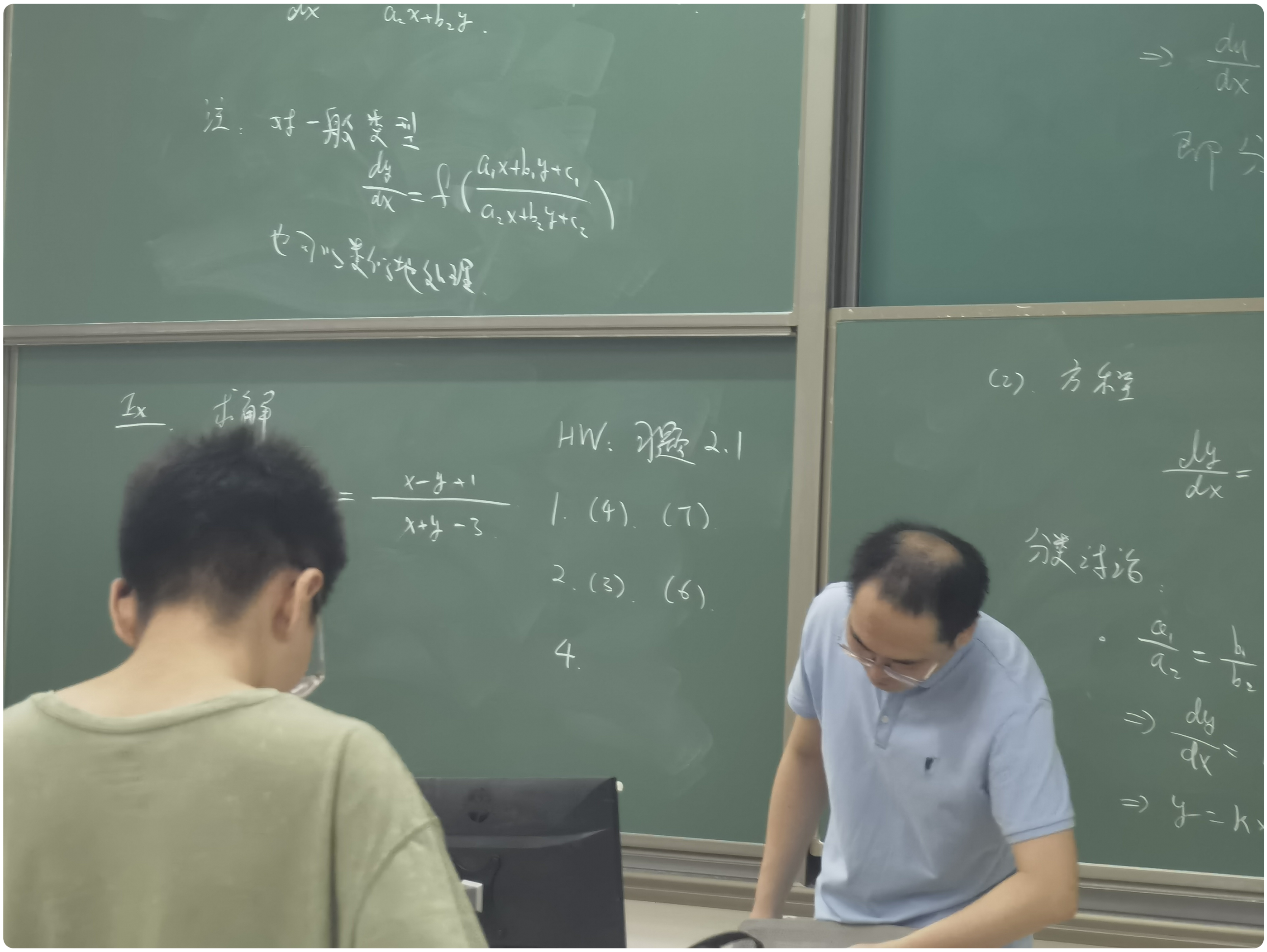
ode_week2

✍️内容



1. 求下列方程的解：

(4) $(1+x)ydx+(1-y)xdy=0$;

积分因子法:

$$e^{x-y}(1+x)ydx + e^{x-y}(1-y)xdy = 0$$

带入 $d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}dy$ 得到

$$d(xye^{x-y}) = 0$$

于是解为

$$xye^{x-y}=C$$

其中 C 是任意常数

（7）$\tan y\,\mathrm{d}x-\cot x\,\mathrm{d}y=0$；

$$\tan ydx-\cot xdy\Leftrightarrow \sin y\sin xdx-\cos y\cos xdy=0$$

于是

$$d(\cos x\sin y)=0$$

于是解为

$$y=\arcsin(C/\cos x),\qquad \text{其中}C\text{为参数}$$

或

$$y=k\pi,k\in\mathbb{Z}$$

2．作适当的变量变换求解下列方程：

（3）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2x-y+1}{x-2y+1}$；

变换 $X=x+\frac{1}{3},Y=y-\frac{1}{3}$，于是

$$\frac{dY}{dX}=\frac{2X-Y}{X-2Y}\Rightarrow XdY-dY^2=dX^2-YdX$$

于是

$$d(X^2-XY+Y^2)=0$$

解得

$$X^2-XY+Y^2=C$$

其中 C 是任意常数

（6）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y^6-2x^2}{2xy^5+x^2y^2}$；

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(y^3)^2-2x^2}{y^2(2xy^3+x^2)}\Rightarrow\frac{dy^3}{dx}=3\frac{(y^3)^2-2x^2}{2xy^3+x^2}$$

换元 $z=y^3$

于是

$$\frac{dz}{dx}=3\frac{z^2-2x^2}{2xz+x^2}=\frac{3(z/x)^2-6}{2(z/x)+1}$$

换元 $w=z/x$，于是 $\frac{dz}{dx}=\frac{d(wx)}{dx}=w+x\frac{dw}{dx}$

$$w+x\frac{dw}{dx}=\frac{3w^2-6}{2w+1}\Rightarrow x\frac{dw}{dx}=\frac{w^2-w-6}{2w+1}=\frac{(w-3)(w+2)}{2w+1}$$

分离变量得到

$$\frac{dx}{x}=\frac{2w+1}{w^2-w-6}dw$$

解得

$$\log|x|=\frac{7}{5}\log|3-w|+\frac{3}{5}\log|2+w|$$

即

$$\log|x|=\frac{7}{5}\log\left|3-\frac{y^3}{x}\right|+\frac{3}{5}\log\left|2+\frac{y^3}{x}\right|$$

4. 已知 $f(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=1(x\neq 0)$，试求函数 $f(x)$ 的一般表达式.

$$\int_0^y f(x)\int_0^x f(t)\,dt\,dx=\int_0^y 1\,dx=y$$

若 f 有足够好的正则性:

$$LHS=\int_0^y\int_0^x f(t)\,dt\,d\int_0^x f(t)\,dt=\frac{1}{2}\left(\int_0^y f(t)\,dt\right)^2$$

于是

$$\int_0^y f(t)\,dt=\sqrt{2y}$$

两边对 y 求导得到

$$f(y)=\frac{1}{\sqrt{2y}}$$