1.由于$f\in C[0,1]$,故$|f|$在$[0,1]$上有界取得最大值$\sup\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|$

由Weierstrass第一逼近定理:$\forall\varepsilon>0$, $\exists$多项式函数$P(x)$,使得$|f(x)-P(x)|\le\dfrac{\varepsilon}{\sup\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|}$,$\forall x\in[0,1]$

由于$\int_0^1 f(x)x^n dx=0, n=0,1,2,\cdots$,故$\int_0^1 f(x)P(x)dx=0$

故$0=\int_0^1 f(x)P(x)dx=\int_0^1 f(x)[P(x)-f(x)]dx+\int_0^1 f^2(x)dx$

于是$\left|\int_0^1 f^2(x)dx\right|=\left|\int_0^1 f(x)[P(x)-f(x)]dx\right|\le\int_0^1 f(x)|P(x)-f(x)|dx\le\dfrac{\varepsilon}{\sup\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|}\int_0^1 f(x)dx\le\varepsilon$

2.①若$f(x)$是奇函数,即$f(x)=-f(-x)$,固定n,我们有$\int_{-1}^1 f(x)x^{2n}dx=\int_{-1}^1 f(-x)x^{2n}dx=\dfrac{1}{2}\int_{-1}^1[f(x)+f(-x)]x^{2n}dx=0,\forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$

若$\int_{-1}^1 f(x)x^{2n}dx=0,\forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$

由Weierstrass第一逼近定理:$\forall\varepsilon>0$, $\exists$多项式函数$P(x)$,使得$|f(x)-P(x)|\le\varepsilon,\forall x\in[-1,1]$

而且$\left|\int_{-1}^1 f(x)x^{2n}dx\right|\le\varepsilon,\forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$

固定n,有$\left|\int_{-1}^1 P(x)x^{2n}dx\right|=\left|\int_{-1}^1 f(x)x^{2n}dx\right|+\left|\int_{-1}^1[P(x)-f(x)]x^{2n}dx\right|$

$\le\left|\int_{-1}^1 f(x)x^{2n}dx\right|+\int_{-1}^1|f(x)-P(x)|x^{2n}dx\le\varepsilon+\varepsilon\int_{-1}^1 x^{2n}dx\le\dfrac{2n+3}{2n+1}\varepsilon\le3\varepsilon,\forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$

于是由ε任意性:$\int_{-1}^1 P(x)x^{2n}dx=0,\forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$

于是$0=\int_{-1}^1 P(x)x^{2n}dx=\int_{-1}^1\dfrac{P(x)+P(-x)}{2}x^{2n}dx$,其中$\dfrac{P(x)+P(-x)}{2}$表示$P(x)$中的$x^{2k}$,$k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$的项

于是$0=\int_{-1}^1\left(\dfrac{P(x)+P(-x)}{2}\right)^2dx\Rightarrow P(x)+P(-x)=0\Rightarrow|f(x)+f(-x)|\le|P(x)+P(-x)|+|f(x)-P(x)|+|f(-x)-P(-x)|\le2\varepsilon$

由ε任意性:$f(x)+f(-x)=0$,故f是奇函数.

②若$f(x)$是偶函数,即$f(x)=f(-x)$,固定n,我们有$\int_{-1}^1 f(x)x^{2n-1}dx=-\int_{-1}^1 f(-x)x^{2n-1}dx=\dfrac{1}{2}\int_{-1}^1[f(x)-f(-x)]x^{2n-1}dx=0,\forall n\in\mathbb{N}$

若$\int_{-1}^1 f(x)x^{2n-1}dx=0,\forall n\in\mathbb{N}$

由Weierstrass第一逼近定理:$\forall\varepsilon>0$, $\exists$多项式函数$P(x)$,使得$|f(x)-P(x)|\le\varepsilon,\forall x\in[-1,1]$

而且$\left|\int_{-1}^1 f(x)x^{2n-1}dx\right|\le\varepsilon,\forall n\in\mathbb{N}$

固定n,有$\left|\int_{-1}^1 P(x)x^{2n-1}dx\right|=\left|\int_{-1}^1 f(x)x^{2n-1}dx\right|+\left|\int_{-1}^1[P(x)-f(x)]x^{2n-1}dx\right|$

