1. 设 $x, y, x_n, y_n \in \mathbf{R}^m$, $n=1,2,\cdots$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. 证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = x \pm y$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = x \cdot y$; (3) $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |x|$.

2. 设点列 $x_n \in \mathbf{R}^m$ $(n=1,2,\cdots)$ 满足条件 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_{n+1}-x_n| < +\infty$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

3. 证明距离函数 $d(x,y)=|x-y|$ 的下列性质:

(1) $|d(x,y)-d(x,z)| \leqslant d(y,z)$, $\forall x,y,z \in \mathbf{R}^m$;

(2) $d(x,y)$ 是 x,y 的连续函数, 即若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n'\to\infty} y_{n'} = y$, 则 $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ n'\to\infty}} d(x_n, y_{n'}) = d(x,y)$, 即 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbf{N}$, 使当 $n, n' > N$ 时, 有 $|d(x_n, y_{n'}) - d(x,y)| < \varepsilon$.

4. 设 $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^m$, 而 c 是实数. 证明:

(1) 点集 $\{x \in \mathbf{R}^m : \boldsymbol{a}\cdot x < c\}$ 和 $\{x \in \mathbf{R}^m : \boldsymbol{a}\cdot x > c\}$ 都是开集;

(2) 点集 $\{x \in \mathbf{R}^m : \boldsymbol{a}\cdot x = c\}$, $\{x \in \mathbf{R}^m : \boldsymbol{a}\cdot x \leqslant c\}$ 和 $\{x \in \mathbf{R}^m : \boldsymbol{a}\cdot x \geqslant c\}$ 都是闭集.

1.(1) *Since* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, *then*

$\forall \epsilon > 0$, $\exists N > 0$, *s.t.* $\forall n > N$, *we have* $d(x, x_n) < \frac{\epsilon}{2}$, $d(y, y_n) < \frac{\epsilon}{2}$

Then $d(x_n \pm y_n, x \pm y) \le d(x_n \pm y_n, x \pm y_n) + d(x \pm y_n, x \pm y)$

$$\overset{\text{translation invariant}}{=} d(x_{nn}, x \pm y_n) + d(\pm y_n, \pm y) = d(x_{nn}, x \pm y_n) + d(y_n, y) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Hence, $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n \pm y_n, x \pm y) = 0$, *i.e.* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm y_n = x \pm y$.□

1.(2) $|x_n \cdot y_n - x \cdot y| \le |x_n \cdot y_n - x_n \cdot y| + |x_n \cdot y - x \cdot y| = |x_n \cdot (y_n - y)| + |(x_n - x)\cdot y|$

$$\overset{\text{柯西不等式}}{\le} |x_n| \cdot |y_n - y| + |x_n - x| \cdot |y|$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$

对于任意$\epsilon > 0$,存在$N > 0$,使得对于任意$n > N$,有

$|x_n - x| < \epsilon$, $|y_n - y| < \epsilon$

于是$|x_n| \le |x| + |x_n - x| < |x| + \epsilon$

于是$|x_n \cdot y_n - x \cdot y| \le \epsilon(|x| + \epsilon) + \epsilon(|y|)$

由ϵ任意性,可知 $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n \cdot y_n - x \cdot y| = 0$,故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = x \cdot y$.□

1.(3) *Since* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$,

$\forall \epsilon > 0$, $\exists N > 0$, *s.t.* $\forall n > N$, *we have* $d(x, x_n) < \epsilon$

Then $|x_n| \le |x| + |x - x_n|$, $|x| \le |x_n| + |x - x_n|$

$\Rightarrow ||x| - |x_n|| \le |x - x_n| < \epsilon$(**note:** *the outer* $|\cdot|$ *of* $||x| - |x_n||$ *means the* absolute value *in* $\mathbb{R}$)

Hence, $\lim\limits_{n\to\infty} ||x| - |x_n|| = 0$, *i.e.* $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |x|$.□

2. $\sum_{n=1}^{\infty}|x_{n+1}-x_n|<\infty \Rightarrow \forall \epsilon>0,\ \exists N>0, s.t. \forall n>N$, 有 $|x_{n+1}-x_n|<\epsilon$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_{n+1}-x_n|=0$, $\{x_n\}_{n\geq 1}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的柯西列,故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.$\square$

3.(1) 由三角不等式:

$d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$

$d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$

于是 $|d(x,y)-d(x,z)|\leq d(y,z), \forall x,y,z\in\mathbb{R}^m$.$\square$

(2) $\forall \epsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N}$, 使得当 $n,n'>N$ 时,有

$(y_{n'},y)<\frac{\epsilon}{2}, d(x,x_n)<\frac{\epsilon}{2}$

$|d(x_n,y_{n'})-d(x,y)|\leq|d(x_n,y_{n'})-d(x_n,y)|+|d(x_n,y)-d(x,y)|$

$\overset{(1)}{\leq} d(y_{n'},y)+d(x,x_n)<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon.$

