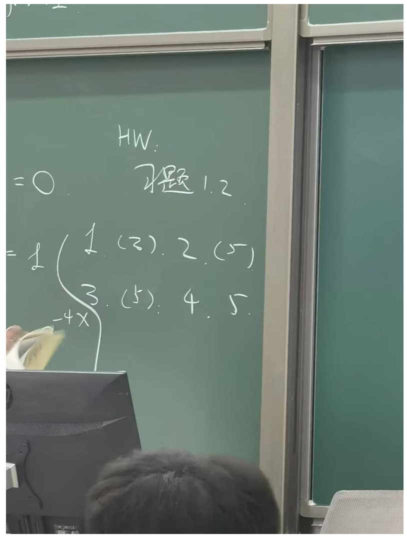
ode_week1

✍️内容



1．指出下面微分方程的阶数，并回答方程是否线性的：

(1) $\frac{dy}{dx}=4x^2-y$；

(2) $\frac{d^2y}{dx^2}-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+12xy=0$；

1 (2) 二阶，非线性

2．试验证下面函数均为方程 $\frac{d^2y}{dx^2}+\omega^2y=0$ 的解，这里 $\omega>0$ 是常数：

(1) $y=\cos\omega x$；

(2) $y=c_1\cos\omega x$ （c_1 是任意常数）；

(3) $y=\sin\omega x$；

(4) $y=c_2\sin\omega x$ （c_2 是任意常数）；

(5) $y=c_1\cos\omega x+c_2\sin\omega x$ （c_1,c_2 是任意常数）；

(6) $y=A\sin(\omega x+B)$ （A,B 是任意常数）．

2 (5)

$$\frac{dy}{dx}=-c_1\omega\sin\omega x+c_2\omega\cos\omega x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-c_1\omega^2\cos\omega x-c_2\omega^2\sin\omega x$$

于是

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\omega^2y=-c_1\omega^2\cos\omega x-c_2\omega^2\sin\omega x+c_1\omega^2\cos\omega x+c_2\omega^2\sin\omega x=0$$

3．验证下列各函数是相应微分方程的解：

（1）$y=\frac{\sin x}{x}$，$xy'+y=\cos x$；

（2）$y=2+c\sqrt{1-x^2}$，$(1-x^2)y'+xy=2x$ （c 是任意常数）；

（3）$y=ce^x$，$y''-2y'+y=0$ （c 是任意常数）；

（4）$y=e^x$，$y'e^{-x}+y^2-2ye^x=1-e^{2x}$；

（5）$y=\sin x$，$y'+y^2-2y\sin x+\sin^2x-\cos x=0$；

3 (5)

$$y'+y^2-2y\sin x+\sin^2x-\cos x=\cos x+\sin^2x-2\sin x\sin x+\sin^2x-\cos x=0$$

4．给定一阶微分方程 $\frac{dy}{dx}=2x$，

（1）求出它的通解；

（2）求通过点(1,4)的特解；

（3）求出与直线 $y=2x+3$ 相切的解；

（4）求出满足条件 $\int_0^1 y\,dx=2$ 的解；

（5）绘出(2)，(3)，(4)中的解的图形．

4 (1)

$$\frac{dy}{dx}=2x\Rightarrow dy=2xdx\Rightarrow dy=dx^2\Rightarrow y=x^2+c(c\text{为任意常数})\text{这是该微分方程的通解}$$

4 (2)

将 $(1,4)$ 带入 $y=x^2+c$ 解得 $c=3$，因此过 $(1,4)$ 的特解为 $y=x^2+3$.

4 (3)

联立

$$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = x^2 + c \end{cases}$$

得到 $x^2 - 2x + c - 3 = 0$，由相切可知，$\Delta = 4 - 4(c-3) = 0$, 故 $c = 4$, 故与直线 $y = 2x + 3$ 相切的解为 $y = x^2 + 4$.