$\le\left|\int_{-1}^1 f(x)x^{2n-1}dx\right|+\int_{-1}^1|f(x)-P(x)|x^{2n-1}dx\le\varepsilon+\varepsilon\int_{-1}^1 x^{2n-1}dx\le\dfrac{2n+2}{2n}\varepsilon\le2\varepsilon,\forall n\in\mathbb{N}$

于是由ε任意性:$\int_{-1}^1 P(x)x^{2n-1}dx=0,\forall n\in\mathbb{N}$

于是$0=\int_{-1}^1 P(x)x^{2n-1}dx=\int_{-1}^1\dfrac{P(x)-P(-x)}{2}x^{2n-1}dx$,其中$\dfrac{P(x)-P(-x)}{2}$表示$P(x)$中的$x^{2k-1}$,$k\in\mathbb{N}$的项

于是$0=\int_{-1}^1\left(\dfrac{P(x)-P(-x)}{2}\right)^2dx\Rightarrow P(x)-P(-x)=0\Rightarrow|f(x)-f(-x)|\le|P(x)-P(-x)|+|f(x)-P(x)|+|f(-x)-P(-x)|\le2\varepsilon$

由ε任意性:$f(x)-f(-x)=0$,故f是偶函数.

3.(1) 由Weierstrass第二逼近定理：$\forall \varepsilon>0$, $\exists$三角多项式$T(x)=a_0+\sum_{n=1}^{m} a_n \sin nx+b_n \cos nx, x\in[0,2\pi]$

使得$|f(x)-T(x)|\le\varepsilon$

由于$\left|\int_0^{2\pi} T(x)\cos nx dx\right|\le\left|\int_0^{2\pi}[f(x)-T(x)]\cos nx dx\right|+\left|\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx\right|\le\int_0^{2\pi}|f(x)-T(x)||\cos nx|dx\le\varepsilon\int_0^{2\pi}|\cos nx|dx\le 2\pi\varepsilon$

由ε任意性：$\int_0^{2\pi} T(x)\cos nx dx=0, \forall n\in\mathbb{N}$

同理：$\int_0^{2\pi} T(x)\sin nx dx=0, \forall n\in\mathbb{N}$

于是$\int_0^{2\pi}[T(x)-a_0]^2 dx=0$，故$T(x)=a_0$为常数，在$[0,2\pi]$上.

3.(2) 由$f(x)$的周期性，只需要考虑在$[-2\pi,2\pi]$上证明.

由Weierstrass第二逼近定理：$\forall \varepsilon>0$, $\exists$三角多项式$T(x)=a_0+\sum_{n=1}^{m} a_n \sin nx+b_n \cos nx, x\in[-2\pi,2\pi]$

使得$|f(x)-T(x)|\le\varepsilon$

由于$\left|\int_{-2\pi}^{2\pi} T(x)\cos nx dx\right|\le\left|\int_{-2\pi}^{2\pi}[f(x)-T(x)]\cos nx dx\right|+\left|\int_{-2\pi}^{2\pi} f(x)\cos nx dx\right|\le\int_{-2\pi}^{2\pi}|f(x)-T(x)||\cos nx|dx\le\varepsilon\int_{-2\pi}^{2\pi}|\cos nx|dx\le 4\pi\varepsilon$

由ε任意性：$\int_{-2\pi}^{2\pi} T(x)\cos nx dx=0, \forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$

由三角函数的正交性：$a_0=0, b_k=0, k=1,2,\cdots,m$，故$T(x)=\sum_{n=1}^{m} a_n \sin nx, x\in[-2\pi,2\pi]$

于是$T(x)+T(-x)=0$，故$|f(x)+f(-x)|\le|T(x)+T(-x)|+|T(x)-f(x)|+|T(-x)-f(-x)|\le 2\varepsilon$

由ε任意性：$f(x)+f(-x)=0$，故f是奇函数

3.(3) 由$f(x)$的周期性，只需要考虑在$[-2\pi,2\pi]$上证明.

