty}f_n'(x)$在$(-\varepsilon,\varepsilon)$不一致收敛,因为$\sup_{-\varepsilon<x<\varepsilon}\left|\sum_{n=m}^{\infty}f_n'(x)\right|\ge\left|\sum_{n=m}^{\infty}f_n'(0)\right|=\left|\sum_{n=m}^{\infty}1\right|\to\infty(as\ m\to\infty)$

$\sum_{n=1}^{\infty}f_n'(x)$在$(-\infty,-\varepsilon]\cup[\varepsilon,+\infty)$一致收敛,取$m$使得:$\forall|x|\ge\varepsilon,\forall n\ge m$,有$n^4x^2-3>0$

$\sup_{|x|\ge\varepsilon}\left|\sum_{n=m}^{\infty}f_n'(x)\right|\le\left|\sum_{n=m}^{\infty}f_n'(\varepsilon)\right|=\left|\sum_{n=m}^{\infty}\frac{1-n^4\varepsilon^2}{(1+n^4\varepsilon^2)^2}\right|\to0(as\ m\to\infty)$,故一致收敛.

所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$在$(-\infty,-\varepsilon]\cup[\varepsilon,+\infty)$上可以逐项微分,$i.e.\ \frac{df(x)}{dx}=\frac{d\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)}{dx}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{df_n(x)}{dx}$

②$x\in(-\varepsilon,\varepsilon)$时,$\lim_{x\to0}\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}-0}{x-0}=\lim_{x\to0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^4x^2}\ge\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^4\varepsilon^2}\ge\frac{1}{\varepsilon^2}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\right|$

由ε任意性,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$在$\mathbb{R}^*$处可以逐项微分,在0处不能逐项微分.

$12.(4)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx^2}}{n^2},-\infty<x<+\infty$

记$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx^2}}{n^2},f_n(x)=\frac{e^{-nx^2}}{n^2},-\infty<x<+\infty$

$|f(x)|=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx^2}}{n^2}\right|\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$,一致收敛

由于$f_n(x)\in C(\mathbb{R}),\forall n$,故$f(x)\in C(\mathbb{R})$

$f_n'(x)=-\frac{2x}{n}e^{-nx^2},f_n''(x)=\left(4x^2-\frac{2}{n}\right)e^{-nx^2}$,故$|f_n'(x)|\leq\left|f_n'\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)\right|=\sqrt{\frac{2}{e}}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

于是$\sum_{n=1}^{\infty}f_n'(x)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{e}}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}<\infty$,一致收敛

故$f(x)$在$\mathbb{R}$上可以逐项微分

12.(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}, -\infty < x < +\infty$

记$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}, f_n(x) = \frac{\cos nx}{n^3}$

$|f(x)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3} < \infty$,故一致收敛

由于$f_n(x) = \frac{\cos nx}{n^3} \in C(\mathbb{R})$,故$f(x) \in C(\mathbb{R})$

由于$f_n'(x) = -\frac{\sin nx}{n^2}, \left|\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$,故一致收敛

于是$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}$在$\mathbb{R}$上可以逐项微分

12.(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}, -\infty < x < +\infty$

记$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}, f_n(x) = \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$

$|f(x)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} < \infty$,故一致收敛

由于$f_n(x) = \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}} \in C(\mathbb{R})$,故$f(x) \in C(\mathbb{R})$

由于$f_n'(x) = \frac{\cos nx}{\sqrt{n}}$,断言$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$在任意区间$(a,b) \subset \mathbb{R}$上不一致收敛,故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$处处不可逐项微分.

对于任意给定的区间(a,b),固定a,b,选取$x_n = \frac{2\pi}{n}\left\lfloor\frac{nb}{2\pi}\right\rfloor, n > \frac{2\pi}{b-a}$时,显然有$x_n \in (a,b)$

考虑$\sum_{n=\left\lceil\frac{2\pi}{b-a}\right\rceil}^{\infty} f_n'(x_n) = \sum_{n=\left\lceil\frac{2\pi}{b-a}\right\rceil}^{\infty}\frac{\cos n\frac{2\pi}{n}\left\lfloor\frac{nb}{2\pi}\right\rfloor}{\sqrt{n}} = \sum_{n=\left\lceil\frac{2\pi}{b-a}\right\rceil}^{\infty}\frac{\cos 2\pi\left\lfloor\frac{nb}{2\pi}\right\rfloor}{\sqrt{n}} = \sum_{n=\left\lceil\frac{2\pi}{b-a}\right\rceil}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} \to \infty$,故$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$发散

故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$处处不可逐项微分.

例题 0.1. 习题 11.1 第 3 题

研究下列函数序列在指定区间上是否一致收敛，并给出证明：

(1) $f_n(x) = x^n, n = 1, 2, \cdots$.

- $0 \le x \le a(0 < a < 1)$
- $0 \le x < 1$

((3)) $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}, n = 1, 2, \cdots$

- $0 \le x \le 1$
- $1 \le x < +\infty$

(5) $f_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n, n = 1, 2, \cdots$

- $a \le x \le b(-\infty < a < b < +\infty)$
- $-\infty < x < +\infty$

定义 0.1 (一致收敛的等价刻画)

f_n 在区间 I 上一致收敛于 f 当且仅当

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0. \tag{1}$$

证明

(1) f_n 收敛于 $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$

- $0 \le x \le a(0 < a < 1)$ 时，

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\le x\le a} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{0\le x\le a} |x^n| = \lim_{n\to\infty} a^n = 0 \tag{2}$$

故一致收敛.

- $0 \le x < 1$ 时，

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\le x<1} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{0\le x<1} |x^n - 0| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in 0\le x\le 1} |x^n| = 1 \ne 0 \tag{3}$$

故不一致收敛.