于是 $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ n'\to\infty}} d(x_n,y_{n'})=d(x,y)$.$\square$

4. $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^m-\{0\}, c\in\mathbb{R}$

(1) Check: $\{x\in\mathbb{R}^m:\boldsymbol{a}\cdot x<c\}$ 是开集

下面验证:对于任意 $x_0\in\{x\in\mathbb{R}^m:\boldsymbol{a}\cdot x<c\}$, 都存在一个开球 $B_{\delta'}(x_0)$, 使得 $B_{\delta'}(x_0)\subset\{x\in\mathbb{R}^m:\boldsymbol{a}\cdot x<c\}$

因为 $\boldsymbol{a}\cdot x_0\in\mathbb{R}, \boldsymbol{a}\cdot x<c$, $\{x\in\mathbb{R}:x<c\}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的开集,所以存在 $\delta>0$, 使得 $\boldsymbol{a}\cdot x_0<c-\delta\ldots\ldots(\star)$

取 $\delta'=\frac{\delta}{|\boldsymbol{a}|}>0$, 于是对于任意 $x\in B_{\frac{\delta}{|\boldsymbol{a}|}}(x_0)=\left\{x\in\mathbb{R}^m:|x-x_0|<\frac{\delta}{|\boldsymbol{a}|}\right\}$

我们有 $\boldsymbol{a}\cdot x=\boldsymbol{a}\cdot(x_0+(x-x_0))=\boldsymbol{a}\cdot x_0+\boldsymbol{a}\cdot(x-x_0)\overset{\text{这是}\mathbb{R}^m\text{中点乘的不等式}}{\leq}\boldsymbol{a}\cdot x_0+|\boldsymbol{a}|\cdot|x-x_0|$

$<\boldsymbol{a}\cdot x_0+|\boldsymbol{a}|\cdot\frac{\delta}{|\boldsymbol{a}|}=\boldsymbol{a}\cdot x_0+\delta\overset{(\star)}{<}c$

于是 $x\in\{x\in\mathbb{R}^m:\boldsymbol{a}\cdot x<c\}$, 于是 $B_{\delta'}(x_0)\subset\{x\in\mathbb{R}^m:\boldsymbol{a}\cdot x<c\}$.$\square$

Check: $\{x\in\mathbb{R}^m:\boldsymbol{a}\cdot x>c\}$ 是开集

下面验证:对于任意 $x_0\in\{x\in\mathbb{R}^m:\boldsymbol{a}\cdot x>c\}$, 都存在一个开球 $B_{\delta'}(x_0)$, 使得 $B_{\delta'}(x_0)\subset\{x\in\mathbb{R}^m:\boldsymbol{a}\cdot x>c\}$

因为 $\boldsymbol{a}\cdot x_0\in\mathbb{R}, \boldsymbol{a}\cdot x>c$, $\{x\in\mathbb{R}:x>c\}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的开集,所以存在 $\delta>0$, 使得 $\boldsymbol{a}\cdot x_0>c+\delta\ldots\ldots(\star)$

取 $\delta'=\frac{\delta}{|\boldsymbol{a}|}>0$, 于是对于任意 $x\in B_{\frac{\delta}{|\boldsymbol{a}|}}(x_0)=\left\{x\in\mathbb{R}^m:|x-x_0|<\frac{\delta}{|\boldsymbol{a}|}\right\}$

我们有 $\boldsymbol{a}\cdot x=\boldsymbol{a}\cdot(x_0+(x-x_0))=\boldsymbol{a}\cdot x_0+\boldsymbol{a}\cdot(x-x_0)\overset{\text{这是}\mathbb{R}^m\text{中点乘的不等式}}{\geq}\boldsymbol{a}\cdot x_0-|\boldsymbol{a}|\cdot|x-x_0|$

$>\boldsymbol{a}\cdot x_0+|\boldsymbol{a}|\cdot\frac{\delta}{|\boldsymbol{a}|}=\boldsymbol{a}\cdot x_0+\delta\overset{(\star)}{>}c$

于是 $x\in\{x\in\mathbb{R}^m:\boldsymbol{a}\cdot x>c\}$, 于是 $B_{\delta'}(x_0)\subset\{x\in\mathbb{R}^m:\boldsymbol{a}\cdot x>c\}$.$\square$

4.(2)Check:点集$\{x\in\mathbb{R}^m:\boldsymbol{a}\cdot x=c\}$是闭集.

只需验证$\{x\in\mathbb{R}^m:\boldsymbol{a}\cdot x=c\}=\overline{\{x\in\mathbb{R}^m:\boldsymbol{a}\cdot x=c\}}$

只需验证$\{x\in\mathbb{R}^m:\boldsymbol{a}\cdot x=c\}'\subseteq\{x\in\mathbb{R}^m:\boldsymbol{a}\cdot x=c\}$

对于任意$p\in\mathbb{R}^m$,若$\boldsymbol{a}\cdot p>c$,即$p\in\{x\in\mathbb{R}^m:\boldsymbol{a}\cdot x>c\}$,这是一个开集.