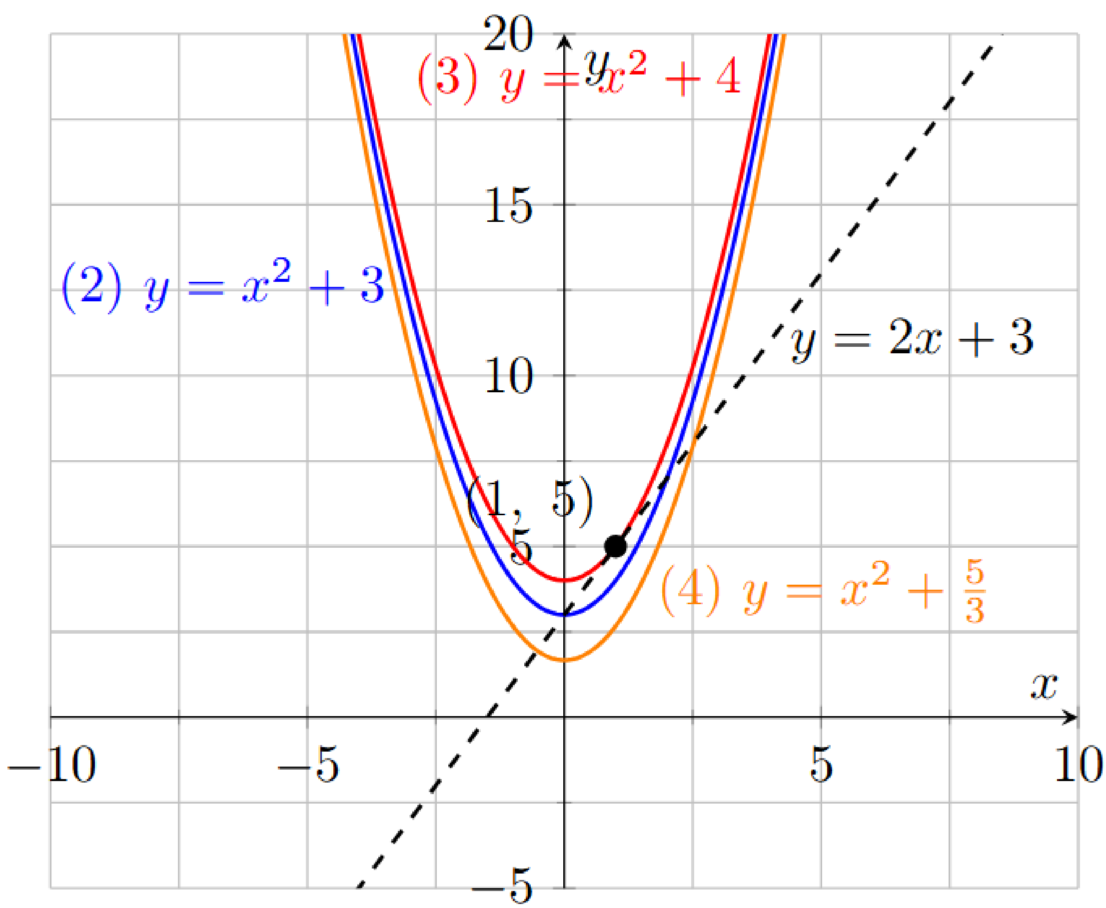
4 (4)

令

$$\int_0^1 y\,dx = \int_0^1 (x^2 + c)\,dx = \frac{1}{3} + c = 2 \Rightarrow c = \frac{5}{3}$$

故解为 $y = x^2 + \frac{5}{3}$.

4 (5)



5．求下列两个微分方程的公共解：

$y' = y^2 + 2x - x^4$，$y' = 2x + x^2 + x^4 - y - y^2$．

5 联立两个微分方程可以得到

$$2y' = y^2 + 2x - x^4 + 2x + x^2 + x^4 - y - y^2 = 4x + x^2 - y$$
$$y^2 + 2x - x^4 = 2x + x^2 + x^4 - y - y^2 \Rightarrow 2y^2 + y = 2x^4 + x^2$$

即

$$\begin{cases} y + 2y' = x^2 + 4x \\ 2y^2 + y = 2x^4 + x^2 \end{cases}$$

于是

$$2(ye^{x/2})' = (x^2 + 4x)e^{x/2} \Rightarrow (ye^{x/2})' = \left(x^2 e^{x/2}\right)' \Rightarrow ye^{x/2} = x^2 e^{x/2} + c \Rightarrow y = x^2 + ce^{-x/2}$$

再将 $y = x^2 + ce^{-x/2}$ 带入 $2y^2 + y = 2x^4 + x^2$，得到

$$2(x^2 + ce^{-x/2})^2 + (x^2 + ce^{-x/2}) = 2x^4 + x^2$$

化简得到

$$c((4x^2 + 1)e^{x/2} + 2c) = 0$$

由 x 任意性可知 $c = 0$，故公共解为 $y = x^2$.