(3) f_n 收敛于 $f(x) \equiv 0, \forall x \in [0, +\infty)$

- $0 \le x \le 1$ 时，令 $x_n = \frac{1}{n} \to 0$，则有

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(x_n) - f(x_n)| = \lim_{n\to\infty} \left| f_n(x) = \frac{2nx_n}{1+n^2x_n^2} \right| = 1 \ne 0 \tag{4}$$

故不一致收敛.

- $1 \le x < +\infty$ 时

$$f_n'(x) = \frac{2n(1-n^2x^2)}{(n^2x^2+1)^2} \le \frac{2n(1-n^2)}{(n^2x^2+1)^2} \le 0$$

所以

$$f_n(x) \le f_n(1) = \frac{2n}{1+n^2}, \forall x \ge 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\ge1} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\ge1} |f_n(x)| \le \lim_{n\to\infty} \sup_{x\ge1} \left|\frac{2n}{1+n^2}\right| = 0 \tag{5}$$

故一致收敛.

(5) f_n 收敛于 $f(x) = e^x, \forall x \in \mathbb{R}$.

- $a \le x \le b(-\infty < a < b < +\infty)$ 时

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n - e^x = e^{n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)} - e^x = e^x\left(e^{n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)-x} - 1\right) = e^x\left(e^{n\left(\frac{x}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-x} - 1\right) = e^x\left(e^{O\left(\frac{1}{n}\right)} - 1\right)$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{a\le x\le b}|f_n(x)-f(x)| = \lim_{n\to\infty}\sup_{a\le x\le b}\left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^n - e^x\right| = \lim_{n\to\infty}\sup_{a\le x\le b}|e^x|\left|\left(e^{O\left(\frac{1}{n}\right)}-1\right)\right| = \lim_{n\to\infty}|e^b|\left|\left(e^{O\left(\frac{1}{n}\right)}-1\right)\right| = 0. \tag{6}$$

故一致收敛.

- $-\infty < x < +\infty$ 时，取 $x_n = n \to +\infty$，则有

$$\lim_{n\to\infty}|f_n(x_n)-f(x_n)| = \lim_{n\to\infty}|2^n - e^n| = +\infty \tag{7}$$

故不一致收敛.

□

例题 0.2. 习题 11.1 第 5 题

设 $\{f_n(x)\}$ 在区间 I 上一致收敛于 $f(x)$，且对于每个 n，$f(x)$ 都是 I 上的有界函数，至于含于闭区间 J. 又设 $g(x)$ 时 J 上的连续函数. 证明：$\{g(f_n(x))\}$ 在 I 上一致收敛于函数 $g(f(x))$.

证明 由于 $g(x)$ 是闭区间 J 上的连续函数，故 $g(x)$ 在闭区间 J 上一致收敛，故 $\forall x, y \in J$

$$\lim_{|x-y|\to 0}|g(x)-g(y)| = 0 \tag{8}$$

由于 $\{f_n(x)\}$ 在区间 I 上一致收敛于 $f(x)$，故

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)| = 0 \tag{9}$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in I}|g(f_n(x))-g(f(x))| = 0 \tag{10}$$

故一致收敛. □

例题 0.3. 习题 11.1 第 7 题

设 $\{f_n(x)\}$ 在有界闭区间 I 上逐点收敛于函数 $f(x)$，且存在 $M>0$ 和 $0<\alpha\le 1$ 使成立

$$|f_n(x)-f_n(y)| \le M|x-y|^\alpha, \quad \forall x,y\in I, \quad n=1,2,\cdots \tag{11}$$

证明：$f_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛于 $f(x)$.

我们证明更强的：

命题 0.1

若 $\{f_n\}$ 是某个紧集 K 上的等度连续函数列，且 $\{f_n\}$ 在 K 上逐点收敛. 证明：$f_n(x)$ 在 K 上一致收敛.

证明 对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得

$$|f_n(x)-f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall |x-y|<\delta, x,y\in K \tag{12}$$

令 $n\to\infty$，就有

$$|f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon, \quad \forall |x-y|<\delta, x,y\in K \tag{13}$$

于是 $f(x)$ 在 K 上一致连续.
固定 $x\in K$，存在 N_x，使得对于任意 $n\ge N_x$，有

$$|f_n(x)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{14}$$

现在，对于任意 $y \in K, |x-y| < \delta$，令 $n \geq N_x$，有

$$|f_n(y) - f(y)| \leq |f_n(y) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f(y)| \tag{15}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \tag{16}$$

$$= \varepsilon \tag{17}$$

于是我们得到了 $\{f_n\}$ 在紧集 K 上局部一致收敛.
由于

$$K \subset \bigcup_{x \in K} N_\delta(x). \tag{18}$$

因为 K 是紧集，故存在有限个 $x_1, x_2, \cdots, x_m$，使得

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{m} N_\delta(x_k) \tag{19}$$

取 $N = \max\{N_{x_1}, \cdots, N_{x_m}\}$，就有对于任意 $y \in K$，y 一定在某个 $N_\delta(x_k)$ 中，于是令 $n > N$，就有

$$|f_n(y) - f(y)| < \varepsilon \tag{20}$$

□

例题 0.4. 习题 11.1 第 11 题

设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有界，且对于任意 $a > 0$，$f(x)$ 都在 $[0, a]$ 上黎曼可积. 又设 $f(x)$ 在左端点 0 处右连续. 证明：

$$\lim_{n \to \infty} n \int_0^{+\infty} f(x) e^{-nx} dx = f(0) \tag{21}$$

注 本题证明考虑 Laplace 方法.

