(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$,显然在$x\le 0$时发散,$x>0$时收敛.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$,显然在$x\le 1$时发散,$x>1$时收敛

于是$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$的收敛域为$(0,+\infty)$,绝对收敛域为$(1,+\infty)$,条件收敛域为$(0,1]$.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\left(\frac{x}{1+2x}\right)^n\ (p>0)$,显然在$x\ge 0$时收敛,在$-\frac{1}{3}\le x<0$时收敛,

在$-\frac{1}{2}<x<-\frac{1}{3}$时发散,在$x=-\frac{1}{2}$时无定义,在$-1<x<-\frac{1}{2}$时发散,

在$x=-1$时,$\begin{cases}\text{发散,若}0<p\le 1\\ \text{收敛,若}p>1\end{cases}$,在$x<-1$时收敛.

$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n^p}\left(\frac{x}{1+2x}\right)^n\right|(p>0)$,显然在$x\ge 0$时收敛,在$-\frac{1}{3}<x<0$时收敛,

在$-\frac{1}{2}<x\le-\frac{1}{3}$时发散,在$x=-\frac{1}{2}$时无定义,在$-1<x<-\frac{1}{2}$时发散,

在$x=-1$时,$\begin{cases}\text{发散,若}0<p\le 1\\ \text{收敛,若}p>1\end{cases}$,在$x<-1$时收敛.

于是$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\left(\frac{x}{1+2x}\right)^n\ (p>0)$,绝对收敛域为$\begin{cases}(-\infty,-1)\cup\left(-\frac{1}{3},+\infty\right),\text{若}0<p\le 1\\ (-\infty,-1]\cup\left(-\frac{1}{3},+\infty\right),\text{若}p>1\end{cases}$,

条件收敛域为$\begin{cases}(-\infty,-1)\cup\left[-\frac{1}{3},+\infty\right),\text{若}0<p\le 1\\ (-\infty,-1]\cup\left[-\frac{1}{3},+\infty\right),\text{若}p>1\end{cases}$

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}\sim\int_0^{+\infty}te^{-xt}dt=\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}e^{-xt}dt=\frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty}e^{-xt}d(xt)$

若$x>0$,则$\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}\sim\frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty}e^{-xt}d(xt)=\frac{1}{x^2}$,收敛,且绝对收敛

若$x=0$,则$\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}=\sum_{n=1}^{\infty}n$发散

若$x<0$,则$\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}\sim\frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty}e^{-xt}d(xt)=\frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty}e^{u}du\to+\infty$,发散

于是$\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$绝对收敛域和条件收敛域都为$(0,+\infty)$

$3.(1)\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2}\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$一致收敛, $\forall x\in\mathbb{R}$,于是由$Weierstrass$判别法, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2}$一致收敛

$3.(3)\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}\right|=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}+n^4x}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\frac{1}{|x|}+n^4|x|}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}$一致收敛, $\forall x\in\mathbb{R}$

于是由$Weierstrass$判别法, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$一致收敛

$3.(5)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}},|x|\le 1-\varepsilon,\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{x^n}{1+x^{2n}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|^n}{1+x^{2n}}\le\sum_{n=1}^{\infty}|x|^n\le\sum_{n=1}^{\infty}(1-\varepsilon)^n=\frac{1}{\varepsilon}<\infty$

因此$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}},|x|\le 1-\varepsilon$,一致收敛.

4.不妨设$a_n\equiv 0,\forall n$,否则用$u_n(x)-a_n$代替$u_n(x)$,用b_n-a_n代替b_n.

于是由$Weiestrass$判别法$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$收敛.

5.由$Abel$判别法:由于$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,对每个固定的$x>0$,有e^{-nx}单调递减趋于0,且一致有界.

于是$\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{-nx}$在$x>0$时一致收敛

$x=0$时$\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{-nx}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$也一致收敛.