所以存在一个开球$B_\delta(p)\subset\{x\in\mathbb{R}^m:\boldsymbol{a}\cdot x>c\}$,

对于任意$q\in B_\delta(p)\subset\{x\in\mathbb{R}^m:\boldsymbol{a}\cdot x>c\}$,$\boldsymbol{a}\cdot q>c$. 于是$\boldsymbol{a}\cdot q\neq c$,$q\notin\{x\in\mathbb{R}^m:\boldsymbol{a}\cdot x=c\}$.

于是$B_\delta(p)\cap\{x\in\mathbb{R}^m:\boldsymbol{a}\cdot x=c\}=\varnothing$,这说明$p\notin\{x\in\mathbb{R}^m:\boldsymbol{a}\cdot x=c\}'$.

于是$\{x\in\mathbb{R}^m:\boldsymbol{a}\cdot x>c\}\cap\{x\in\mathbb{R}^m:\boldsymbol{a}\cdot x=c\}'=\varnothing$.

同理可证:$\{x\in\mathbb{R}^m:\boldsymbol{a}\cdot x<c\}\cap\{x\in\mathbb{R}^m:\boldsymbol{a}\cdot x=c\}'=\varnothing$.

于是$\{x\in\mathbb{R}^m:\boldsymbol{a}\cdot x=c\}'=\{x\in\mathbb{R}^m:\boldsymbol{a}\cdot x=c\}'\cap\mathbb{R}^m$

$=\{x\in\mathbb{R}^m:\boldsymbol{a}\cdot x=c\}'\cap(\{x\in\mathbb{R}^m:\boldsymbol{a}\cdot x<c\}\cup\{x\in\mathbb{R}^m:\boldsymbol{a}\cdot x=c\}\cup\{x\in\mathbb{R}^m:\boldsymbol{a}\cdot x>c\})$

$=(\{x\in\mathbb{R}^m:\boldsymbol{a}\cdot x<c\}\cap\{x\in\mathbb{R}^m:\boldsymbol{a}\cdot x=c\}')\cup(\{x\in\mathbb{R}^m:\boldsymbol{a}\cdot x=c\}\cap\{x\in\mathbb{R}^m:\boldsymbol{a}\cdot x=c\}')$

$\cup(\{x\in\mathbb{R}^m:\boldsymbol{a}\cdot x>c\}\cap\{x\in\mathbb{R}^m:\boldsymbol{a}\cdot x=c\}')$

$=\varnothing\cup(\{x\in\mathbb{R}^m:\boldsymbol{a}\cdot x=c\}\cap\{x\in\mathbb{R}^m:\boldsymbol{a}\cdot x=c\}')\cup\varnothing$

$=\{x\in\mathbb{R}^m:\boldsymbol{a}\cdot x=c\}\cap\{x\in\mathbb{R}^m:\boldsymbol{a}\cdot x=c\}'$

于是$\{x\in\mathbb{R}^m:\boldsymbol{a}\cdot x=c\}'\subseteq\{x\in\mathbb{R}^m:\boldsymbol{a}\cdot x=c\}$.故$\{x\in\mathbb{R}^m:\boldsymbol{a}\cdot x=c\}$是闭集.$\square$

Check:$\{x\in\mathbb{R}^m:\boldsymbol{a}\cdot x\leq c\}$,$\{x\in\mathbb{R}^m:\boldsymbol{a}\cdot x\geq c\}$是闭集.

这里我们换一种方法,由于在$\mathbb{R}^m$中,$\{x\in\mathbb{R}^m:\boldsymbol{a}\cdot x\leq c\}=\{x\in\mathbb{R}^m:\boldsymbol{a}\cdot x>c\}^C$,

而$\{x\in\mathbb{R}^m:\boldsymbol{a}\cdot x>c\}$是开集,所以$\{x\in\mathbb{R}^m:\boldsymbol{a}\cdot x\leq c\}$是闭集.

同理$\{x\in\mathbb{R}^m:\boldsymbol{a}\cdot x\geq c\}$是闭集.$\square$

7. 设 S, S_1, S_2 是 $\mathbf{R}^m$ 中的任意非空点集. 证明:

(1) 如果 $S_1\subseteq S_2$, 则 $S_1^\circ\subseteq S_2^\circ$, $S_1'\subseteq S_2'$, $\overline{S}_1\subseteq\overline{S}_2$;

(2) $(S^\circ)^\circ=S^\circ$, $(S')'\subseteq S'$, $\overline{(\overline{S})}=\overline{S}$, 因此任意点集 S 的内域 S° 总是开集, 而 S 的导集 S' 和闭包 $\overline{S}$ 都是闭集;

(3) $(S_1\bigcap S_2)^\circ=S_1^\circ\bigcap S_2^\circ$, $(S_1\bigcup S_2)^\circ\supseteq S_1^\circ\bigcup S_2^\circ$;

7.这里我们不妨考虑一般的度量空间.