证明 由于 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有界，记 $sup_{x \geq 0} |f(x)| = M \geq 0$.
由于 $f(x)$ 在 0 附近右连续，所以对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得

$$|f(x) - f(0)| < \varepsilon, \quad \forall 0 < x < \delta \tag{22}$$

但是我们不知道极限 $\lim_{n \to +\infty} n \int_0^{+\infty} f(x) e^{-nx} dx$ 是否存在，出于严谨性的考虑，我们采用上下极限的写法：

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}}\, n \int_0^{+\infty} f(x) e^{-nx} dx \leq \overline{\lim_{n \to +\infty}} \left(n \int_0^{\delta} f(x) e^{-nx} dx + n \int_\delta^{+\infty} f(x) e^{-nx} dx \right) \tag{23}$$

$$\leq \overline{\lim_{n \to +\infty}}\, n \int_0^{\delta} f(x) e^{-nx} dx + \overline{\lim_{n \to +\infty}}\, n \int_\delta^{+\infty} f(x) e^{-nx} dx \tag{24}$$

$$\leq \overline{\lim_{n \to +\infty}}\, n \int_0^{\delta} (f(0) + \varepsilon) e^{-nx} dx + M \overline{\lim_{n \to +\infty}}\, n \int_\delta^{+\infty} e^{-nx} dx \tag{25}$$

$$= \overline{\lim_{n \to +\infty}} \int_0^{\delta} (f(0) + \varepsilon) e^{-nx} d(nx) + M \overline{\lim_{n \to +\infty}} \int_\delta^{+\infty} e^{-nx} d(nx) \tag{26}$$

$$= \overline{\lim_{n \to +\infty}} \int_0^{n\delta} (f(0) + \varepsilon) e^{-x} dx + M \overline{\lim_{n \to +\infty}} \int_{n\delta}^{+\infty} e^{-x} dx \tag{27}$$

$$= \int_0^{+\infty} (f(0) + \varepsilon) e^{-x} dx \tag{28}$$

$$= f(0) + \varepsilon \tag{29}$$

$$\varliminf_{n\to+\infty} n\int_0^{+\infty} f(x)e^{-nx}dx \geq \varliminf_{n\to+\infty}\left(n\int_0^{\delta} f(x)e^{-nx}dx + n\int_{\delta}^{+\infty} f(x)e^{-nx}dx\right) \tag{30}$$

$$\geq \varliminf_{n\to+\infty} n\int_0^{\delta} f(x)e^{-nx}dx + \varliminf_{n\to+\infty} n\int_{\delta}^{+\infty} f(x)e^{-nx}dx \tag{31}$$

$$\geq \varliminf_{n\to+\infty} n\int_0^{\delta}(f(0)-\varepsilon)e^{-nx}dx + M\varliminf_{n\to+\infty} n\int_{\delta}^{+\infty} e^{-nx}dx \tag{32}$$

$$= \varliminf_{n\to+\infty}\int_0^{\delta}(f(0)-\varepsilon)e^{-nx}d(nx) + M\varliminf_{n\to+\infty}\int_{\delta}^{+\infty} e^{-nx}d(nx) \tag{33}$$

$$= \varliminf_{n\to+\infty}\int_0^{n\delta}(f(0)-\varepsilon)e^{-x}dx + M\varliminf_{n\to+\infty}\int_{n\delta}^{+\infty} e^{-x}dx \tag{34}$$

$$= \int_0^{+\infty}(f(0)-\varepsilon)e^{-x}dx \tag{35}$$

$$= f(0)-\varepsilon \tag{36}$$

由 ε 任意性可知：

$$\varlimsup_{n\to+\infty} n\int_0^{+\infty} f(x)e^{-nx}dx = \varliminf_{n\to+\infty} n\int_0^{+\infty} f(x)e^{-nx}dx = f(0) \tag{37}$$

于是

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^{+\infty} f(x)e^{-nx}dx = f(0) \tag{38}$$

□

例题 0.5. 补充习题

设函数 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界且一致连续. 令

$$f_n(x) = \frac{\pi}{2n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x+\frac{k}{n})\sin\frac{k\pi}{n}, \quad \forall x\in\mathbb{R}, \quad n=1,2,\cdots \tag{39}$$

证明：$\{f_n\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

证明 记 f_n 逐点收敛于函数 $F(x)$. 固定 x，令 $n\to\infty$，由定积分定义可知：

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{\pi}{2}\int_0^1 f(x+t)\sin(t\pi)dt \tag{40}$$

引理 0.1

$f(x)\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 一致连续.

注 证明考虑 $f(x),\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有界且一致连续.

于是，对于任意的 $\varepsilon>0$，存在一个 $\delta>0$，使得对于任意 $x,y\in(-\infty,+\infty),|x-y|<\delta$，有

$$|f(x)\sin x - f(y)\sin y| < \varepsilon \tag{41}$$

考虑

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}|F(x)-f_n(x)| = \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{\pi}{2}\int_0^1 f(x+t)\sin(t\pi)dt - \frac{\pi}{2n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x+\frac{k}{n})\sin\frac{k\pi}{n}\right| \tag{42}$$

$$= \frac{\pi}{2}\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x+t)\sin(\pi t)dt - \frac{1}{n}f(x+\frac{k}{n})\sin\frac{k\pi}{n}\right| \tag{43}$$

$$\le \frac{\pi}{2}\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varepsilon}{n}\right| \tag{44}$$

$$\le \frac{\pi}{2}\varepsilon \tag{45}$$

于是，由 ε 任意性可知：$\{f_n\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

1.求下列幂级数的收敛半径r和收敛域I:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n^2+1}}x^n,r=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n^2+1}}\right|}}=1$$

$$x=1\text{时},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n^2+1}}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n^2+1}}\text{收敛}$$

$$x=-1\text{时},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n^2+1}}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n^2+1}}(-1)^n\sim-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\text{发散}$$

