定义 0.1

设 V 是 n 维欧式空间，$\mathbf{A}$ 是 V 内的一个线性变换。如果对任意 $\alpha,\beta \in V$ 都有

$$(\mathbf{A}\alpha, \mathbf{A}\beta) = (\alpha, \beta)$$

则称 $\mathbf{A}$ 为 V 内的一个正交变换.

对 V 内任意线性变换 $\mathbf{A}$，定义 V 内二元函数

$$f(\alpha,\beta) = (\mathbf{A}\alpha, \mathbf{A}\beta)$$

我们有 $f(\alpha,\beta)$ 是对称双线性函数。

在 V 内取定一组基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$，设

$$\alpha = (\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)X, \quad \beta = (\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)Y$$

$\mathbf{A}$ 为正交变换 $\Leftrightarrow f(\alpha,\beta) \equiv (\alpha,\beta) \Leftrightarrow A'GA = G$[a]

[a] G 是 $(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)$ 的 Gram 矩阵

例题 0.1. p39 第 3 题

设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 和 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 是 n 维欧氏空间 V 中的两个向量组，证明存在一个正交变换 $\mathbf{A}$，使

$$\mathbf{A}\alpha_i = \beta_i \quad (i = 1,2,\cdots,s) \tag{1}$$

的充分必要条件是

$$(\alpha_i,\alpha_j) = (\beta_i,\beta_j) \quad (i,j = 1,2,\cdots,s). \tag{2}$$

证明

- 充分性：若 $(\alpha_i,\alpha_j) = (\beta_i,\beta_j), \forall i,j$，我们不妨设 $(\alpha_i),(\beta_i)$ 本身构成极大线性无关组，否则取其极大线性无关组即可，公式0.3保证了这两个极大线性无关组等秩。我们直接构造线性变换 $\mathbf{A}$，将每个 α_i 对应到 β_i。由于 $(\alpha_i),(\beta_i)$ 是 n 维欧氏空间 V 的一个 s 维子空间 V_s 中的两组基，若有 $\mathbf{A}$ 在 V_s 上构成正交变换，则可以把 $\mathbf{A}$ 扩充到 V 上，同样构成线性变换。因此，不妨设 $s = n$，于是 $(\alpha_i),(\beta_i)$ 是 n 维欧氏空间 V 中的两组基。

  下面验证：$\mathbf{A}$ 正交.

  $\forall \alpha,\beta \in V$，我们有分解 $\alpha = \sum_{k=1}^{n} a_k\alpha_k, \beta = \sum_{k=1}^{n} b_k\beta_k$。故

$$(\mathbf{A}\alpha, \mathbf{A}\beta) = (\mathbf{A}\sum_{k=1}^{n} a_k\alpha_k, \mathbf{A}\sum_{k=1}^{n} b_k\beta_k) \tag{3}$$

$$= (\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i d_j(\mathbf{A}\alpha_i, \mathbf{A}\alpha_j)) \tag{4}$$

$$= (\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i d_j(\beta_i, \beta_j)) \tag{5}$$

$$= (\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i d_j(\alpha_i, \alpha_j)) \tag{6}$$

$$= (\alpha,\beta), \qquad \forall \alpha,\beta \in V \tag{7}$$

- 必要性：由正交线性变换的定义可知：

$$(\beta_i,\beta_j) = (\mathbf{A}\alpha_i, \mathbf{A}\alpha_j) = (\alpha_i,\alpha_j) \tag{8}$$

□

例题 0.2. p55 第 15 题

设 **A** 是 n 维酉空间 V 内的一个线性变换。如果存在一个复系数多项式 $f(\lambda)$，使 $\mathbf{A} = f(\mathbf{A}^*)$，证明在 V 内存在一组标准正交基，使 **A** 在这组基下的矩阵成对角形。

定理 0.1

设 **A** 使 n 维酉空间 V 内的一个正规变换，则在 V 内存在一组标准正交基，使 **A** 在这组基下的矩阵成对角形。♡

证明 根据定理0.1，只需证明 **A** 使 n 维酉空间 V 内的一个正规变换即可。

因为

$$A = f(A^*), \quad A^* = f(A) \tag{9}$$

所以

$$AA^* = f(A^*)A^* = A^*f(A^*) = A^*A \tag{10}$$

□

例题 0.3. p55 第 29 题

设 V 是 n 维酉空间.

