

na_week1

🔥 内容

32页2,3,5,6,7

2. 已知4个四位有效数字的三角函数的值 $\sin 1^\circ = 0.0175$, $\sin 2^\circ = 0.0349$, $\cos 1^\circ = 0.9998$, $\cos 2^\circ = 0.9994$. 用以下四种方法计算 $1 - \cos 2^\circ$ 的值, 比较结果的误差, 并说明各有多少位有效数字.

(1) 直接用已知数据计算;

(2) 用公式 $1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$ 及已知数据;

(3) 用公式 $1 - \cos x = \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x}$ 及已知数据;

(4) 用 $1 - \cos x$ 的 Taylor(泰勒)展开式, 要求计算结果有四位有效数字 ($1 - \cos 2^\circ = 6.0917298 \cdots \times 10^{-4}$).

$$2(1) 1 - \cos 2^\circ = 1 - 0.9994 = 0.0006.$$

$$(2) 1 - \cos 2^\circ = 2\sin^2 1^\circ = 0.0006125$$

$$(3) 1 - \cos 2^\circ = \frac{\sin^2 2^\circ}{1 + \cos 2^\circ} = 0.000609188$$

$$(4) \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

将 $x = 2^\circ$ 带入解得 $1 - \cos 2^\circ \approx 0.000609172978391792$, 误差在 10^{-12} 数量级。

```
(*定义 x 为 1 度*)x = 2 Degree;
(*计算 cos x 的泰勒展开近似值, 增加到 x^10 项*)
cosApproxImproved = 1 - x^2/2! + x^4/4!;
(*计算 1-cos x 的近似值*)
oneMinusCosxApproxImproved = 1 - cosApproxImproved;
(*输出数值结果*)
N[oneMinusCosxApproxImproved, 100]
(*计算精确值*)
oneMinusCosxExact = 1 - Cos[x];
(*输出精确值*)
N[oneMinusCosxExact, 100]
(*计算误差*)
errorImproved = Abs[oneMinusCosxExact - oneMinusCosxApproxImproved];
(*输出误差*)
N[errorImproved, 100]
```

3. 下面是两种利用 9 次 Taylor 多项式近似计算 e^{-5} 的方法, 试分析哪种方法能提供较好的近似值.

$$(1) e^{-5} \approx \sum_{i=0}^9 (-1)^i \frac{5^i}{i!}; \quad (2) e^{-5} \approx \left(\sum_{i=0}^9 \frac{5^i}{i!} \right)^{-1}.$$

3 第二种更好

第一种每一项还都很大, 截断误差较大.

第二种考虑泰勒展开积分余项:

$$e^{\xi} = \sum_{i=0}^9 \frac{5^i}{i!} + \frac{e^{\xi}}{10!} (\xi - 0), \quad \text{其中 } \xi \in [0, 5]$$

于是

$$\left| e^{-5} - \left(\sum_{i=0}^9 \frac{5^i}{i!} \right)^{-1} \right| = \left| \frac{-e^{\xi} \cdot \xi / 10!}{e^5 \cdot \sum_{i=0}^9 \frac{5^i}{i!}} \right| \leq \underbrace{\left| \frac{5}{(10!) \cdot \sum_{i=0}^9 \frac{5^i}{i!}} \right|}_{\text{非常小}}$$

以下是 Chatgpt o1 mini 的回答:

在近似计算 e^{-5} 时, 使用泰勒多项式有多种方法。本文将分析以下两种方法, 并讨论哪种方法能够提供更准确的近似值。

方法概述

1. 方法 (1):

$$e^{-5} \approx \sum_{i=0}^9 (-1)^i \frac{5^i}{i!}$$

这是直接使用 e^{-x} 的泰勒展开式在 $x = 5$ 处的前 10 项 ($i = 0$ 到 $i = 9$) 进行近似。

2. 方法 (2):