所以$I=(-1,1]$

$$(2)\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$$

$$r=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left|1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right|}{\left|1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right|}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\frac{\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)(n+1)}}=1$$

$$x=1\text{时},\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\text{发散}$$

$$x=-1\text{时},\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)(-1)^n$$

$$\left|\sum_{n=2m}^{4m+3}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)(-1)^n\right|=\left|-\sum_{n=m}^{2m+1}\frac{1}{2n+1}\right|=\sum_{n=m}^{2m+1}\frac{1}{2n+1}\geq\sum_{n=m}^{2m+1}\frac{1}{2n+2}=\frac{1}{2}\sum_{n=m+1}^{2m+2}\frac{1}{n}$$

$$\geq\frac{1}{2}\int_{m+1}^{2m+2}\frac{1}{x}dx=\frac{1}{2}\ln 2>0,\text{由柯西收敛准则知发散}$$

所以$I=(-1,1)$

$$(3)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^3}{(3n)!}x^n$$

$$r=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|\frac{(n!)^3}{(3n)!}\right|}}=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|\frac{\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)^3}{\sqrt{6\pi n}\left(\frac{3n}{e}\right)^{3n}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)}\right|}}=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{\left(\sqrt{2\pi n}\right)^3\left(\frac{n}{e}\right)^{3n}}{\sqrt{6\pi n}\left(\frac{3n}{e}\right)^{3n}}}}=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{\left(\sqrt{2\pi n}\right)^3}{\sqrt{6\pi n}}\cdot\frac{1}{3^{3n}}}}=27$$

$$x=27\text{时},\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^3}{(3n)!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^3}{(3n)!}3^{3n}\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)^3}{\sqrt{6\pi n}\left(\frac{3n}{e}\right)^{3n}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)}3^{3n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\pi n}{\sqrt{3}}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\text{发散}$$

$$x=-27\text{时}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^3}{(3n)!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^3}{(3n)!}(-3)^{3n}\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)^3}{\sqrt{6\pi n}\left(\frac{3n}{e}\right)^{3n}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)}(-3)^{3n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2\pi n}{\sqrt{3}}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\text{发散}$$

所以$I=(-27,27)$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n, r=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right|}}$

考虑对 $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ 渐进估阶

记 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}xd\cos x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xd\sin^{n-1}x=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}\cos^2 xdx$

$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}(1-\sin^2 x)dx=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n\Rightarrow I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$

由于 $I_0=\frac{\pi}{2}, I_1=1$, 所以 $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=\prod_{k=1}^{n}\frac{I_{2k}}{I_{2k-2}}=\frac{I_{2n}}{I_0}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}xdx$

考虑 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2n\ln\sin x}dx$

$\ln\sin x$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处泰勒展开得到, $\ln\sin x=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+o\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\right)=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2(1+o(1))$

于是 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$(δ 充分小), $s.t.\ \forall x\in\left(\frac{\pi}{2}-\delta,\frac{\pi}{2}+\delta\right)$, 有

$-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2(1-\varepsilon)<\ln\sin x<-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2(1+\varepsilon)$

于是 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2n\ln\sin x}dx\le\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta}e^{2n\ln\sin x}dx+\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt{n}\int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}}e^{2n\ln\sin x}dx$

$\le\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta}e^{2n\ln\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)}dx+\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt{n}\int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}}e^{2n\left(-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2(1+\varepsilon)\right)}dx$

$=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt{n}e^{2n\ln\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)}\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)+\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt{n}\int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}}e^{-n\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2(1+\varepsilon)}dx$

$=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt{n}\int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}}e^{-n\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2(1+\varepsilon)}dx=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}\int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}}e^{-n\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2(1+\varepsilon)}d\left[\sqrt{n(1+\varepsilon)}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right]$

$=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}\int_{-\delta}^{0}e^{-nx^2(1+\varepsilon)}d\left[\sqrt{n(1+\varepsilon)}x\right]=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}\int_{-\sqrt{n(1+\varepsilon)}\delta}^{0}e^{-x^2}dx$

$=\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}\int_{-\infty}^{0}e^{-x^2}dx=\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1+\varepsilon}}$

$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\left(\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx\right)\left(\int_0^{+\infty}e^{-y^2}dy\right)}=\sqrt{\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}dxdy}=\sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{+\infty}e^{-r^2}rdr}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2n\ln\sin x}dx \geq \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta}e^{2n\ln\sin x}dx+\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}}e^{2n\ln\sin x}dx$$

$$\geq \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta}e^{2n\ln\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)}dx+\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}}e^{2n\left(-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2(1-\varepsilon)\right)}dx$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,e^{2n\ln\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)}\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)+\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}}e^{-n\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2(1-\varepsilon)}dx$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}}e^{-n\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2(1+\varepsilon)}dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}}\int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}}e^{-n\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2(1-\varepsilon)}d\left[\sqrt{n(1-\varepsilon)}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}}\int_{-\delta}^{0}e^{-nx^2(1-\varepsilon)}d\left[\sqrt{n(1-\varepsilon)}\,x\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}}\int_{-\sqrt{n(1-\varepsilon)}\delta}^{0}e^{-x^2}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}\int_{-\infty}^{0}e^{-x^2}dx=\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}}\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-\varepsilon}}$$

由ε任意性: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2n\ln\sin x}dx=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2n\ln\sin x}dx=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2n\ln\sin x}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

所以 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2n\ln\sin x}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

所以 $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\,dx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

所以 $r=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right|}}=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{\sqrt{\pi n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right|}}=1$

$x=1$时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$发散

$x=-1$时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(-1)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right](-1)^n$

为了判断此级数收敛性,我们考虑$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$的更高阶渐进.

......

引理: $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=\frac{1}{\sqrt{\pi n}}-\frac{8}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}+o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$

于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(-1)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi n}}-\frac{8}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}+o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right](-1)^n$收敛

所以 $I=[-1,1)$

出于兴趣,我们考虑 $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ 的更高阶渐进.

