数学分析 II(崔尚斌) 第六周作业

GorgeousLaTeX 经典之作

作者：乐绎华

组织：SYSU

时间：April 5, 2024

学号：23363017

原神 启动

习题 11.1 第 3 题

(2) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}, n = 1, 2, \cdots.$

(a). $0 \le x \le a\ (0 < a < 1)$

(b). $a \le x \le b\ (0 < a < 1 < b)$

(c). $b \le x < +\infty\ (b > 1)$

(4) $f_n(x) = e^{-(x-n)^2}, n = 1m2\cdots$

(a). $a \le x \le b\ (-\infty < a < b < +\infty)$

(b). $-\infty < x < \infty$

(6) $f_n = n(\sqrt{x+\frac{1}{n}} - \sqrt{x}), n = 1, 2, \cdots$

(a). $a \le x < \infty\ (a > 0)$

(b). $0 < x < +\infty$

证明

(2) $f_n \to 0, x \in [0, a]\,(0 < a < 1)$ 时, $|f_n - 0| = \dfrac{x^n}{1+x^n} \le \dfrac{a^n}{1+a^n} \to 0\,(as\ n \to \infty)$, 故一致收敛

$$f_n \to f = \begin{cases} 0, & x \in [a, 1) \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \\ 1, & x \in (1, b] \end{cases}, x \in [a, 1) \text{ 时}, |f_n - 0| = \frac{x^n}{1+x^n} \to 0\,(as\ n \to \infty)$$

$x = 1$时, $\left|f_n - \dfrac{1}{2}\right| = 0\,(as\ n \to \infty)$, $x \in (1, b]$ 时, $|f_n - 1| = \dfrac{1}{1+x^n} \to 0\,(as\ n \to \infty)$, 故一致收敛

$f_n \to 1, x \in [b, +\infty)$ 时, $|f_n - 1| = \dfrac{1}{1+x^n} \le \dfrac{1}{1+b^n} \to 0\,(as\ n \to \infty)$, 故一致收敛 □

(4) $x \in [a, b], f_n \to 0, \left|e^{-(x-n)^2}\right| \le \left|e^{-(b-n)^2}\right| \to 0\,(as\ n \to \infty)$, 故一致收敛

$x \in (-\infty, +\infty)$, 取$x_n = n$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \left|e^{-(x_n-n)^2} - 0\right| = \left|e^0\right| = 1 \ne 0$, 故不一致收敛 □

(6) $a \le x < +\infty, f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n = \lim\limits_{n\to\infty} n\left[\left(x+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right] = \lim\limits_{n\to\infty} nx^{\frac{1}{2}}\left[\left(1+\frac{1}{nx}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right] = \lim\limits_{n\to\infty} nx^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2nx} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}$

$\lim\limits_{n\to\infty} |f_n - f| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|n\left[\left(x+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right] - \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|nx^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2nx} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}\right| = 0$, 故一致收敛

$0 < x_n < +\infty$, 取$x_n = \frac{1}{n}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} |f_n - f| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|n\left[\left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right] - \frac{\sqrt{n}}{2}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\left(\sqrt{2} - \frac{3}{2}\right)\sqrt{n}\right| \to +\infty$, 故不一致收敛

□

习题 11.1 第 7 题

设 $\{f_n(x)\}$ 在有界闭区间 I 桑著带你收敛于函数 $f(x)$，且存在 $M > 0$ 和 $0 < \alpha \le 1$ 使成立

$$|f_n(x) - f_n(y)| \le M\,|x-y|^{\alpha}, \quad \forall x, y \in I, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

证明：$f_n(x)$ 在 I 上一致收敛于 $f(x)$.