(1)$\forall p\in S_1^\circ$, S_1° 是 S_1 的内点,由定义知是开集,

故存在 p 的开邻域 $N_\delta(p)$,使得 $N_\delta(p)\subset S_1^\circ\subseteq S_1\subseteq S_2$.

于是 $p\in S_2^\circ$,因此 $S_1^\circ\subseteq S_2^\circ$.□

$\forall p\in S_1'$,则任意包含 p 的邻域都包含一个 $q\in S_1\subseteq S_2, p\neq q$

于是 $p\in S_2'$,因此 $S_1'\subseteq S_2'$.□

$\overline{S_1}=S_1\cup S_1'\subseteq S_2\cup S_2'=\overline{S_2}$.□

(2)Check: $(S^\circ)^\circ=S^\circ$

首先我们有 $(S^\circ)^\circ\subseteq S^\circ$

只需验证: $(S^\circ)^\circ\supseteq S^\circ$

只需验证: S° 是开集

只需验证: $\forall p\in S^\circ$,存在 p 的一个邻域 $N_\delta(p)=\{x{:}d(p,x)<\delta\}$,使得 $N_\delta(p)\subset S^\circ$

由于 $p\in S^\circ$,所以存在 p 的一个邻域 $N_\epsilon(p)=\{x{:}d(p,x)<\epsilon\}$,使得 $N_\epsilon(p)\subset S$

取 p 的邻域 $N_{\frac{\epsilon}{2}}(p)=\left\{x{:}d(p,x)<\dfrac{\epsilon}{2}\right\}$,我们断言 $N_{\frac{\epsilon}{2}}(p)\subset S^\circ$.

$\forall q\in N_{\frac{\epsilon}{2}}(p)$,断言 $N_{\frac{\epsilon}{2}}(q)\subset S$.事实上, $\forall x\in N_{\frac{\epsilon}{2}}(q)$,有 $d(x,p)\le d(x,q)+d(p,q)<\dfrac{\epsilon}{2}+\dfrac{\epsilon}{2}=\epsilon$

于是 $x\in N_\epsilon(p)\subset S$. 因此 $N_{\frac{\epsilon}{2}}(q)\subset S$

因此对于任意 $q\in N_{\frac{\epsilon}{2}}(p)$,都存在一个邻域 $N_{\frac{\epsilon}{2}}(q)\subset S$,于是 q 是 S 的内点,即 $q\in S^\circ$.

因此 $N_{\frac{\epsilon}{2}}(p)\subset S^\circ$,于是对于任意 $p\in S^\circ$,都存在一个邻域 $N_{\frac{\epsilon}{2}}(p)\subset S^\circ$,于是 p 是 S° 的内点,即 $p\in S^\circ$.□

Check: $(S')'\subseteq S'$

$\forall p\in(S')'$,对于任意给定的 p 的邻域 $N_\delta(p)$,存在 $q\in N_{\frac{\delta}{2}}(p), q\neq p, q\in S'$.

于是存在 $r\in N_{\min\left\{\frac{\delta}{2},d(p,q)\right\}}(q), r\neq q, r\in S$.

$$d(p,r)\le d(p,q)+d(q,r)<\frac{\delta}{2}+\min\left\{\frac{\delta}{2},d(p,q)\right\}\le\delta\Rightarrow r\in N_\delta(p)$$

$$d(p,r)\ge d(p,q)-d(p,r)>d(p,q)-\min\left\{\frac{\delta}{2},d(p,q)\right\}\ge d(p,q)-d(p,q)=0\Rightarrow r\neq p$$

于是 $p\in S'$.因此 $(S')'\subseteq S'$.□

Check: $\overline{\left(\overline{S}\right)}=\overline{S}$

显然 $\overline{S}\subseteq\overline{\left(\overline{S}\right)}$

只需要验证 $\overline{\left(\overline{S}\right)}\subseteq\overline{S}$

$\overline{S}\cup\overline{S}'=\overline{\left(\overline{S}\right)}$

只需要验证 $\overline{S}'\subseteq\overline{S}$

只需要验证 $(S\cup S')'\subseteq S\cup S'$

我们**断言** $(A\cup B)'\subseteq A'\cup B',\forall A,B\in\textbf{\textit{Set}}$, 于是 $(S\cup S')'\subseteq S'\cup(S')'$.

只需要验证 $S'\cup(S')'\subseteq S\cup S'$

由 (2) 可知: $S'\subseteq S'$, $(S')'\subseteq S'\Rightarrow S'\cup(S')'\subseteq S'\subseteq S\cup S'$. $\square$

断言的验证:

对于任意的 $x\in(A\cup B)'$, 对于任意给定的 x 的邻域 $N_\delta(x)$, 存在 $p\in N_\delta(x)$, $p\neq x$, 使得 $p\in A\cup B$.