引理: $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=\frac{1}{\sqrt{\pi n}}-\frac{8}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}+o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{n\ln\sin^2 x}dx\overset{\text{换元}x=\arcsin e^{-\frac{y}{2}}}{=}\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-ny}d\arcsin e^{-\frac{y}{2}}=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-ny}\frac{e^{-\frac{y}{2}}}{2\sqrt{1-e^{-y}}}dy$$

$$\frac{e^{-\frac{y}{2}}}{2\sqrt{1-e^{-y}}}=\frac{1}{2\sqrt{y}}-\frac{\sqrt{y}}{8}+O\left(y^{\frac{3}{2}}\right)$$

于是 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0(\delta$ 充分小$),s.t.\forall y\in(0,\delta)$,有

$$\frac{1}{2\sqrt{y}}-\frac{\sqrt{y}}{8}(1+\varepsilon)<\frac{e^{-\frac{y}{2}}}{2\sqrt{1-e^{-y}}}<\frac{1}{2\sqrt{y}}-\frac{\sqrt{y}}{8}(1-\varepsilon)$$

其中 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_\delta^{\frac{\pi}{2}}e^{-ny}\frac{e^{-\frac{y}{2}}}{2\sqrt{1-e^{-y}}}dy\geq\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_\delta^{\frac{\pi}{2}}e^{-n\delta}\frac{e^{-\frac{y}{2}}}{2\sqrt{1-e^{-y}}}dy\geq\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_\delta^{\frac{\pi}{2}}e^{-n\delta}\frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{1-e^{-\delta}}}dy$

$$=\overline{\lim_{n\to\infty}}e^{-n\delta}\frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{1-e^{-\delta}}}\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)=0$$

于是 $\underline{\lim_{n\to\infty}}\int_\delta^{\frac{\pi}{2}}e^{-ny}\frac{e^{-\frac{y}{2}}}{2\sqrt{1-e^{-y}}}dy=0$

于是 $\overline{\lim_{n\to\infty}}n^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-ny}\frac{e^{-\frac{y}{2}}}{2\sqrt{1-e^{-y}}}dy-\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\right)=\overline{\lim_{n\to\infty}}n^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\delta}e^{-ny}\frac{e^{-\frac{y}{2}}}{2\sqrt{1-e^{-y}}}dy-\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\right)$

$$\leq\overline{\lim_{n\to\infty}}n^{\frac{3}{2}}\left[\frac{2}{\pi}\int_0^{\delta}e^{-ny}\left(\frac{1}{2\sqrt{y}}-\frac{\sqrt{y}}{8}(1-\varepsilon)\right)dy-\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\right]$$

$$=\overline{\lim_{n\to\infty}}n^{\frac{3}{2}}\left[\frac{2}{\pi}\frac{1}{n}\int_0^{\delta}e^{-ny}\left(\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{ny}}-\frac{\sqrt{ny}}{8\sqrt{n}}(1-\varepsilon)\right)d(ny)-\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\right]$$

$$=\overline{\lim_{n\to\infty}}n^{\frac{3}{2}}\left[\frac{2}{\pi}\frac{1}{n}\int_0^{n\delta}e^{-z}\left(\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{z}}-\frac{\sqrt{z}}{8\sqrt{n}}(1-\varepsilon)\right)dz-\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\right]$$

$$=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left[\frac{2}{\pi}\int_0^{n\delta}e^{-z}\left(\frac{n}{2\sqrt{z}}-\frac{\sqrt{z}}{8}(1-\varepsilon)\right)dz-\frac{n}{\sqrt{\pi}}\right]$$

$$=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left[\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-z}\left(\frac{n}{2\sqrt{z}}-\frac{\sqrt{z}}{8}(1-\varepsilon)\right)dz-\frac{n}{\sqrt{\pi}}\right]$$

$$=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left[\frac{2}{\pi}n\int_0^{+\infty}e^{-z}\frac{1}{2\sqrt{z}}dz-(1-\varepsilon)\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-z}\frac{\sqrt{z}}{8}dz-\frac{n}{\sqrt{\pi}}\right]$$

$$=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left[\frac{1}{\pi}n\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)-(1-\varepsilon)\frac{2}{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{8}-\frac{n}{\sqrt{\pi}}\right]$$

$$=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left[\frac{1}{\pi}n\sqrt{\pi}-(1-\varepsilon)\frac{2}{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{16}-\frac{n}{\sqrt{\pi}}\right]$$

$$=-(1-\varepsilon)\frac{1}{8\sqrt{\pi}}$$

$$\varliminf_{n\to\infty} n^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-ny}\frac{e^{-\frac{y}{2}}}{2\sqrt{1-e^{-y}}}dy-\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\right)=\varliminf_{n\to\infty} n^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\delta} e^{-ny}\frac{e^{-\frac{y}{2}}}{2\sqrt{1-e^{-y}}}dy-\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\right)$$

$$\geq \varliminf_{n\to\infty} n^{\frac{3}{2}}\left[\frac{2}{\pi}\int_0^{\delta} e^{-ny}\left(\frac{1}{2\sqrt{y}}-\frac{\sqrt{y}}{8}(1+\varepsilon)\right)dy-\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\right]$$

$$=\varliminf_{n\to\infty} n^{\frac{3}{2}}\left[\frac{2}{\pi}\frac{1}{n}\int_0^{\delta} e^{-ny}\left(\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{ny}}-\frac{\sqrt{ny}}{8\sqrt{n}}(1+\varepsilon)\right)d(ny)-\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\right]$$

$$=\varliminf_{n\to\infty} n^{\frac{3}{2}}\left[\frac{2}{\pi}\frac{1}{n}\int_0^{n\delta} e^{-z}\left(\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{z}}-\frac{\sqrt{z}}{8\sqrt{n}}(1+\varepsilon)\right)dz-\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\right]$$

