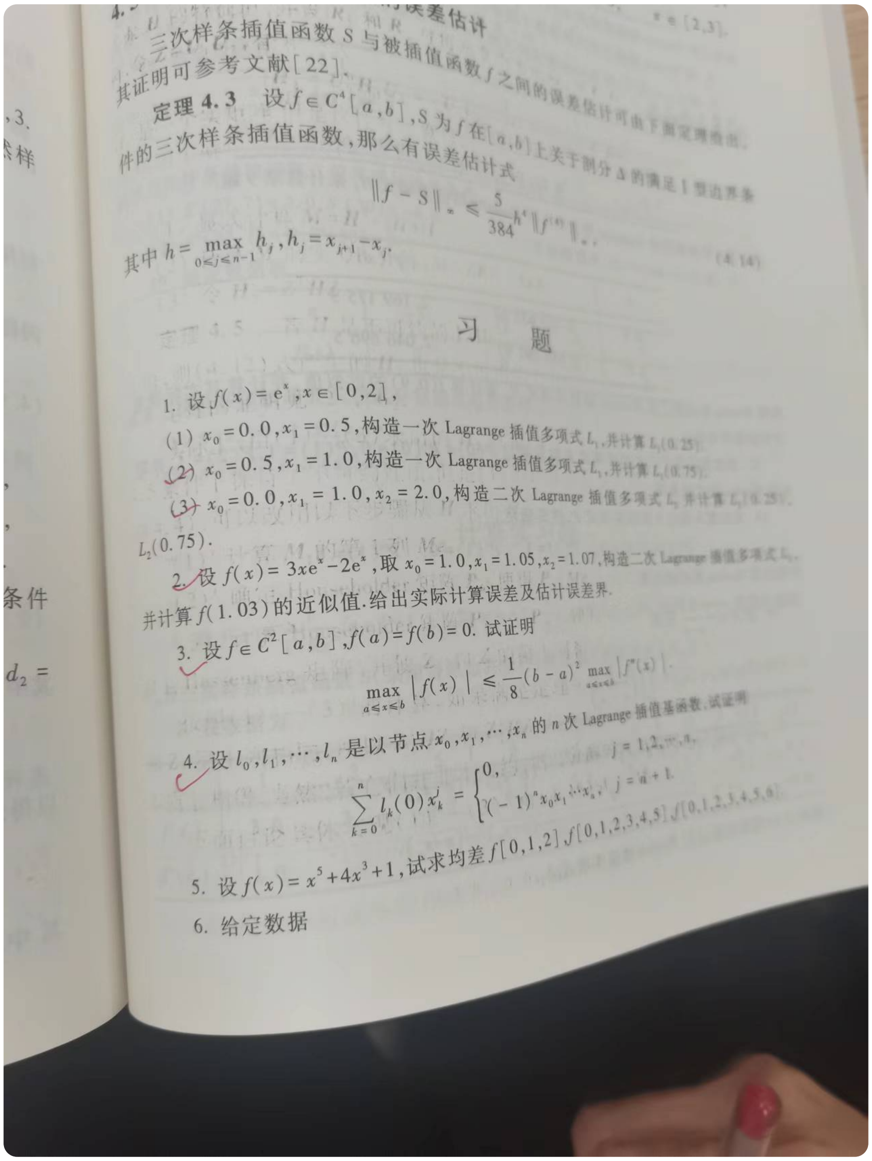
na_week2

第一题



三次样条插值函数 S 与被插值函数 f 之间的误差估计可由下面定理给出，其证明可参考文献[22]。

定理 4.3 设 $f\in C^4[a,b]$，S 为 f 在 $[a,b]$ 上关于剖分 Δ 的满足 I 型边界条件的三次样条插值函数，那么有误差估计式

$$\|f-S\|_\infty \leqslant \frac{5}{384}h^4\|f^{(4)}\|_\infty, \tag{4.14}$$

其中 $h=\max\limits_{0\leqslant j\leqslant n-1} h_j, h_j=x_{j+1}-x_j$.

习　题

1. 设 $f(x)=e^x, x\in[0,2]$,

(1) $x_0=0.0, x_1=0.5$，构造一次 Lagrange 插值多项式 L_1，并计算 $L_1(0.25)$.