1. 设 M 是 V 的子空间。在商空间 V/M 内定义内积如下：设 $\bar{\alpha} = \alpha + M, \bar{\beta} = \beta + M$。若

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \ \ (\alpha_1 \in M, \alpha_2 \in M^{\perp})$$
$$\beta = \beta_1 + \beta_2 \ \ (\beta_1 \in M, \beta_2 \in M^{\perp})$$

   则令 $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = (\alpha_2, \beta_2)$。证明 V/M 关于此内积成酉空间。
2. 设 **A** 为 V 内的一个线性变换。证明在 V 内存在一组标准正交基，使 **A** 在该组基下的矩阵成上三角形.

定义 0.2

设 V 是复数域 **C** 上的线性空间，如果给定一个法则，使 V 内任意两个向量 α, β 都按照这个法则对应于 **C** 内一个唯一确定的数，记作 (α, β)，且满足：

1. 对任意 $k_1, k_2 \in \mathbf{C}, \alpha_1, \alpha_2, \beta \in V$，有

$$(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2, \beta) = k_1(\alpha_1, \beta) + k_2(\alpha_2, \beta) \tag{11}$$

2. $(\alpha, \beta) = \overline{(\beta, \alpha)}$，因此对任意 $\alpha \in V, (\alpha, \alpha)$ 都是实数
3. 对任意 $\alpha \in V, (\alpha, \alpha) \geq 0$，且 $(\alpha, \alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$

则称二元函数 (α, β) 为 V 内向量 α, β 的内积. 定义了这种内积的 **C** 上的线性空间称为酉空间. ♣

证明

- 验证可知：
  1. 对任意 $k_1, k_2 \in \mathbf{C}, \alpha_1, \alpha_2, \beta \in V/M$，有

$$(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2, \beta) = k_1(\alpha_1, \beta) + k_2(\alpha_2, \beta) \tag{12}$$

  2. $(\alpha, \beta) = \overline{(\beta, \alpha)}$，因此对任意 $\alpha \in V/M, (\alpha, \alpha)$ 都是实数
  3. 对任意 $\alpha \in V/M, (\alpha, \alpha) \geq 0$，且 $(\alpha, \alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$

- 考虑酉空间中的 Schmidt 正交化和 QR 分解，显然得证！

□

例题 0.4. p39 习题 1

设 η 是 n 维欧氏空间 V 内的一个单位向量，定义 V 内一个线性变换如下：

$$\mathbf{A}\alpha = \alpha - 2(\eta, \alpha)\eta \tag{13}$$

称这样的线性变换为一个镜面反射. 证明：

1. $\mathbf{A}$ 是正交变换[a]
2. $\mathbf{A}$ 是第二类的[b]
3. $\mathbf{A}^2 = E$
4. 设 $\mathbf{B}$ 是 V 内的一个第二类正交变换，则必有

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B_1} \tag{14}$$

其中 $\mathbf{B_1}$ 是 V 内的一个第一类线性变换[c].

[a] 等价于 $(\alpha, \beta) = (\mathbf{A}\alpha, \mathbf{A}\beta), \forall \alpha, \beta \in V$

[b] $\mathbf{A}$ 在任一组基下行列式为-1

[c] $\mathbf{B_1}$ 在任一组基下行列式为 1

证明

1.

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A}\alpha, \mathbf{A}\beta) &= (\alpha - 2(\eta, \alpha)\eta, \beta - 2(\eta, \beta)\eta) &(15)\\
&= (\alpha, \beta - 2(\eta, \beta)\eta) - 2((\eta, \alpha)\eta, \beta - 2(\eta, \beta)\eta) &(16)\\
&= (\alpha, \beta) - 2(\alpha, (\eta, \beta)\eta) - 2((\eta, \alpha)\eta, \beta) + 4((\eta, \alpha)\eta, (\eta, \beta)\eta) &(17)\\
&= (\alpha, \beta) - 2(\eta, \beta)(\alpha, \eta) - 2(\eta, \alpha)(\eta, \beta) + 4(\eta, \alpha)(\eta, \beta)(\eta, \eta) &(18)\\
&= (\alpha, \beta) - 2(\eta, \beta)(\alpha, \eta) - 2(\eta, \alpha)(\eta, \beta) + 4(\eta, \alpha)(\eta, \beta) &(19)\\
&= (\alpha, \beta) &(20)
\end{aligned}$$