$$e^{-5} \approx \left(\sum_{i=0}^9 \frac{5^i}{i!} \right)^{-1}$$

这是先使用 e^5 的泰勒展开式在 $x = 5$ 处的前 10 项进行近似, 然后取其倒数来近似 e^{-5} 。

精确值计算

首先, 计算 e^{-5} 的精确值:

$$e^{-5} \approx 0.006737947$$

方法 (1) 的近似值计算

计算方法 (1) 的部分和:

$$\sum_{i=0}^9 (-1)^i \frac{5^i}{i!} = 1 - 5 + \frac{25}{2} - \frac{125}{6} + \frac{625}{24} - \frac{3125}{120} + \frac{15625}{720} - \frac{78125}{5040} + \frac{390625}{40320} - \frac{1953125}{362880}$$

逐项计算并累加:

$$\begin{aligned} 1 - 5 &= -4 \\ -4 + 12.5 &= 8.5 \\ 8.5 - 20.8333333 &= -12.3333333 \\ -12.3333333 + 26.0416667 &= 13.7083334 \\ 13.7083334 - 26.0416667 &= -12.3333333 \\ -12.3333333 + 21.7013889 &= 9.3680556 \\ 9.3680556 - 15.5009921 &= -6.1329365 \\ -6.1329365 + 9.6881201 &= 3.5551836 \\ 3.5551836 - 5.3823445 &= -1.8271609 \end{aligned}$$

因此:

$$\sum_{i=0}^9 (-1)^i \frac{5^i}{i!} \approx -1.8271609$$

方法 (2) 的近似值计算

首先计算 e^5 的部分和:

$$\sum_{i=0}^9 \frac{5^i}{i!} = 1 + 5 + \frac{25}{2} + \frac{125}{6} + \frac{625}{24} + \frac{3125}{120} + \frac{15625}{720} + \frac{78125}{5040} + \frac{390625}{40320} + \frac{1953125}{362880}$$

逐项计算并累加:

$$\begin{aligned} 1 + 5 &= 6 \\ 6 + 12.5 &= 18.5 \\ 18.5 + 20.8333333 &= 39.3333333 \\ 39.3333333 + 26.0416667 &= 65.375 \\ 65.375 + 26.0416667 &= 91.4166667 \\ 91.4166667 + 21.7013889 &= 113.1180556 \\ 113.1180556 + 15.5009921 &= 128.6190477 \\ 128.6190477 + 9.6881201 &= 138.3071678 \\ 138.3071678 + 5.3823445 &= 143.6895123 \end{aligned}$$

因此:

$$\sum_{i=0}^9 \frac{5^i}{i!} \approx 143.6895123$$

然后取其倒数:

$$\left(\sum_{i=0}^9 \frac{5^i}{i!} \right)^{-1} \approx \frac{1}{143.6895123} \approx 0.006947$$

误差分析

1. 方法 (1):

$$\text{近似值} \approx -1.8271609$$

误差:

$$|e^{-5} - (-1.8271609)| \approx |0.006737947 - (-1.8271609)| \approx 1.8338988$$

该方法不仅误差较大, 而且结果符号错误。

2. 方法 (2):

$$\text{近似值} \approx 0.006947$$

误差:

$$|e^{-5} - 0.006947| \approx |0.006737947 - 0.006947| \approx 0.000209$$

该方法误差较小, 且符号正确。

原因分析

1. 收敛性:

- **方法 (1)** 直接使用 e^{-5} 的泰勒展开。在 $x = 5$ 时, 项的绝对值较大, 导致部分和在前几项之间振荡, 收敛速度较慢。因此, 仅使用 9 项时, 近似值偏离较大, 甚至符号错误。
- **方法 (2)** 先使用 e^5 的泰勒展开。虽然 e^5 的部分和也存在较大的项, 但由于最终取倒数, 误差被放大或缩小的影响较小。实际计算中, 部分和达到 143.6895123 时, 倒数已经相对接近真实值。

2. 数值稳定性:

- **方法 (1)** 在高次项的影响下, 累加可能导致数值不稳定, 尤其是当 x 较大时。
- **方法 (2)** 通过先计算 e^5 的部分和, 再取倒数, 避免了直接累加高次项导致的符号和数值不稳定问题。