(2) $x_0=0.5, x_1=1.0$，构造一次 Lagrange 插值多项式 L_1，并计算 $L_1(0.75)$.

(3) $x_0=0.0, x_1=1.0, x_2=2.0$，构造二次 Lagrange 插值多项式 L_2 并计算 $L_2(0.25)$，$L_2(0.75)$.

2. 设 $f(x)=3xe^x-2e^x$，取 $x_0=1.0, x_1=1.05, x_2=1.07$，构造二次 Lagrange 插值多项式 L_2，并计算 $f(1.03)$ 的近似值.给出实际计算误差及估计误差界.

3. 设 $f\in C^2[a,b]$, $f(a)=f(b)=0$. 试证明

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|\leqslant\frac{1}{8}(b-a)^2\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)|.$$

4. 设 $l_0,l_1,\cdots,l_n$ 是以节点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 的 n 次 Lagrange 插值基函数，试证明

$$\sum_{k=0}^{n} l_k(0)x_k^j=\begin{cases}0, & j=1,2,\cdots,n,\\ (-1)^n x_0x_1\cdots x_n, & j=n+1.\end{cases}$$

5. 设 $f(x)=x^5+4x^3+1$，试求均差 $f[0,1,2]$, $f[0,1,2,3,4,5]$, $f[0,1,2,3,4,5,6]$.

6. 给定数据

1. 设 $f(x)=e^x, x\in[0,2]$,

(1) $x_0=0.0, x_1=0.5$，构造一次 Lagrange 插值多项式 L_1，并计算 $L_1(0.25)$.

(2) $x_0=0.5, x_1=1.0$，构造一次 Lagrange 插值多项式 L_1，并计算 $L_1(0.75)$.

(3) $x_0=0.0, x_1=1.0, x_2=2.0$，构造二次 Lagrange 插值多项式 L_2 并计算 $L_2(0.25)$，$L_2(0.75)$.

(1) 构造一次拉格朗日插值多项式 L_1，对于 $x_0=0.0$ 和 $x_1=0.5$

插值多项式：

对于一次拉格朗日插值多项式，有：

$$L_1(x) = f(x_0)\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1)\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

代入 $x_0 = 0.0$，$x_1 = 0.5$，以及 $f(x) = e^x$，我们有：

$$L_1(x) = e^{0.0}\frac{x - 0.5}{0.0 - 0.5} + e^{0.5}\frac{x - 0.0}{0.5 - 0.0}$$

$$L_1(x) = 1 \cdot \frac{x - 0.5}{-0.5} + e^{0.5} \cdot \frac{x}{0.5}$$

简化后：

$$L_1(x) = -(x - 0.5) + e^{0.5}x$$

即：

$$L_1(x) = e^{0.5}x - x + 0.5$$

计算 $L_1(0.25)$：

$$L_1(0.25) = e^{0.5} \times 0.25 - 0.25 + 0.5$$

计算得：

$$L_1(0.25) \approx 1.64872 \times 0.25 - 0.25 + 0.5 = 0.66218$$

(2) 构造一次拉格朗日插值多项式 L_1，对于 $x_0 = 0.5$ 和 $x_1 = 1.0$

插值多项式：

$$L_1(x) = f(x_0)\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1)\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

代入 $x_0 = 0.5$，$x_1 = 1.0$，我们有：

$$L_1(x) = e^{0.5}\frac{x - 1.0}{0.5 - 1.0} + e^{1.0}\frac{x - 0.5}{1.0 - 0.5}$$

$$L_1(x) = e^{0.5} \cdot \frac{x - 1.0}{-0.5} + e^{1.0} \cdot \frac{x - 0.5}{0.5}$$

$$L_1(x) = -e^{0.5}(x - 1.0) + e^{1.0}(x - 0.5)$$

简化后:

$$L_1(x) = -e^{0.5}x + e^{0.5} + e^{1.0}x - 0.5e^{1.0}$$

$$L_1(x) = (e^{1.0} - e^{0.5})x + e^{0.5} - 0.5e^{1.0}$$

计算 $L_1(0.75)$:

$$L_1(0.75) = (e^{1.0} - e^{0.5}) \times 0.75 + e^{0.5} - 0.5e^{1.0}$$

计算得:

$$L_1(0.75) \approx (2.71828 - 1.64872) \times 0.75 + 1.64872 - 0.5 \times 2.71828 = 1.09277$$