2. 考虑 $\langle\eta\rangle$ 的正交补空间 $\langle\eta\rangle^{\perp}$，这是 V 中的一个 n-1 维子空间，取其中一组标准正交基 $\eta_2, \eta_3, \cdots, \eta_n$，满足 $\mathbf{A}\eta_i = \eta_i - 2(\eta, \eta_i)\eta_i = \eta_i$, $i = 2, 3, \cdots, n$. 与 η 拼成 V 中的一组标准正交基 $\eta, \eta_2, \eta_3, \cdots, \eta_n$, $\mathbf{A}\eta = \eta - 2(\eta, \eta)\eta = -\eta$. 于是，在 $\eta, \eta_2, \eta_3, \cdots, \eta_n$ 这组基下，$\mathbf{A}$ 的表示矩阵为 $\mathrm{diag}\{-1, 1, 1, \cdots, 1\}$.
3. 任取 $\alpha \in V$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}^2\alpha &= \boldsymbol{A}(\alpha - 2(\eta, \alpha)\eta) &(21)\\
&= (\alpha - 2(\eta, \alpha)\eta) - 2(\eta, \alpha - 2(\eta, \alpha)\eta)\eta &(22)\\
&= \alpha - 2(\eta, \alpha)\eta - 2(\eta, \alpha)\eta + 4(\eta, \alpha)(\eta, \eta) &(23)\\
&= \alpha &(24)\\
& &(25)
\end{aligned}$$

所以 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{E}$.

4. 就选取 2. 中构造的 V 中的一组标准正交基 $\eta, \eta_2, \eta_3, \cdots, \eta_n$, 在这组基下, $\mathbf{A}$ 的表示矩阵为 $\mathrm{diag}\{-1, 1, 1, \cdots, 1\}$. 记 $\mathbf{B}$ 的表示矩阵为 $\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{pmatrix}$，于是不难看出 $\mathbf{B}_1$ 的表示矩阵为 $\begin{pmatrix} -e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{pmatrix}$.

□

例题 0.5. p39 习题 2

设 V 是一个 n 维欧式空间，V 中一个正交变换 **A** 有特征值 $\lambda_0=1$，且 $\dim V_{\lambda_0}=n-1$，证明 **A** 是一个镜面反射.

证明 正交变换 **A** 的特征值要么是 1，要么是-1. 由题意，**A** 特征值 1 的子空间维数为 n-1，于是特征值-1 的子空间维数为 1. 选取 η 作为特征值-1 的子空间中的单位特征向量就有：

$$\mathbf{A}\alpha=\alpha-2(\eta,\alpha)\eta,\ \forall\alpha\in V \tag{26}$$

□

例题 0.6. p39 习题 4

设 α,β 是欧式空间中两个不同的单位向量，证明存在一个镜面反射 **A**，使 $\mathbf{A}\alpha=\beta$.

证明 取 $\eta=\dfrac{\alpha-\beta}{\sqrt{(\alpha-\beta,2\alpha)}}$ 即可. □

例题 0.7. p39 习题 5

证明：n 维欧式空间中任一正交变换都可以表示成一系列镜面反射的乘积.

证明 记 n 维欧式空间中一个正交变换 **A** 在某组基 $(e_1,e_2,\cdots,e_n)$ 下表示矩阵为

$$A=\operatorname{diag}\left\{\underbrace{1\quad\cdots\quad 1}_{s\text{个}}\quad\underbrace{-1\quad\cdots\quad -1}_{t\text{个}}\right\},s+t=n \tag{27}$$

于是这组基下存在反射变换的表示矩阵 $A_1,A_2,\cdots,A_t$，其中

$$A_k=\operatorname{diag}\left\{1\quad\cdots\quad 1\quad\underbrace{-1}_{\text{第 }s+k\text{ 个}}\quad 1\quad\cdots\quad 1\right\},\quad\forall k \tag{28}$$

所以

$$A=A_1A_2\cdots A_t \tag{29}$$

□

例题 0.8. p39 习题 7

设 V 是 n 维欧式空间，**A** 是第 1 题中定义的镜面反射，**B** 是 V 内一正交变换. 证明 $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{AB}$ 也是 V 内一镜面反射.