于是要么 $p\in A$, 要么 $p\in B$.

若 $p\in A$, 则 $x\in A'$, 若 $p\in B$, 则 $x\in B'$.

于是 $x\in A'\cup B'$. 因此, $(A\cup B)'\subseteq A'\cup B',\forall A,B\in\textbf{\textit{Set}}$. $\square$

Check: S° 是开集, S' 和 $\overline{S}$ 都是闭集.

因为 $(S^\circ)^\circ=S^\circ$, 由开集的定义 (称一个集合是开集, 若它包含的所有点都是内点)

于是 S° 是开集. $\square$

因为 $(S')'\subseteq S'$, 由闭集的定义 (称一个集合是闭集, 若它的极限点都包含于它)

于是 S' 是闭集. $\square$

因为 $\overline{\left(\overline{S}\right)}=\overline{S}$, 于是 $\overline{S}=\overline{S}\cup\left(\overline{S}\right)'\Rightarrow\left(\overline{S}\right)'\subseteq\overline{S}$. 由闭集的定义 (称一个集合是闭集, 若它的极限点都包含于它)

于是 $\overline{S}$ 是闭集. $\square$

(3)Check: $(S_1\cap S_2)^\circ=S_1^\circ\cap S_2^\circ$.

①$\forall x\in(S_1\cap S_2)^\circ$,存在一个$x$的邻域$N_\delta(x)\subset S_1\cap S_2$.

于是$N_\delta(x)\subset S_1$,$N_\delta(x)\subset S_2$.于是$x\in S_1^\circ$,$x\in S_2^\circ$.因此$x\in S_1^\circ\cap S_2^\circ$.

因此$(S_1\cap S_2)^\circ\subseteq S_1^\circ\cap S_2^\circ$.

②$\forall x\in S_1^\circ\cap S_2^\circ$,由于$x\in S_1^\circ$,故存在一个$x$的邻域$N_\delta(x)\subseteq S_1$.

由于$x\in S_2^\circ$,故存在一个x的邻域$N_\epsilon(x)\subseteq S_2$.

于是x的邻域$N_{\min\{\delta,\epsilon\}}(x)\subseteq S_1\cap S_2$,故$x\in(S_1\cap S_2)^\circ$.

因此$(S_1\cap S_2)^\circ\supseteq S_1^\circ\cap S_2^\circ$.□

Check: $(S_1\cup S_2)^\circ\supseteq S_1^\circ\cup S_2^\circ$.

$\forall x\in S_1^\circ\cup S_2^\circ$,要么$x\in S_1^\circ$,要么$x\in S_2^\circ$.

若$x\in S_1^\circ$,则存在一个x的邻域$N_\delta(x)\subset S_1\subset S_1\cup S_2$.故$x\in(S_1\cup S_2)^\circ$.

若$x\in S_2^\circ$,则存在一个x的邻域$N_\delta(x)\subset S_2\subset S_1\cup S_2$.故$x\in(S_1\cup S_2)^\circ$.

因此$(S_1\cup S_2)^\circ\supseteq S_1^\circ\cup S_2^\circ$.□

7.出于兴趣,我们考虑更加一般的*Hausdorff*空间中的情况.

$\mathbb{R}^m$就是一个局部紧的*Hausdorff*空间.所有度量空间也就是*Hausdorff*空间.

S,S_1,S_2是*Hausdorff*空间$\mathscr{F}$中的非空点集.

证明:若$S_1\subseteq S_2$,则$S_1^\circ\subseteq S_2^\circ$,$S_1'\subseteq S_2'$,$\overline{S_1}\subseteq\overline{S_2}$.

我们引入公式:$S^{C-C}=S^\circ$,即$\left(\overline{(S^C)}\right)^C=S^\circ$.

我懒得写了.□

12. 对 $S\subseteq\mathbf{R}^m$ 和 $x\in\mathbf{R}^m$, 定义 x 到 S 的距离为 $d(x,S)=\inf\limits_{y\in S}d(x,y)$. 证明:

(1) $\overline{S}=\{x\in\mathbf{R}^m:\ d(x,S)=0\}$;

(2) 如果 S 是闭集, 则对任意 $x\in S^c$, 有 $d(x,S)>0$;

(3) 对任意 $r>0$, 点集 $\{x\in\mathbf{R}^m:\ d(x,S)<r\}$ 和 $\{x\in\mathbf{R}^m:\ d(x,S)>r\}$ 都是开集;

(4) 对任意 $r>0$, 点集 $\{x\in\mathbf{R}^m:\ d(x,S)\leqslant r\}$ 和 $\{x\in\mathbf{R}^m:\ d(x,S)\geqslant r\}$ 都是闭集.