$$=\varliminf_{n\to\infty}\left[\frac{2}{\pi}\int_0^{n\delta} e^{-z}\left(\frac{n}{2\sqrt{z}}-\frac{\sqrt{z}}{8}(1+\varepsilon)\right)dz-\frac{n}{\sqrt{\pi}}\right]$$

$$=\varliminf_{n\to\infty}\left[\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-z}\left(\frac{n}{2\sqrt{z}}-\frac{\sqrt{z}}{8}(1+\varepsilon)\right)dz-\frac{n}{\sqrt{\pi}}\right]$$

$$=\varliminf_{n\to\infty}\left[\frac{2}{\pi}n\int_0^{+\infty} e^{-z}\frac{1}{2\sqrt{z}}dz-(1+\varepsilon)\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-z}\frac{\sqrt{z}}{8}dz-\frac{n}{\sqrt{\pi}}\right]$$

$$=\varliminf_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\pi}n\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)-(1+\varepsilon)\frac{2}{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{8}-\frac{n}{\sqrt{\pi}}\right]$$

$$=\varliminf_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\pi}n\sqrt{\pi}-(1+\varepsilon)\frac{2}{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{16}-\frac{n}{\sqrt{\pi}}\right]$$

$$=-(1+\varepsilon)\frac{1}{8\sqrt{\pi}}$$

于是由ε任意性:

$$\varliminf_{n\to\infty} n^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-ny}\frac{e^{-\frac{y}{2}}}{2\sqrt{1-e^{-y}}}dy-\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\right)=\varlimsup_{n\to\infty} n^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-ny}\frac{e^{-\frac{y}{2}}}{2\sqrt{1-e^{-y}}}dy-\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\right)=-\frac{1}{8\sqrt{\pi}}$$

于是 $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-ny}\frac{e^{-\frac{y}{2}}}{2\sqrt{1-e^{-y}}}dy-\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\right)=-\frac{1}{8\sqrt{\pi}}$

所以 $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=\frac{1}{\sqrt{\pi n}}-\frac{1}{8\sqrt{\pi}n^{\frac{3}{2}}}+o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$

再出于兴趣,我们考虑 $\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ 的更高阶渐进.

引理: $\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=\dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}-\dfrac{1}{8\sqrt{\pi}\,n^{\frac{3}{2}}}+\dfrac{1}{256\sqrt{\pi}\,n^{\frac{5}{2}}}+o\left(\dfrac{1}{n^{\frac{5}{2}}}\right)$

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{n\ln\sin^2 x}dx\overset{换元 x=\arcsin e^{-\frac{y}{2}}}{=}\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-ny}d\arcsin e^{-\frac{y}{2}}=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-ny}\frac{e^{-\frac{y}{2}}}{2\sqrt{1-e^{-y}}}dy$$

$Puiseux$ 展开可得: $\dfrac{e^{-\frac{y}{2}}}{2\sqrt{1-e^{-y}}}=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}-\dfrac{\sqrt{y}}{8}+\dfrac{y^{\frac{3}{2}}}{192}+O\left(y^{\frac{5}{2}}\right)$

于是 $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$ (δ 充分小), $s.t.\ \forall y\in(0,\delta)$, 有

$$\frac{1}{2\sqrt{y}}-\frac{\sqrt{y}}{8}+\frac{y^{\frac{3}{2}}}{192}(1-\varepsilon)<\frac{e^{-\frac{y}{2}}}{2\sqrt{1-e^{-y}}}<\frac{1}{2\sqrt{y}}-\frac{\sqrt{y}}{8}+\frac{y^{\frac{3}{2}}}{192}(1+\varepsilon)$$

其中 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\displaystyle\int_\delta^{\frac{\pi}{2}}e^{-ny}\frac{e^{-\frac{y}{2}}}{2\sqrt{1-e^{-y}}}dy\le\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_\delta^{\frac{\pi}{2}}e^{-n\delta}\frac{e^{-\delta}}{2\sqrt{1-e^{-\frac{\pi}{2}}}}dy=\overline{\lim_{n\to\infty}}e^{-n\delta}\frac{e^{-\delta}}{2\sqrt{1-e^{-\frac{\pi}{2}}}}\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)=0$

于是 $\underline{\lim_{n\to\infty}}\displaystyle\int_\delta^{\frac{\pi}{2}}e^{-ny}\frac{e^{-\frac{y}{2}}}{2\sqrt{1-e^{-y}}}dy=0$

于是 $\overline{\lim_{n\to\infty}}n^{\frac{5}{2}}\left[\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-ny}\frac{e^{-\frac{y}{2}}}{2\sqrt{1-e^{-y}}}dy-\frac{1}{\sqrt{\pi n}}+\frac{1}{8\sqrt{\pi}\,n^{\frac{3}{2}}}\right]$