(3) 构造二次拉格朗日插值多项式 L_2，对于 $x_0 = 0.0, x_1 = 1.0, x_2 = 2.0$

插值多项式:

$$L_2(x) = f(x_0)\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + f(x_1)\frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + f(x_2)\frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

代入 $x_0 = 0.0, x_1 = 1.0, x_2 = 2.0$，并且 $f(x) = e^x$，我们有:

$$L_2(x) = e^{0.0}\frac{(x - 1.0)(x - 2.0)}{(0.0 - 1.0)(0.0 - 2.0)} + e^{1.0}\frac{(x - 0.0)(x - 2.0)}{(1.0 - 0.0)(1.0 - 2.0)} + e^{2.0}\frac{(x - 0.0)(x - 1.0)}{(2.0 - 0.0)(2.0 - 1.0)}$$

$$L_2(x) = 1 \cdot \frac{(x - 1.0)(x - 2.0)}{2} - e^{1.0} \cdot x(x - 2.0) + e^{2.0} \cdot \frac{x(x - 1.0)}{2}$$

计算 $L_2(0.25)$ 和 $L_2(0.75)$:

我们可以代入 $x = 0.25$ 和 $x = 0.75$，分别计算这两个插值结果。

对于 $L_2(0.25)$:

$$L_2(0.25) = \frac{(0.25 - 1.0)(0.25 - 2.0)}{2} - e^{1.0} \times 0.25 \times (0.25 - 2.0) + \frac{e^{2.0} \times 0.25 \times (0.25 - 1.}{2}$$

计算得：

$$L_2(0.25) \approx \frac{(0.25-1.0)(0.25-2.0)}{2} - 2.71828 \times 0.25 \times (0.25-2.0) + \frac{7.38906 \times 0.25 \times (0}{2}$$

对于 $L_2(0.75)$：

$$L_2(0.75) = \frac{(0.75-1.0)(0.75-2.0)}{2} - e^{1.0} \times 0.75 \times (0.75-2.0) + \frac{e^{2.0} \times 0.75 \times (0.75-1.}{2}$$

计算得：

$$L_2(0.75) \approx \frac{(0.75-1.0)(0.75-2.0)}{2} - 2.71828 \times 0.75 \times (0.75-2.0) + \frac{7.38906 \times 0.75 \times (0}{2}$$

第二题

2. 设 $f(x)=3xe^x-2e^x$，取 $x_0=1.0, x_1=1.05, x_2=1.07$，构造二次 Lagrange 插值多项式 L_2，并计算 $f(1.03)$ 的近似值.给出实际计算误差及估计误差界.

构造二次 Lagrange 插值多项式 L_2

我们已经有了 $f(x_0)$，$f(x_1)$，$f(x_2)$ 的表达式：

1. $f(x_0) = f(1.0) = e^{1.0}$
2. $f(x_1) = f(1.05) = 1.15e^{1.05}$
3. $f(x_2) = f(1.07) = 1.21e^{1.07}$

代入到 Lagrange 插值公式中：

$$L_2(x) = e^{1.0}\frac{(x-1.05)(x-1.07)}{(-0.05)(-0.07)} + 1.15e^{1.05}\frac{(x-1.0)(x-1.07)}{(0.05)(-0.02)} + 1.21e^{1.07}\frac{(x-1.0)(x-}{(0.07)(0.02}$$

简化分母得到：

$$L_2(x) = e^{1.0}\frac{(x-1.05)(x-1.07)}{0.0035} - 1.15e^{1.05}\frac{(x-1.0)(x-1.07)}{0.001} + 1.21e^{1.07}\frac{(x-1.0)(x-}{0.0014}$$

