数学分析 II(崔尚斌) 第五周作业

GorgeousLaTeX 经典之作

作者：乐绎华

组织：SYSU

时间：March 28, 2024

学号：23363017

改作业这么累，看看这个好看的模板，让眼睛休息一下吧。

习题 10.2 第 6 题

设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个单调递增的有界正数列. 证明：

1. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1-\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$ 收敛
2. 对于任意 $\mu,\nu\in\mathbb{R}$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n+1}^{\mu}a_n^{\nu}(\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n+1}})$ 收敛.

证明

1.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}}$$
由于 $\forall m\in\mathbb{N}, \left|\sum\limits_{n=1}^{m} a_{n+1}-a_n\right| = |a_{m+1}-a_1|$ 有界，$\dfrac{1}{a_{n+1}}$ 递减趋于0. 故级数收敛. □

2. 由于 $\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n+1}}\right)\right| = \left|\dfrac{1}{a_1}-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n}\right|$ 收敛，a_n^{ν} 单调有界. 故 $\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{\nu}\left(\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n+1}}\right)\right|$ 收敛. 又因为 a_{n+1}^{μ} 单调有界，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n+1}^{\mu}a_n^{\nu}\left(\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n+1}}\right)$ 收敛 □

习题 10.2 第 7 题

已知正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，证明：

1. 对任意正整数 m，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[m]{u_k u_{k+1}\cdots u_{k+m-1}}$ 收敛
2. 对任意 $p>1$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^p$ 收敛
3. 对任意满足 $\mu+\nu>1$ 的 $\mu>0,\nu>0$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_n^{\mu}}{n^{\nu}}$ 收敛

证明

1. $\forall\varepsilon>0,\exists N>0, s.t. \sum\limits_{k=p}^{q} u_k<\varepsilon,\forall q>p>N.$

   $\forall q>p>N, \sum\limits_{k=p}^{q}\sqrt[m]{u_k u_{k+1}\cdots u_{k+m-1}} \le \sum\limits_{k=p}^{q}\dfrac{u_k+u_{k+1}+\cdots+u_{k+m-1}}{m} < \dfrac{\varepsilon+\varepsilon+\cdots+\varepsilon}{m}=\varepsilon$

   所以由柯西收敛准则：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[m]{u_n u_{n+1}\cdots u_{n+m-1}}$收敛 □

2. $\forall 0<\varepsilon<1,\exists N>0, s.t. \sum\limits_{k=s}^{t} u_k<\varepsilon,\forall t>s>N.$故$0<u_k<1$

   $\forall t>s>N, \sum\limits_{k=s}^{t} u_k^p < \sum\limits_{k=s}^{t} u_k<\varepsilon$, 由柯西收敛准则：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^p$收敛 □

3. $\mu+\nu>1,\mu>0,\nu>0, \dfrac{1}{\frac{\mu+\nu}{\mu}}+\dfrac{1}{\frac{\mu+\nu}{\nu}}=1$

   正项级数 $\lim\limits_{m\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{m}\dfrac{u_n^{\mu}}{n^{\nu}} \le \lim\limits_{m\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{m}\dfrac{\mu}{\mu+\nu}u_n^{\mu+\nu}+\lim\limits_{m\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{m}\dfrac{\nu}{\mu+\nu}\dfrac{1}{n^{\mu+\nu}}$ 由2.可知收敛.(这里用了一次 young 不等式，一次极限符号拆开的不等式) □

习题 10.2 第 12 题

1. 证明：如果通项单调递减的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} nu_n = 0$
2. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的通项如下：
$$u_n = \frac{1}{2^n}, \text{当}n\text{不是 2 的整幂}, \qquad u_n = \frac{1}{n}, \text{当}n\text{是 2 的整幂}$$
证明该级数收敛，但 $\lim_{n\to\infty} nu_n \neq 0$，更确切地说有子列使 $\lim_{k\to\infty} n_k u_{n_k} = 1$
3. 举例说明，对任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在收敛的正项数列 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，其通项有子列满足 $\lim_{k\to\infty} n_k^{\varepsilon} u_{n_k} = 1$

证明

1. 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛且通项递减，故 $0 \le \lim_{n\to\infty} nu_n = \lim_{n\to\infty} 2nu_{2n} \le 2\lim_{n\to\infty}\sum_{i=n}^{2n} u_i = 0$, 故 $\lim_{n\to\infty} nu_n = 0$ □
2. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\sum_{i=2^{n-1}}^{2^n-1} u_i = \lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{2^{n-1}} + \sum_{i=2^{n-1}+1}^{2^n-1}\frac{1}{2^i} = \lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{2^{n-1}} + \sum_{i=2^{n-1}+1}^{2^n-1}\frac{1}{2^i}$
$= \lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{2^{n-1}-1}}\left(2 - \frac{1}{2^{2^{n-1}}}\right) \le \lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}} = 4 < \infty$, 收敛
取 $n_k = 2^k$, 则有 $\lim_{k\to\infty} n_k u_{n_k} = \lim_{k\to\infty} n_k \frac{1}{n_k} = 1$ □
3. 取 $u_n = \begin{cases} \frac{1}{n^{\varepsilon}}, n = 2^{\lceil \frac{k}{\varepsilon} \rceil}, k \in \mathbb{N} \\ 0, otherwise \end{cases}$
$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\lceil \frac{k}{\varepsilon}\rceil \varepsilon}} \le \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k} = 1 < \infty$ 收敛
取 $n_k = 2^{\lceil \frac{k}{\varepsilon} \rceil}$, 则有 $\lim_{k\to\infty} n_k^{\varepsilon}\frac{1}{n_k^{\varepsilon}} = 1$ □