13. 证明下列命题:

(1) 如果 S 是闭集, 则对 $\forall x\in S^c$, $\exists y\in S$, 使 $d(x,S)=d(x,y)$;

(2) 有界点集 $S\subseteq\mathbf{R}^m$ 的直径定义为 $\mathrm{diam}(S)=\sup\limits_{x,y\in S}d(x,y)$, 如果 S 是有界闭集, 则 $\exists x,y\in S$, 使 $\mathrm{diam}(S)=d(x,y)$;

(3) 两个点集 $S_1,S_2\subseteq\mathbf{R}^m$ 的距离定义为$d(S_1,S_2)=\inf\limits_{\substack{x\in S_1\\ y\in S_2}}d(x,y)$, 如果 S_1 和 S_2 都是闭集, 且至少有一个是有界集, 则 $\exists x\in S_1$, $\exists y\in S_2$, 使 $d(S_1,S_2)=d(x,y)$.

12.(1)Check: $\begin{cases} \overline{S} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^m : d(x,S)=0\} \\ \overline{S} \supseteq \{x \in \mathbb{R}^m : d(x,S)=0\} \end{cases}$

①$\forall p \in \overline{S} = S \cup S'$

若$p \in S$, 那么$d(p,S) = \inf\limits_{y \in S} d(p,y) \leq d(p,p) = 0$

若 $p \in S'$, 那么对于任意给定的p的一个邻域$N_\epsilon(p)$,

$N_\epsilon(p)$中存在一个异于p的点q,并且$q \in S$.

于是$d(p,S) = \inf\limits_{y \in S} d(p,y) \leq d(p,q) \leq \epsilon$.

由ϵ任意性可知,$d(p,S)=0$,故$p \in \{x \in \mathbb{R}^m : d(x,S)=0\}$.

因此$\overline{S} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^m : d(x,S)=0\}$

②$\forall p \in \{x \in \mathbb{R}^m : d(x,S)=0\} \supseteq S$,

若$p \in S$,自动就有$p \in S \subseteq \overline{S}$.

若$p \in \{x \in \mathbb{R}^m : d(x,S)=0\} - S$,我们**断言**$p \in S'$.

因为$d(p,S) = \inf\limits_{y \in S} d(p,y) = 0$,则由下确界的定义可知:

对于任意给定的$\epsilon > 0$,存在$z \in S$,使得$d(p,z) < \epsilon$.

又因为$p \neq S$,于是$p \neq z$.

那么对于任意给定的p的一个邻域$N_\epsilon(p)$,$N_\epsilon(p)$中存在一个异于p的点z,并且$z \in S$.

于是$p \in S' \subseteq \overline{S}$.

因此$\overline{S} \supseteq \{x \in \mathbb{R}^m : d(x,S)=0\}$.

综上:$\overline{S} = \{x \in \mathbb{R}^m : d(x,S)=0\}$.□

12.(2)Check:若S是闭集,则对任意$x\in S^c$,有$d(x,S)>0$.

因为S是闭集,所以$S=\overline{S}=\{x\in\mathbb{R}^m:d(x,S)=0\}$.

若$x\in S^c=\left(\overline{S}\right)^c$,$d(x,S)=0$,则$x\in\overline{S}$.矛盾!

故对任意$x\in S^c$,有$d(x,S)>0$.□

12.(3)Check:对任意$r>0$,点集$\{x\in\mathbb{R}^m:d(x,S)<r\}$和$\{x\in\mathbb{R}^m:d(x,S)>r\}$都是开集.

对于任意给定的$r>0$,

①只需要验证对于任意$p\in\{x\in\mathbb{R}^m:d(x,S)<r\}$,都存在一个$p$的邻域$N_\delta(p)$,使得$N_\delta(p)\subset\{x\in\mathbb{R}^m:d(x,S)<r\}$.

给定$p\in\{x\in\mathbb{R}^m:d(x,S)<r\}$,于是$d(p,S)=\inf\limits_{y\in S}d(p,y)<r$.

于是存在$\delta>0$,使得$\inf\limits_{y\in S}d(p,y)<r-\delta$

于是存在$z\in S$,使得$d(p,z)<r-\delta$.

于是存在p的邻域$N_\delta(p)=\{x\in\mathbb{R}^m:d(x,p)<\delta\}$.

$\forall x\in N_\delta(p),d(x,S)=\inf\limits_{y\in S}d(x,y)\leq d(x,z)\leq d(x,p)+d(p,z)<\delta+r-\delta=r$

故$x\in\{x\in\mathbb{R}^m:d(x,S)<r\}$.因此,点集$\{x\in\mathbb{R}^m:d(x,S)<r\}$是开集.

②只需要验证对于任意$p\in\{x\in\mathbb{R}^m:d(x,S)>r\}$,都存在一个$p$的邻域$N_\delta(p)$,使得$N_\delta(p)\subset\{x\in\mathbb{R}^m:d(x,S)>r\}$.