$$=\overline{\lim_{n\to\infty}}n^{\frac{5}{2}}\left[\frac{2}{\pi}\int_0^{\delta}e^{-ny}\frac{e^{-\frac{y}{2}}}{2\sqrt{1-e^{-y}}}dy-\frac{1}{\sqrt{\pi n}}+\frac{1}{8\sqrt{\pi}\,n^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$\le\overline{\lim_{n\to\infty}}n^{\frac{5}{2}}\left[\frac{2}{\pi}\int_0^{\delta}e^{-ny}\left(\frac{1}{2\sqrt{y}}-\frac{\sqrt{y}}{8}+\frac{y^{\frac{3}{2}}}{192}(1+\varepsilon)\right)dy-\frac{1}{\sqrt{\pi n}}+\frac{1}{8\sqrt{\pi}\,n^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$=\overline{\lim_{n\to\infty}}n^{\frac{5}{2}}\left[\frac{2}{\pi}\frac{1}{n}\int_0^{\delta}e^{-ny}\left(\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{ny}}-\frac{\sqrt{ny}}{8\sqrt{n}}+\frac{(ny)^{\frac{3}{2}}}{192n^{\frac{3}{2}}}(1+\varepsilon)\right)d(ny)-\frac{1}{\sqrt{\pi n}}+\frac{1}{8\sqrt{\pi}\,n^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$=\overline{\lim_{n\to\infty}}n^{\frac{5}{2}}\left[\frac{2}{\pi}\frac{1}{n}\int_0^{n\delta}e^{-ny}\left(\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{z}}-\frac{\sqrt{z}}{8\sqrt{n}}+\frac{z^{\frac{3}{2}}}{192n^{\frac{3}{2}}}(1+\varepsilon)\right)dz-\frac{1}{\sqrt{\pi n}}+\frac{1}{8\sqrt{\pi}\,n^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$=\overline{\lim_{n\to\infty}}n^{\frac{5}{2}}\left[\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-ny}\left(\frac{1}{2\sqrt{nz}}-\frac{\sqrt{z}}{8n^{\frac{3}{2}}}+\frac{z^{\frac{3}{2}}}{192n^{\frac{5}{2}}}(1+\varepsilon)\right)dz-\frac{1}{\sqrt{\pi n}}+\frac{1}{8\sqrt{\pi}\,n^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$=\overline{\lim_{n\to\infty}}n^{\frac{5}{2}}\left[\frac{2}{\pi}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{n}}-\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{8n^{\frac{3}{2}}}+\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{192n^{\frac{5}{2}}}(1+\varepsilon)\right)-\frac{1}{\sqrt{\pi n}}+\frac{1}{8\sqrt{\pi}\,n^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$=\overline{\lim_{n\to\infty}}n^{\frac{5}{2}}\left[\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}-\frac{\sqrt{\pi}}{16n^{\frac{3}{2}}}+\frac{\sqrt{\pi}}{256n^{\frac{5}{2}}}(1+\varepsilon)\right)-\frac{1}{\sqrt{\pi n}}+\frac{1}{8\sqrt{\pi}\,n^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$=\frac{1}{256\sqrt{\pi}}(1+\varepsilon)$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} n^{\frac{5}{2}}\left[\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-ny}\frac{e^{-\frac{y}{2}}}{2\sqrt{1-e^{-y}}}dy-\frac{1}{\sqrt{\pi n}}+\frac{1}{8\sqrt{\pi}\,n^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$=\underline{\lim_{n\to\infty}} n^{\frac{5}{2}}\left[\frac{2}{\pi}\int_0^{\delta} e^{-ny}\frac{e^{-\frac{y}{2}}}{2\sqrt{1-e^{-y}}}dy-\frac{1}{\sqrt{\pi n}}+\frac{1}{8\sqrt{\pi}\,n^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$\geq\underline{\lim_{n\to\infty}} n^{\frac{5}{2}}\left[\frac{2}{\pi}\int_0^{\delta} e^{-ny}\left(\frac{1}{2\sqrt{y}}-\frac{\sqrt{y}}{8}+\frac{y^{\frac{3}{2}}}{192}(1-\varepsilon)\right)dy-\frac{1}{\sqrt{\pi n}}+\frac{1}{8\sqrt{\pi}\,n^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$=\underline{\lim_{n\to\infty}} n^{\frac{5}{2}}\left[\frac{2}{\pi}\frac{1}{n}\int_0^{\delta} e^{-ny}\left(\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{ny}}-\frac{\sqrt{ny}}{8\sqrt{n}}+\frac{(ny)^{\frac{3}{2}}}{192n^{\frac{3}{2}}}(1-\varepsilon)\right)d(ny)-\frac{1}{\sqrt{\pi n}}+\frac{1}{8\sqrt{\pi}\,n^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$=\underline{\lim_{n\to\infty}} n^{\frac{5}{2}}\left[\frac{2}{\pi}\frac{1}{n}\int_0^{n\delta} e^{-ny}\left(\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{z}}-\frac{\sqrt{z}}{8\sqrt{n}}+\frac{z^{\frac{3}{2}}}{192n^{\frac{3}{2}}}(1-\varepsilon)\right)dz-\frac{1}{\sqrt{\pi n}}+\frac{1}{8\sqrt{\pi}\,n^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$=\underline{\lim_{n\to\infty}} n^{\frac{5}{2}}\left[\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-ny}\left(\frac{1}{2\sqrt{nz}}-\frac{\sqrt{z}}{8n^{\frac{3}{2}}}+\frac{z^{\frac{3}{2}}}{192n^{\frac{5}{2}}}(1-\varepsilon)\right)dz-\frac{1}{\sqrt{\pi n}}+\frac{1}{8\sqrt{\pi}\,n^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$=\underline{\lim_{n\to\infty}} n^{\frac{5}{2}}\left[\frac{2}{\pi}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{n}}-\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{8n^{\frac{3}{2}}}+\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{192n^{\frac{5}{2}}}(1-\varepsilon)\right)-\frac{1}{\sqrt{\pi n}}+\frac{1}{8\sqrt{\pi}\,n^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$=\underline{\lim_{n\to\infty}} n^{\frac{5}{2}}\left[\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}-\frac{\sqrt{\pi}}{16n^{\frac{3}{2}}}+\frac{\sqrt{\pi}}{256n^{\frac{5}{2}}}(1-\varepsilon)\right)-\frac{1}{\sqrt{\pi n}}+\frac{1}{8\sqrt{\pi}\,n^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$=\frac{1}{256\sqrt{\pi}}(1-\varepsilon)$$

由ε任意性: $\underline{\lim_{n\to\infty}} n^{\frac{5}{2}}\left[\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-ny}\frac{e^{-\frac{y}{2}}}{2\sqrt{1-e^{-y}}}dy-\frac{1}{\sqrt{\pi n}}+\frac{1}{8\sqrt{\pi}\,n^{\frac{3}{2}}}\right]$

$$=\overline{\lim_{n\to\infty}} n^{\frac{5}{2}}\left[\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-ny}\frac{e^{-\frac{y}{2}}}{2\sqrt{1-e^{-y}}}dy-\frac{1}{\sqrt{\pi n}}+\frac{1}{8\sqrt{\pi}\,n^{\frac{3}{2}}}\right]=\frac{1}{256\sqrt{\pi}}$$