习题 11.1 第 1 题

证明函数序列 $f_n(x)(n = 1, 2, \cdots, n)$ 在区间 I 上一致收敛于函数 $f(x)$ 的充要条件是存在收敛于零的正数列 $\varepsilon_n(n = 1, 2, \cdots)$ 使成立
$$|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon_n, \quad \forall x \in I, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

证明 f_n 一致收敛于 $f \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N > 0, s.t. |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall n > N, \forall x \in I$

- $(\Rightarrow:)$ 若 f_n 一致收敛于 f, 取 $\varepsilon_n = \sup_{x\in I}|f_n(x) - f(x)|$, 就有 $\forall\varepsilon > 0, \exists N > 0, s.t.$
$$\varepsilon_n = \sup_{x\in I}|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon.$$
由 ε 任意性, 就有 $\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0$.
- $(\Leftarrow:)$ 若存在收敛于0的正数列 $\varepsilon_n, s.t. |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_n, \forall x \in I$
则存在 $N > 0, s.t. 0 < \varepsilon_n < \varepsilon, \forall n > N$, 则有 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_n < \varepsilon, \forall n > N, \forall x \in I$ □

习题 11.1 第 2 题

证明 $f_n(x)$ 在 I 上不一致收敛于 $f(x)$ 的充要条件是存在点列 $x_n \in I(n = 1, 2, \cdots)$ 使当 $n \to \infty$ 时, $f_n(x_n) - f(x_n) \nrightarrow 0$.

证明 由习题 11.1 第 1 题可知，$f_n(x)$ 在 I 上不一致收敛于 $f(x) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in I}|f_n - f| = 0$ 不成立 $\Leftrightarrow \exists\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in I, s.t. f_n(x_n) - f(x_n) \nrightarrow 0$. □

习题 11.1 第 3 题

(2) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}, n = 1, 2, \cdots$.

(a). $0 \le x \le a\ (0 < a < 1)$

(b). $a \le x \le b\ (0 < a < 1 < b)$

(c). $b \le x < +\infty\ (b > 1)$

(4) $f_n(x) = e^{-(x-n)^2}, n = 1m2\cdots$

(a). $a \le x \le b\ (-\infty < a < b < +\infty)$

(b). $-\infty < x < \infty$

(6) $f_n = n(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x}), n = 1, 2, \cdots$

(a). $a \le x < \infty\ (a > 0)$

(b). $0 < x < +\infty$

证明

(2) $f_n \to 0, x \in [0, a]\,(0 < a < 1)$ 时, $|f_n - 0| = \dfrac{x^n}{1+x^n} \le \dfrac{a^n}{1+a^n} \to 0\,(as\ n \to \infty)$, 故一致收敛

$$f_n \to f = \begin{cases} 0, & x \in [a, 1) \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \\ 1, & x \in (1, b] \end{cases}, x \in [a, 1) \text{时}, |f_n - 0| = \frac{x^n}{1+x^n} \to 0\,(as\ n \to \infty)$$

$x = 1$ 时, $\left|f_n - \dfrac{1}{2}\right| = 0\,(as\ n \to \infty)$, $x \in (1, b]$ 时, $|f_n - 1| = \dfrac{1}{1+x^n} \to 0\,(as\ n \to \infty)$, 故一致收敛

$f_n \to 1, x \in [b, +\infty)$ 时, $|f_n - 1| = \dfrac{1}{1+x^n} \le \dfrac{1}{1+b^n} \to 0\,(as\ n \to \infty)$, 故一致收敛 □

(4) $x \in [a, b]$, $f_n \to 0$, $\left|e^{-(x-n)^2}\right| \le \left|e^{-(b-n)^2}\right| \to 0\,(as\ n \to \infty)$, 故一致收敛

$x \in (-\infty, +\infty)$, 取 $x_n = n$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \left|e^{-(x_n-n)^2} - 0\right| = \left|e^0\right| = 1 \ne 0$, 故不一致收敛 □

(6) $a \le x < +\infty, f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n = \lim\limits_{n\to\infty} n\left[\left(x + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right] = \lim\limits_{n\to\infty} nx^{\frac{1}{2}}\left[\left(1 + \frac{1}{nx}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right] = \lim\limits_{n\to\infty} nx^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2nx} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}$

$\lim\limits_{n\to\infty} |f_n - f| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|n\left[\left(x + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right] - \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|nx^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2nx} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}\right| = 0$, 故一致收敛

$0 < x_n < +\infty$, 取 $x_n = \frac{1}{n}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} |f_n - f| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|n\left[\left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right] - \frac{\sqrt{n}}{2}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\left(\sqrt{2} - \frac{3}{2}\right)\sqrt{n}\right| \to +\infty$, 故不一致收敛

□

习题 11.1 第 4 题

设 $\{f_n(x)\}$ 和 $\{g_n(x)\}$ 都在区间 I 上一致收敛，且对每个 n，$f_n(x)$ 和 $g_n(x)$ 都是 I 上的有界函数. 证明：$\{f_n(x)g_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛.