给定$p\in\{x\in\mathbb{R}^m:d(x,S)>r\}$,于是$d(p,S)=\inf\limits_{y\in S}d(p,y)>r$.

于是存在$\delta>0$,使得$\inf\limits_{y\in S}d(p,y)>r+2\delta$

于是存在$z\in S$,使得$d(p,z)>r+2\delta$.

于是存在p的邻域$N_\delta(p)=\{x\in\mathbb{R}^m:d(x,p)<\delta\}$.

$\forall x\in N_\delta(p),d(x,S)=\inf\limits_{y\in S}d(x,y)\geq\inf\limits_{y\in S}(d(p,y)-d(x,p))\geq\inf\limits_{y\in S}d(p,y)-\sup\limits_{y\in S}d(x,p)$

$\geq r+2\delta-\delta=r+\delta>r$.

故$x\in\{x\in\mathbb{R}^m:d(x,S)>r\}$.因此,点集$\{x\in\mathbb{R}^m:d(x,S)>r\}$是开集.□

12.(4)Check:对任意$r>0$,点集$\{x\in\mathbb{R}^m:d(x,S)\leq r\}$和$\{x\in\mathbb{R}^m:d(x,S)\geq r\}$都是闭集.

因为$\{x\in\mathbb{R}^m:d(x,S)\leq r\}$是$\{x\in\mathbb{R}^m:d(x,S)<r\}$在$\mathbb{R}^m$中的补集,所以$\{x\in\mathbb{R}^m:d(x,S)\leq r\}$是闭集.

同理:$\{x\in\mathbb{R}^m:d(x,S)\geq r\}$是闭集.□

13.(1)Check:若S是闭集,则对任意$x\in S^c$,$\exists y\in S$,使$d(x,S)=d(x,y)$.

对于任意给定的$x\in S^c$,

如果S是$\mathbb{R}^m$中的闭集,那么考虑一列集合$E_n=\left\{z\in S:d(x,z)\le d(x,S)+\dfrac{1}{n}\right\}$.

显然我们有$E_1\supseteq E_2\supseteq\cdots\supseteq E_n\supseteq E_{n+1}\supseteq\cdots$.

断言E_n是$\mathbb{R}^m$中的紧集.

由$Heine-Borel$定理,只需验证E_n是有界闭集,有界性是显然的.

断言E_n是$\mathbb{R}^m$中的闭集.

只需验证:$E_n'\subseteq E_n$

对于任意给定的$p\in E_n'$,$\forall\epsilon>0$,存在$q\in E_n$,$q\neq p$,使得$d(p,q)<\epsilon$.

于是$d(x,p)\le d(p,q)+d(x,q)\le\epsilon+d(x,S)+\dfrac{1}{n}$.

由ϵ任意性可知,$d(x,p)\le d(x,S)+\dfrac{1}{n}$.

于是$p\in E_n$.于是E_n是$\mathbb{R}^m$中的闭集.

由$d(x,S)$的定义可知,每个E_n都非空.

于是$\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}E_n\neq\varnothing$.又因为$E_n\subseteq S$.

于是$\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}E_n\subseteq S$.

于是存在$y\in S$,使得$d(x,S)=d(x,y)$.$\square$

13.(2)考虑$E_n=\left\{(x,y)\in S\times S:d(x,y)\ge\operatorname{diam}(S)-\dfrac{1}{n}\right\}$.

显然E_n是$\mathbb{R}^m$中的紧集,只需要重复(1)中的讨论即可得到.

于是$\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}E_n\neq\varnothing$.于是存在$(x,y)\in S\times S$,使得$d(x,y)=\operatorname{diam}(S)$.$\square$

13.(3)考虑$E_n=\left\{(x,y)\in S_1\times S_2:d(x,y)\le d(S_1,S_2)+\dfrac{1}{n}\right\}$.

显然E_n是$\mathbb{R}^m$中的紧集,只需要重复(1)中的讨论即可得到.

于是$\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}E_n\neq\varnothing$.于是存在$(x,y)\in S_1\times S_2$,使得$d(x,y)=d(S_1,S_2)$.$\square$

1. 证明以下极限:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}}{|x|+|y|}=0\quad(\alpha>1)$; (2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\arctan(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$;

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\dfrac{1}{|x|+|y|}=0$; (4) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\x\neq0,y\neq0}}\dfrac{x^2y^2}{\sqrt{1+x^2y^2}-1}=2$;

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}x\ln(x^2+y^2)=0$; (6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\ln\cos x}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$;

1.(1) $\left|\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}}{|x|+|y|}\right|\le\left|\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{((|x|+|y|)^2)^{\frac{\alpha}{2}}}{|x|+|y|}\right|=\left|\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(|x|+|y|)^{\alpha-1}\right|=0$

$\Rightarrow\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}}{|x|+|y|}=0.$

1.(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\arctan(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 极限不存在

$\lim\limits_{(x,kx)\to(0,0)}\dfrac{\arctan(kx^2)}{\sqrt{x^2+k^2x^2}}=\dfrac{k}{\sqrt{1+k^2}}$,故不存在.