所以 $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{5}{2}}\left[\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-ny}\frac{e^{-\frac{y}{2}}}{2\sqrt{1-e^{-y}}}dy-\frac{1}{\sqrt{\pi n}}+\frac{1}{8\sqrt{\pi}\,n^{\frac{3}{2}}}\right]=\frac{1}{256\sqrt{\pi}}$

$$(5)\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n, r=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\right|}}=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}=\frac{1}{e}$$

$x=\frac{1}{e}$时, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}e^{-n}$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}e^{-n}=e^{n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-n}=e^{n^2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)-n}=e^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{3n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{1}{\sqrt{e}}e^{\frac{1}{3n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{e}}\left(1+\frac{1}{3n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=\frac{1}{\sqrt{e}}+\frac{1}{3\sqrt{e}\,n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

于是$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}e^{-n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{e}}+\frac{1}{3\sqrt{e}\,n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$发散

$x=-\frac{1}{e}$时, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}(-e)^{-n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}e^{-n}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt{e}}+\frac{1}{3\sqrt{e}\,n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$发散

所以$I=\left(-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right)$.

$$(6)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n^p}x^n\ (p>0), r=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|\frac{3^n+(-2)^n}{n^p}\right|}}=\frac{1}{3}$$

$x=\frac{1}{3}$时, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n^p}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n^p}\frac{1}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{n^p}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^p}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{n^p}$

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{n^p}$收敛, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^p}\begin{cases}收敛 & p>1\\ 发散 & 0<p\le 1\end{cases}$

于是$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n^p}x^n\begin{cases}收敛 & p>1\\ 发散 & 0<p\le 1\end{cases}$

$x=-\frac{1}{3}$时, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n^p}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n^p}\frac{1}{(-3)^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n}{n^p}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{n^p}$

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$收敛, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{n^p}$收敛, 于是$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n^p}x^n$收敛

所以$I=\begin{cases}\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right] & p>1\\ \left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) & 0<p\le 1\end{cases}$

2.设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径为$r_1$,$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$的收敛半径为$r_2$.求下列幂级数的收敛半径:

由题意:$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{r_1}$,$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|b_n|}=\frac{1}{r_2}$

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$,$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n x^{2n}|}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{r_1}x^2$,故收敛半径为$\sqrt{r_1}$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$,收敛半径$=\begin{cases}\dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n+b_n|}}=\dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\max\{|a_n|,|b_n|\}}}=\min\{r_1,r_2\} & a_n+b_n\neq 0\\ +\infty & a_n+b_n=0\end{cases}$

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n x^n$,收敛半径$=\dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n b_n|}}=\dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}\cdot\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|b_n|}}=r_1 r_2$

4.设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径为$r>0$,且$a_n\geq 0$,$n=0,1,2,\cdots$.

又设该幂级数的和函数在$(0,r)$中有界.证明：该幂级数在$x=r$点收敛

记$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

由$f(x)$在$(0,r)$中单调有界且连续,所以

对于任意趋于r的数列$\{x_n\}\in(0,r)$,考虑数列$\{f(x_n)\}$趋于$f(r)$

对于$\{f(x_n)\}$,由单调有界原理,所以由f连续性:$f(r)=\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$存在

故该幂级数在$x=r$点收敛.

7.求下列级数的收敛域I:

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{a^n+b^n}$ $(a>b>0)$

$$\frac{1}{r}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{a^n+b^n}\right|}=\frac{1}{a},r=a$$

对于级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{a^n+b^n}$,考虑其收敛域$J$

$x=a$时,$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{a^n+b^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{a^n+b^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}$发散

$x=-a$时,$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{a^n+b^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-a)^n}{a^n+b^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}$发散

故$J=(-a,a)$

故$I=(-a+1,a+1)$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^n$,对于级数$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p x^n$考虑其收敛域$J$

$$\frac{1}{r}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p\right|}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|\left[\frac{1}{\sqrt{\pi n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]^p\right|}=1\Rightarrow r=1$$

$x=1$时,$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]^p$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(\pi n)^{\frac{p}{2}}}+o\left(\frac{1}{n^{\frac{p}{2}}}\right)\right]\begin{cases}\text{收敛} & p>1\\ \text{发散} & 0<p\leq 1\end{cases}$$

$x=-1$时,$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p(-1)^n$由狄利克雷判别法知收敛

故$J=\begin{cases}[-1,1] & p>1\\ [-1,1) & 0<p\leq 1\end{cases}$

故$I=\begin{cases}(-\infty,0]\cup[2,+\infty) & p>1\\ (-\infty,0]\cup(2,+\infty) & 0<p\leq 1\end{cases}$

(5) $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n^2}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n^2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n+x^{-n}}{2^{n^2}}$

只需考虑$x>0$的情况,$x<0$的敛散情况是对称的.

$\forall x\in\mathbb{R},\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{x^n+x^{-n}}{2^{n^2}}}=0<1$

显然收敛域为$\mathbb{R}$.

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}e^{-nx}$

考察级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}x^n$的收敛域$J$

$$r=\frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}\right|}}=\frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}}=e$$

$x=e$时,$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}e^n$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}e^n=e^{-n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+n}=e^{-n^2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)+n}=e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)}=\sqrt{e}\left(1-\frac{1}{3n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}e^n=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{e}\left(1-\frac{1}{3n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$发散

$x=-e$时,$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}(-1)^n e^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{e}\left(1-\frac{1}{3n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$发散

故$J=(-e,e)$

故$I=(-1,+\infty)$