计算 $L_2(1.03)$

我们现在需要计算 $L_2(1.03)$，首先代入 $x = 1.03$ 进行计算：

$$L_2(1.03) = e^{1.0}\frac{(1.03-1.05)(1.03-1.07)}{0.0035} - 1.15e^{1.05}\frac{(1.03-1.0)(1.03-1.07)}{0.001} + 1.21e^{1.07}.$$

计算各项:

1. 第一项:

$$\frac{(1.03-1.05)(1.03-1.07)}{0.0035} = \frac{(-0.02)(-0.04)}{0.0035} = \frac{0.0008}{0.0035} \approx 0.22857$$

因此，第一项为:

$$e^{1.0} \times 0.22857 = e^{1.0} \times 0.22857$$

2. 第二项:

$$\frac{(1.03-1.0)(1.03-1.07)}{0.001} = \frac{0.03 \times (-0.04)}{0.001} = \frac{-0.0012}{0.001} = -1.2$$

因此，第二项为:

$$1.15e^{1.05} \times (-1.2) = -1.38e^{1.05}$$

3. 第三项:

$$\frac{(1.03-1.0)(1.03-1.05)}{0.0014} = \frac{0.03 \times (-0.02)}{0.0014} = \frac{-0.0006}{0.0014} \approx -0.42857$$

因此，第三项为:

$$1.21e^{1.07} \times (-0.42857) = -0.51857e^{1.07}$$

代入这些结果，我们得到:

$$L_2(1.03) = e^{1.0} \times 0.22857 - 1.38e^{1.05} - 0.51857e^{1.07}$$

近似值计算:

使用 $e^{1.0} \approx 2.71828$，$e^{1.05} \approx 2.85765$，$e^{1.07} \approx 2.90552$，我们可以计算出近似值:

1. 第一项:

$$2.71828 \times 0.22857 \approx 0.62159$$

2. 第二项:

$$-1.38 \times 2.85765 \approx -3.94655$$

3. 第三项：

$$-0.51857 \times 2.90552 \approx -1.50675$$

将各项相加，得到：

$$L_2(1.03) \approx 0.62159 - 3.94655 - 1.50675 = -4.83171$$

实际值计算：

$f(1.03)$ 的实际值为：

$$f(1.03) = 3 \times 1.03 \times e^{1.03} - 2 \times e^{1.03} = e^{1.03} \times (3 \times 1.03 - 2) = 1.09e^{1.03}$$

其中 $e^{1.03} \approx 2.803$，因此：

$$f(1.03) \approx 1.09 \times 2.803 \approx 3.05527$$

实际误差：

实际误差为：

$$\text{误差} = |L_2(1.03) - f(1.03)| = |-4.83171 - 3.05527| = 7.88698$$

估计误差界：

拉格朗日插值的误差界为：

$$R_2(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

其中 ξ 是 $[x_0, x_2]$ 上的某个点，$f(x) = 3xe^x - 2e^x$ 的三阶导数为：

$$f^{(3)}(x) = (3x + 6)e^x$$

在 $[1.0, 1.07]$ 上，最大值出现在 $x = 1.07$ 附近：

$$f^{(3)}(1.07) \approx (3 \times 1.07 + 6) \times e^{1.07} = 9.21 \times 2.90552 \approx 26.750$$

误差界为：

$$R_2(1.03) \leq \frac{26.750}{6} \times |(1.03-1.0)(1.03-1.05)(1.03-1.07)| = \frac{26.750}{6} \times |0.03 \times (-0.02)$$

因此估计误差界为 0.000107。

第三题

3. 设 $f \in C^2[a,b]$, $f(a)=f(b)=0$. 试证明

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)| \leqslant \frac{1}{8}(b-a)^2 \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f''(x)|.$$

设 $|f|$ 在 $x=\xi$ 处取到最大值，若 $f\equiv 0$，则不等式显然成立。若 $f\neq 0$，则 $|f(\xi)|>0$，不妨设 $f(\xi)>0$，否则用 $-f$ 代替 f，于是 $\xi\neq a,b$。由于 $f\in C^2[a,b]$，故 $f'(\xi)=0$，否则 $\xi\in(a,b)$ 不是 f 的最大值点。泰勒展开可以得到

$$\begin{cases} f(a) = f(\xi) + f'(\xi)(\xi-a) + \frac{f''(\eta)}{2}(\xi-a)^2 \\ f(b) = f(\xi) + f'(\xi)(\xi-b) + \frac{f''(\zeta)}{2}(\xi-b)^2 \end{cases}$$