证明 **Step1** : Check : f, g 有界, $\{f_n\}, \{g_n\}$ 一致有界

因为 f_n 一致收敛于 f, 故存在 $N > 0, s.t. |f(x) - f_n(x)| < 1, \forall n \ge N, \forall x \in I$

因为 $f_n(x)$ 在 I 上有界, 故 $\sup\limits_{x\in I} |f_n(x)| < \infty, \forall n$

故 $|f(x)| \le |f_N(x)| + |f(x) - f_N(x)| \le 1 + \sup\limits_{x\in I} |f_N(x)| < \infty, \forall x \in I$

故 $f(x)$ 有界, 同理 $g(x)$ 有界

同时 $\forall n, \sup\limits_{x\in I} |f_n(x)| \le \sup\limits_{x\in I} (|f(x) - f_n(x)| + |f(x)|) \le \sup\limits_{x\in I} |f(x) - f_n(x)| + \sup\limits_{x\in I} |f(x)|$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in I} |f(x) - f_n(x)| = 0$, 故 $\sup\limits_{x\in I, n\in\mathbb{N}} |f(x) - f_n(x)| \le \max\left\{\sup\limits_{x\in I, n\in\mathbb{N}} |f(x) - f_n(x)|, 1\right\} =: M$

故 $\forall n, \forall x \in I, |f_n(x)| \le \sup\limits_{x\in I, n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| \le M + \sup\limits_{x\in I} |f(x)| < \infty$, 故 $\{f_n\}, \{g_n\}$ 一致有界

Step2 : Check : $f_n g_n \rightrightarrows f_n g$

由于 $f_n \rightrightarrows f, g_n \rightrightarrows g$, 故 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, s.t. |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, |g_n(x) - g(x)| < \varepsilon, \forall n > N, \forall x \in I$

故 $\forall x \in I, n > N, |f_n g_n - f_n g| \le |f_n||g - g_n| \le \sup\limits_{x\in I, n\in\mathbb{N}} |f_n| \cdot |g - g_n| \le \varepsilon \cdot \sup\limits_{x\in I, n\in\mathbb{N}} |f_n|$, $\sup\limits_{x\in I, n\in\mathbb{N}} |f_n|$ 为常值, 故由 ε 任意性, $|f_n g_n - f_n g| \to$

$0\,(as\ n \to \infty)$

Step3 : Check : $f_n g \rightrightarrows fg$

由于$f_n \rightrightarrows f, g_n \rightrightarrows g$, 故$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, s.t. |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, |g_n(x) - g(x)| < \varepsilon, \forall n > N, \forall x \in I$

故$\forall x \in I, n > N, |f_n g - fg| \leq |g||f_n - f| \leq \sup\limits_{x\in I}|g| \cdot |f_n - f| \leq \varepsilon \cdot \sup\limits_{x\in I}|g|$, $\sup\limits_{x\in I}|g|$ 为常值, 故由ε任意性, $|f_n g - fg| \to 0\,(as\ n \to \infty)$

Step4 : Check : $f_n g_n \rightrightarrows fg$

$\forall x \in I, n > N, |f_n g_n - fg| \leq |f_n g_n - f_n g| + |f_n g - fg| \leq \varepsilon \cdot \left(\sup\limits_{x\in I, n\in\mathbb{N}} |f_n| + \sup\limits_{x\in I}|g|\right)$, 由$\varepsilon$任意性, $|f_n g_n - fg| \to 0\,(as\ n \to \infty)$

故$f_n g_n$一致收敛于fg. □

习题 11.1 第 6 题

设存在收敛的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ 使成立

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq M_n, \quad \forall x \in I, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

证明：$f_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

证明 由于正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$收敛, 故由柯西收敛准则 :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, s.t. \left|\sum_{k=n}^{m} M_k\right| < \varepsilon, \forall m > n > N$$

故

$$|f_{m+1} - f_n| = \left|\sum_{k=n}^{m} (f_{k+1} - f_k)\right| \leq \sum_{k=n}^{m} |f_{k+1} - f_k| \leq \sum_{k=n}^{m} M_k < \varepsilon, \forall m > n > N, \forall x \in I \tag{1}$$

故有 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛, 记 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于$f.\left(\text{在}I\text{上}\right)$

在公式 1中取 $m \to \infty$, 则有 $|f - f_n| \leq \varepsilon, \forall n > N, \forall x \in I$. 由 ε 任意性, 我们有 f_n 一致收敛于 f. □