1.(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\dfrac{1}{|x|+|y|}$ 极限不存在.

1.(4) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\x\neq0,y\neq0}}\dfrac{x^2y^2}{\sqrt{1+x^2y^2}-1}=\lim\limits_{u\to0^+}\dfrac{u}{\sqrt{1+u}-1}=2$

1.(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}|x\ln(x^2+y^2)|=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}|x|\,|\ln(x^2+y^2)|\le\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}|x|\,|\ln(x^2)|$

$=2\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}|x|\,|\ln|x||=0$

$\Rightarrow\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}x\ln(x^2+y^2)=0.$

1.(6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left|\dfrac{\ln\cos x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\le\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left|\dfrac{\ln\cos x}{\sqrt{x^2}}\right|=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left|\dfrac{\ln\cos x}{|x|}\right|$

$=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left|\dfrac{\ln\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)}{|x|}\right|=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left|\dfrac{\frac{x^2}{2}+o(x^3)}{|x|}\right|=0.$

2. 对函数 $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ 和下面给定的集合 S, 求极限 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S}}f(x,y)$:

(1) S 为直线 $y=ax$;
(2) S 为抛物线 $y=ax^2$;
(3) S 为三次曲线 $y=ax^3$;
(4) S 为锥域 $|x|\leqslant a|y|$.
其中 a 为常数, 在 (4) 中 $a>0$.

2.(1) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S}}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{ax^3}{x^4+a^2x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a}{x+a^2\frac{1}{x}}=0$

2.(2) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S}}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{ax^4}{x^4+a^2x^4}=\dfrac{a}{1+a^2}$

2.(3) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S}}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{ax^5}{x^4+a^2x^6}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a}{\frac{1}{x}+a^2x}=0$

2.(4) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S}}\left|\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}\right|\le\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S}}\left|\dfrac{a^2|y|^2y}{a^2|y|^2+y^2}\right|=0$

4. 设 α, β 是正常数. 证明: 当 $\alpha+2\beta>2$ 时,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^{\alpha}|y|^{\beta}}{\sqrt{x^4+y^2}}=0;$$

而当 $\alpha+2\beta\leqslant 2$ 时, 上述极限不存在.

$4.\alpha+2\beta>2$ 时, $0\leq \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{|x|^{\alpha}\cdot|y|^{\beta}}{\sqrt{x^4+y^2}}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{|x|^{\alpha}\cdot|y|^{2\beta}}{\sqrt{x^4+y^4}}\overset{\substack{\beta'=2\beta\\ \alpha+\beta'>2}}{=}\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{|x|^{\alpha}\cdot|y|^{\beta'}}{\sqrt{x^4+y^4}}$

$=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{|x|^{\alpha}\cdot|y|^{2-\alpha}\cdot|y|^{\beta'+\alpha-2}}{\sqrt{x^4+y^4}}$

引理: $\sqrt{m^4+n^4}\geq c(k)\,|m|^{k}|n|^{2-k}$

于是 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{|x|^{\alpha}\cdot|y|^{2-\alpha}\cdot|y|^{\beta'+\alpha-2}}{\sqrt{x^4+y^4}}\leq \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{|x|^{\alpha}\cdot|y|^{2-\alpha}\cdot|y|^{\beta'+\alpha-2}}{c(\alpha)\,|x|^{\alpha}\cdot|y|^{2-\alpha}}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{|y|^{\beta'+\alpha-2}}{c(\alpha)}=0$

①$\alpha+\beta'=2$ 时, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{|x|^{\alpha}\cdot|y|^{\beta}}{\sqrt{x^4+y^2}}$ 不存在.

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{|x|^{\alpha}\cdot|y|^{\beta}}{\sqrt{x^4+y^2}}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{|x|^{\alpha}\cdot|y|^{\beta'}}{\sqrt{x^4+y^4}}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{|x|^{\alpha}\cdot|y|^{2-\alpha}}{\sqrt{x^4+y^4}}$

取 $y=kx$, 则 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} \dfrac{|x|^{\alpha}\cdot|y|^{2-\alpha}}{\sqrt{x^4+y^4}}=\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} \dfrac{k^{2-\alpha}}{\sqrt{1+k^4}}$ 不是定值

故不存在.

②若 $\alpha+\beta'<2$, 对于 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{|x|^{\alpha}\cdot|y|^{\beta'}}{\sqrt{x^4+y^4}}$ 取 $y=x$, 则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{|x|^{\alpha}\cdot|y|^{\beta'}}{\sqrt{x^4+y^4}}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{|x|^{\alpha+\beta'}}{\sqrt{2}\,x^2}\to\infty$

故不存在.□