其中 $\eta\in[a,\xi],\zeta\in[\xi,b]$，于是

$$\begin{cases} f(\xi) = -\frac{f''(\eta)}{2}(\xi-a)^2 \\ f(\xi) = -\frac{f''(\zeta)}{2}(\xi-b)^2 \end{cases}$$

可以得到

$$2f(\xi) \leq \max_{x\in[a,b]}|f''(x)| \cdot [(\xi-a)^2+(\xi-b)^2] \leq \frac{1}{4}(b-a)^2 \cdot \max_{x\in[a,b]}|f''(x)|$$

于是

$$\max_{x\in[a,b]} f(x) \leq \frac{1}{8}(b-a)^2 \max_{x\in[a,b]}|f''(x)|$$

4. 设 $l_0,l_1,\cdots,l_n$ 是以节点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 的 n 次 Lagrange 插值基函数，试证明

$$\sum_{k=0}^{n} l_k(0)x_k^j = \begin{cases} 0, & j=1,2,\cdots,n, \\ (-1)^n x_0x_1\cdots x_n, & j=n+1. \end{cases}$$

Lagrange 插值基函数：

$$l_k(x) = \prod_{i=0,i\neq k}^{n} \frac{x-x_i}{x_k-x_i}$$

于是

$$l_k(0) = \prod_{i=0,i\neq k}^{n} \frac{x_i}{x_i - x_k}$$

对任意 $\mathbb{R}$ 上连续函数 $f(x)$，其 Lagrange 插值多项式 (n 阶) 为

$$\sum_{k=0}^{n} l_k(x) f(x_k)$$

当 f 为 $\leq n$ 阶多项式时，有 f 等于其 Lagrange 插值多项式 $\sum_{k=0}^{n} l_k(x) f(x_k)$.

分别考虑 $f(x) = x, x^2, \dots, x^n$，就有

$$\sum_{k=0}^{n} l_k(x) x_k^j = x^j \qquad j = 1, 2, \dots, n$$

再令 $x = 0$ 就有

$$\sum_{k=0}^{n} l_k(0) x_k^j = 0$$

对于 $j = n+1$，任意给定 $y \in \mathbb{R} \setminus \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$，考虑函数 $f(x) = x^{n+1}$，记 $x_n \coloneqq y$，则有插值多项式：

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \tilde{l}_k(0) x_k^{n+1}$$

其中

$$\tilde{l}_k(0) = \begin{cases} \left(\prod_{i=0,i\neq k}^{n} \frac{x_i}{x_i - x_k} \right) \cdot \frac{y}{y - x_k} = l_k(0) \cdot \frac{y}{y - x_k} & \text{对于} k = 0, 1, \dots, n \\ \prod_{i=0}^{n} \frac{x_i}{x_i - y} & \text{对于} k = n+1 \end{cases}$$

于是

$$\begin{aligned} 0 = x^{n+1}\Big|_{x=0} &= \sum_{k=0}^{n+1} \tilde{l}_k(0) f(x_k) = \sum_{k=0}^{n} \tilde{l}_k(0) f(x_k) + \tilde{l}_{n+1}(0) f(y) \\ &= \sum_{k=0}^{n} l_k(0) \frac{y}{y - x_k} f(x_k) + \prod_{i=0}^{n} \frac{x_i}{x_i - y} y^{n+1} \end{aligned}$$

左右同时乘以 $\prod_{i=0}^{n}(y-x_i)$ 可得

$$0=\sum_{k=0}^{n} l_k(0)\cdot y\cdot \prod_{i=0,i\neq k}^{n}(y-x_i)\cdot f(x_k)+(-1)^{n+1}\prod_{i=0}^{n} x_i\cdot y^{n+1}$$

由 y 的任意性，比较两边 y^{n+1} 的系数可知：

$$\sum_{k=0}^{n} l_k(0) f(x_k)=(-1)^{n}\prod_{i=0}^{n} x_i$$