结论

方法 (2):

$$e^{-5} \approx \left(\sum_{i=0}^9 \frac{5^i}{i!} \right)^{-1}$$

提供了更好的近似值, 误差较小, 且符号正确。

方法 (1):

$$e^{-5} \approx \sum_{i=0}^9 (-1)^i \frac{5^i}{i!}$$

由于直接累加高次项, 导致近似值误差较大, 甚至符号错误, 因此不推荐在 $x = 5$ 这种较大值的情况下使用。

推荐实践

当使用泰勒多项式近似计算 e^{-x} 时, 尤其是 x 较大时, **方法 (2)** 更为可靠。或者, 可以选择其他收敛更快的方法, 如利用递推公式、分段近似等, 以提高计算精度和稳定性。

5. 下列公式要怎样变换才能使数值计算时能避免有效数字的损失?

$$(1) \int_N^{N+1} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(N+1) - \arctan N, \quad N \gg 1;$$

$$(2) \sqrt{x + \frac{1}{x}} - \sqrt{x - \frac{1}{x}}, \quad |x| \gg 1;$$

$$(3) \ln(x+1) - \ln x, \quad x \gg 1;$$

$$(4) \cos^2 x - \sin^2 x, \quad x \approx \frac{\pi}{4}.$$

5 (1)

$$\int_N^{N+1} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(N+1) - \arctan N = \arctan\left(\frac{1}{N^2+N+1}\right)$$

(2)

$$\sqrt{x+1/x} - \sqrt{x-1/x} = \frac{(x+1/x) - (x-1/x)}{\sqrt{x+1/x} + \sqrt{x-1/x}} = \frac{2}{\sqrt{x^3+x} + \sqrt{x^3-x}}$$

(3)

$$\ln(x+1) - \ln x = \ln(1+1/x) \approx \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + \dots$$

(4)

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)^3 + \dots$$

6. 已知 $f(x) = \arcsin x$, 求计算函数值 $f(x)$ 的条件数. 当 $x \approx 1$ 时, 自变量 x 微小的相对误差是否会导致函数值大的相对误差?

6

$$C = |f'(x)x/f(x)| = \left| \frac{x}{\sqrt{1-x^2} \arcsin x} \right|$$

$x \rightarrow 1$ 时, $C \rightarrow +\infty$, 自变量微小的相对误差会导致函数值大的相对误差。

7. 已知 $I_n = \int_0^1 x^n e^{x-1} dx, n = 0, 1, \dots$ 满足 $I_0 = 1 - e^{-1}, I_n = 1 - nI_{n-1}, n = 1, 2, \dots$.

(1) 取 I_0 近似值为 $\bar{I}_0 = 1 - 0.3679$, 用递推公式 $\bar{I}_n = 1 - n\bar{I}_{n-1}$ 计算 I_n 的近似值 $\bar{I}_n, n = 1, 2, \dots, 9$ (用四位有效数字计算), 结果是否准确?

(2) 设 $\varepsilon_n = I_n - \bar{I}_n$, 推导 $|\varepsilon_n|$ 与 $|\varepsilon_0|$ 的关系.

7 (1) 不精确

设初始误差为 ε_0 , 则

$$|I_n - \tilde{I}_n| = |\varepsilon_n| = n! \cdot |\varepsilon_0| \sim \sqrt{2\pi n} \cdot (n/e)^n \cdot |\varepsilon_0|$$

这是指数型的增长，故很不稳定。

(2)

$$|\varepsilon_n| = n!|\varepsilon_0|$$

归纳即可验证，上述递推式显然对 $n = 1$ 成立，假设上述递推式对 $n - 1$ 成立，则

$$|I_n - \tilde{I}_n| = |(1 - nI_{n-1}) - (1 - n\tilde{I}_{n-1})| = n|I_{n-1} - \tilde{I}_{n-1}| = n \cdot (n - 1)!|\varepsilon_0| = n! \cdot |\varepsilon_0|$$