由Weierstrass第二逼近定理：$\forall \varepsilon>0$, $\exists$三角多项式$T(x)=a_0+\sum_{n=1}^{m} a_n \sin nx+b_n \cos nx, x\in[-2\pi,2\pi]$

使得$|f(x)-T(x)|\le\varepsilon$

由于$\left|\int_{-2\pi}^{2\pi} T(x)\sin nx dx\right|\le\left|\int_{-2\pi}^{2\pi}[f(x)-T(x)]\sin nx dx\right|+\left|\int_{-2\pi}^{2\pi} f(x)\sin nx dx\right|\le\int_{-2\pi}^{2\pi}|f(x)-T(x)||\sin nx|dx\le\varepsilon\int_{-2\pi}^{2\pi}|\sin nx|dx\le 4\pi\varepsilon$

由ε任意性：$\int_{-2\pi}^{2\pi} T(x)\sin nx dx=0, \forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$

由三角函数的正交性：$a_k=0, k=1,2,\cdots,m$，故$T(x)=a_0+\sum_{n=1}^{m} b_n \cos nx, x\in[-2\pi,2\pi]$

于是$T(x)-T(-x)=0$，故$|f(x)-f(-x)|\le|T(x)-T(-x)|+|T(x)-f(x)|+|T(-x)-f(-x)|\le 2\varepsilon$

由ε任意性：$f(x)-f(-x)=0$，故f是偶函数.

9.(1) $\forall\varepsilon>0$，取$\delta=\left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$，则对于任意$x,y\in I$: $|x-y|<\delta$，对于任意$n\in\mathbb{N}$，有

$|f_n(x)-f_n(y)|\le M|x-y|^{\alpha}<\varepsilon$.故$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$在$I$上等度一致连续.

9.(2) $\forall\varepsilon>0$，取$\delta=\frac{\varepsilon}{M}$，则对于任意$x,y\in I$: $|x-y|<\delta$，对于任意$n\in\mathbb{N}$，有

$|f_n(x)-f_n(y)|\le|f_n'(\xi)||x-y|<\varepsilon$.故$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$在$I$上等度一致连续.

11.(1) $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$, $s.t.\ \forall x,y\in I: |x-y|<\delta$, 有 $|f_n(x)-f_n(y)|<\varepsilon$, $\forall n\in\mathbb{N}$

$\exists N>0$, $s.t.\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$, $\forall n\geq N, x\in I$

故 $|f(x)-f(y)|\leq|f_N(x)-f(x)|+|f_N(x)-f_N(y)|+|f_N(y)-f(y)|\leq 3\varepsilon$, $\forall x,y\in I: |x-y|<\delta$

于是 f 在 I 上一致连续.

11.(2) 固定 $x_0\in I$, 对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 x_0 的邻域 V_1, $s.t.\ \forall x\in V_1$, 有

$|f_n(x)-f_n(x_0)|\leq\varepsilon$, $\forall n\in\mathbb{N}$

由于 f_n 收敛到 f, 故在上式中令 $n\to\infty$, 就有 $|f(x)-f(x_0)|\leq\varepsilon$

于是 f 在 I 上连续.

2. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}$, 故 $\frac{1}{\frac{p}{r}}+\frac{1}{\frac{q}{r}}=1$

由 $young$ 不等式可知：对于任意 $x\in(a,b)$, 都有

$$\left|\frac{[f(x)]^r}{\left[\int_a^b|f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{r}}}\cdot\frac{[g(x)]^r}{\left[\int_a^b|g(x)|^q dx\right]^{\frac{1}{r}}}\right|\leq\frac{\left|\frac{[f(x)]^r}{\left[\int_a^b|f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{r}}}\right|^{\frac{p}{r}}}{\frac{p}{r}}+\frac{\left|\frac{[g(x)]^r}{\left[\int_a^b|g(x)|^q dx\right]^{\frac{1}{r}}}\right|^{\frac{q}{r}}}{\frac{q}{r}}=\frac{r}{p}\frac{[f(x)]^p}{\int_a^b|f(x)|^p dx}+\frac{r}{q}\frac{[g(x)]}{\int_a^b|g(x)}$$

因此 $f(x)g(x)$ 在 (a,b) 上 r 方可积

两边做积分可得: $\int_a^b|f(x)g(x)|^r dx\leq\left(\int_a^b|f(x)|^p dx\right)^{\frac{r}{p}}\left(\int_a^b|g(x)|^q dx\right)^{\frac{r}{q}}$