证明 不妨设$I = [0, 1]$, 故$|f_n(x) - f_n(y)| \le M\,|x-y|^{\alpha} \le M\,|x-y|, \forall n, \forall x, y \in I$

于是, 对于任意给定的$x, y \in I$, 有

$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(y) - f(y)| + M\,|x-y|$

由于f_n在I上逐点收敛于f, 两边同时令$n \to \infty$, 则有$|f(x) - f(y)| \le M\,|x-y|, \forall x, y \in I$

$\forall \varepsilon > 0$, 取$m = \lceil \dfrac{2M}{\varepsilon} \rceil \ge \dfrac{2M}{\varepsilon}, y_k = \dfrac{k}{m}, k = 0, 1, \cdots, m$

则存在$N > 0$, 使得$|f(y_k) - f_n(y_k)| < \dfrac{\varepsilon}{2}, \forall n > N, k = 0, 1, \cdots m$

于是对于任意$x \in I$, 必然有某个y_k, 使得$|x - y_k| < \dfrac{1}{2m} \le \dfrac{\varepsilon}{4M}$

那么$|f(x) - f_n(x)| \le |f(x) - f(y_k)| + |f(y_k) - f_n(y_k)| + |f_n(y_k) - f_n(x)| \le 2M\,|x - y_k| + |f(y_k) - f_n(y_k)| \le 2M \cdot \dfrac{\varepsilon}{4M} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

于是f_n在I上一致收敛于f. □

习题 11.1 第 9 题

设对每个正整数 n，函数 $f_n(x)$ 在区间 I 上有界. 又设当 $x \to \infty$ 时，$f_n(x)$ 在 I 上一致收敛于 $f(x)$. 证明：

(1) 极限函数 $f(x)$ 在 I 上有界

(2) 函数序列 $f_n(x)(n = 1, 2, \cdots)$ 在 I 上一致有界. 即存在 $M > 0$ 使对所有 n 都有

$$|f_n(x)| \leq M, \quad \forall x \in I.$$

证明 由于f_n在I上一致收敛于f, 故存在$N > 0$, 使得$|f_n(x) - f(x)| \leq 1, \forall n \geq N, \forall x \in I$

故$|f(x)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x)| \leq |f_N(x)| + 1 \leq \sup\limits_{x \in I} f_N(x) + 1 < \infty$

$\forall n \geq N, \forall x \in I, |f_n(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x)| \leq 1 + \sup\limits_{x \in I} f_N(x) + 1 < \infty$

故取$M = \sup\limits_{x \in \mathrm{I}, n \leq N} f_n(x) + 2$就有, $|f_n(x)| \leq M, \forall x \in I, \forall n$ □

补充习题 9′

设 $\{f_n\}$ 是区间 I 上的一列函数，x_0 是 I 的一个聚点 (即存在互不相同的一列数 $x_n \in I, n = 1, 2, \cdots$，使成立 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$). 假设成立

(1) $\{f_n\}$ 在 I 上一致收敛于函数 f

(2) 对每个正整数 n 都成立 $\lim\limits_{x \to x_0, x \in I} f_n(x) = A_n$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$

证明：$\lim\limits_{x \to x_0, x \in I} f(x) = A$

证明 对于I中任意趋于x_0的序列$\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, 有$\lim\limits_{k\to\infty} f_n(x_k) = A_n$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, s.t. |f_n(x) - f(x)| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}, |A_n - A| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}, \forall n \geq N, \forall x \in I$

$|f(x_k) - A| \leq |f(x_k) - f_N(x_k)| + |f_N(x_k) - A_N| + |A_N - A| \leq \dfrac{\varepsilon}{2} + |f_N(x_k) - A_N| + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon + |f_N(x_k) - A_N|$

故$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} |f(x_k) - A| \leq \varepsilon + \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} |f_N(x_k) - A_N| = \varepsilon$

由ε任意性：$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} |f(x_k) - A| = 0$, 故$\lim\limits_{k\to\infty} |f(x_k) - A| = 0$, 对于$I$中趋于$x_0$的任意序列$\{x_k\}$

故$\overline{\lim\limits_{x\to x_0}} f(x) = \underline{\lim\limits_{x\to x_0}} f(x) = 0$, 故$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$. □