~~$\int_2^{+\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx < \infty$~~

~~$\int_2^{+\infty} \frac{1}{(\ln x)^2} dx$~~

Check: $f \in C(a,b)$: fix $x_0 \in (a,b)$. 则 $\forall \varepsilon > 0$. 存在 $N > 0$ s.t. $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$.
$\forall x_0$ 邻域 V_1 s.t. $|f_n(x_0) - f_n(x)| < \varepsilon$. $\forall x \in V_1$
$\forall x_0$ 邻域 V_2 s.t. $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. $\forall x \in V_2$ ← 内闭一致收敛
$\Rightarrow \forall x \in V_1 \cap V_2$. 有 $|f(x) - f(x_0)| < 3\varepsilon$.
$\Rightarrow f \in C(a,b)$

3.1. $\forall x \in (a,b)$. 都有 $x \in [\frac{a+x}{2}, \frac{b+x}{2}] \subset (a,b)$，于是 $\forall \varepsilon > 0$. $\exists N(x,\varepsilon) > 0$. 使得

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \quad \forall n \geq N(x,\varepsilon)$$

于是，$|f(x)| \leq |f_{N(x,\varepsilon)}(x) - f(x)| + |f_{N(x,\varepsilon)}(x)| < \varepsilon + F(x)$，由 ε 任意性：$|f(x)| \leq F(x)$.
故 f 在 (a,b) 上有 $|f(x)| \leq F(x)$. 而 $F(x)$ 广义可积，故 $f(x)$ 在 (a,b) 上绝对可积. □

3.2. Goal: $\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx = 0$.

由于 $|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x)| + |f(x)|$. 故 $|f_n(x) - f(x)|$ 在 (a,b) 上可积.
$\forall \varepsilon > 0$. 存在 c, d. 满足 $a < c < d < b$. 使得

$$\int_a^c |f_n - f| < \varepsilon, \quad \int_d^b |f_n - f| < \varepsilon.$$

由于 $f_n \rightrightarrows f$ on $[c,d] \subset (a,b)$. 故存在 $N(\varepsilon) > 0$. s.t.

$$\int_c^d |f_n - f| < \varepsilon. \quad \forall n > N(\varepsilon)$$

故

$$\int_a^b |f_n - f| = \int_a^c |f_n - f| + \int_c^d |f_n - f| + \int_d^b |f_n - f| < 3\varepsilon. \quad \forall n > N(\varepsilon)$$

~~由 ε 任意性：$\int_a^b |f_n - f|$~~. 于是 $\overline{\lim_{n\to\infty}} \int_a^b |f_n - f| \leq 3\varepsilon$. 由 ε 任意性：$\overline{\lim_{n\to\infty}} \int_a^b |f_n - f| = 0$

~~令 $n \to \infty$. 可得 $\overline{\lim_{n\to\infty}}$~~ $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_a^b |f_n - f| = 0$

进而 $\left|\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n - \int_a^b f\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\int_a^b (f_n - f)\right| \leq \lim_{n\to\infty} \int_a^b |f_n - f| = 0$

于是 $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$. □

4. $\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} |f_n - f| = \lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} |\varphi(x)(1+\frac{x}{n})^{-n} - \varphi(x) e^{-x}| dx$ ~~$\leq \sup_{x \geq 0} \varphi(x) \int_0^{+\infty}$~~

$$\leq \sup_{x \geq 0} \varphi(x) \cdot \lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} (1+\frac{x}{n})^{-n} - e^{-x} dx$$

$$= \sup_{x \geq 0} \varphi(x) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-1} = 0$$

□

2.

从 $\forall \varepsilon>0$. $\exists N>0$. s.t. $\forall n>N$, 有

$$\int_a^b |f_n-f|^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{\int_a^b g^2}$$

于是, $\forall n>N$, $\forall x\in(a,b)$ 有.

$$\begin{aligned}|h_n(x)-h(x)| &= \left|\int_a^x (f_n(t)-f(t))\,g(t)\,dt\right| \\ &\leq \int_a^x |f_n(t)-f(t)|\,|g(t)|\,dt \\ &\leq \int_a^b |f_n(t)-f(t)|\,|g(t)|\,dt \\ &\overset{\text{Hölder}}{\leq} \sqrt{\int_a^b |f_n-f|^2 \cdot \int_a^b |g|^2} \\ &\leq \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{\int_a^b g^2}\cdot\int_a^b g^2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

□