证明 由于 B 是正交变换，所以 B^{-1} 也是正交变换. 先由镜面反射定义，有一个 η，使得

$$A\alpha=\alpha-2(\eta,\alpha)\eta \tag{30}$$

于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\alpha&=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\alpha) &(31)\\&=\boldsymbol{B}^{-1}\left[\boldsymbol{B}\alpha-2(\eta,\boldsymbol{B}\alpha)\eta\right] &(32)\\&=\alpha-2(\eta,\boldsymbol{B}\alpha)\boldsymbol{B}^{-1}\eta &(33)\\&=\alpha-2\left(\boldsymbol{B}^{-1}\eta,\alpha\right)\left(\boldsymbol{B}^{-1}\eta\right) &(34)\end{aligned}$$

所以 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 也是 V 内一个镜面反射. □

例题 0.9. p39 习题 9(1)

给定正交矩阵:

$$A=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix} \tag{35}$$

试求一正交矩阵 T，使 $T^{-1}AT=J$ 为定理 2.1 中所指出的准对角矩阵[a]，并写出 J.

[a]就是实正交标准型

引理 0.1

对于一个复特征值 λ，和它对应的特征向量 v，有

$$\boldsymbol{A}\left(\mathrm{Re}\left(v\right),\mathrm{Im}\left(v\right)\right)=\left(\mathrm{Re}\left(v\right),\mathrm{Im}\left(v\right)\right)\begin{pmatrix}\mathrm{Re}\left(\lambda\right) & -\mathrm{Im}\left(\lambda\right)\\ \mathrm{Im}\left(\lambda\right) & \mathrm{Re}\left(\lambda\right)\end{pmatrix} \tag{36}$$

笔记 该结论按部就班地验证即可得到.

证明 经过计算可知，矩阵 A 的特征值为:

$$\lambda_1=1,\lambda_2=\frac{1+i\sqrt{3}}{2},\lambda_3=\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \tag{37}$$

分别对应的特征向量为

$$v_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},v_2=\begin{pmatrix}\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\\ \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\\ 1\end{pmatrix},v_3=\begin{pmatrix}\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\\ \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\\ 1\end{pmatrix} \tag{38}$$

于是

$$A\left(v_1,\mathrm{Re}\left(v_2\right),\mathrm{Im}\left(v_2\right)\right)=\left(v_1,\mathrm{Re}\left(v_2\right),\mathrm{Im}\left(v_2\right)\right)\begin{pmatrix}1 & & \\ & \mathrm{Re}\left(\lambda_2\right) & -\mathrm{Im}\left(\lambda_2\right)\\ & \mathrm{Im}\left(\lambda_2\right) & \mathrm{Re}\left(\lambda_2\right)\end{pmatrix} \tag{39}$$

即

$$A\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix} \tag{40}$$

也就是说

$$T=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix} \tag{41}$$

$$J=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix} \tag{42}$$

□

例题 0.10. p39 习题 14

求正交矩阵 T，使 $T'AT$ 成对角形：

$$A=\begin{bmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{bmatrix} \tag{43}$$

证明 计算特征向量可知：

$$T=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{2}{\sqrt{5}}&-\frac{2}{\sqrt{5}}\\-\frac{2}{3}&0&\frac{1}{\sqrt{5}}\\\frac{2}{3}&\frac{1}{\sqrt{5}}&0\end{pmatrix} \tag{44}$$

□

例题 0.11. p39 习题 15(1)

用正交线性变数替换化下列实二次型成标准型：

$$f=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3 \tag{45}$$

证明

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&2&-2\\0&-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=:(x_1,x_2,x_3)A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \tag{46}$$

计算可得：

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&&\\&2&\\&&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}=:T'JT \tag{47}$$

于是

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)T'JT\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\left(T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\right)'JT\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \tag{48}$$

所以

$$f(x_1,x_2,x_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}x_1-\frac{2}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3\\-\frac{2}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3\\\frac{2}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3\end{pmatrix}'\begin{pmatrix}5&&\\&2&\\&&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}x_1-\frac{2}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3\\-\frac{2}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3\\\frac{2}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3\end{pmatrix} \tag{49}$$

$$=5\left(\frac{1}{3}x_1-\frac{2}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3\right)^2+2\left(-\frac{2}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3\right)^2-\left(\frac{2}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3\right)^2 \tag{50}$$

□

例题 0.12. p39 习题 17

设 A,B 都是 n 阶实对称矩阵，证明：存在正交矩阵 T，使 $T^{-1}AT=B$ 的充分必要条件是 A 与 B 的特征多项式相同.

引理 0.2

任何 n 阶实对称矩阵都可以正交相似对角化.

证明 A 与 B 的特征多项式相同 $\Leftrightarrow A$ 与 B 的特征值相同 $\Leftrightarrow A$ 与 B 正交相似于同一个对角阵 $\Leftrightarrow$ '存在正交矩阵 T，使 $T^{-1}AT = B$' □

例题 0.13. p39 习题 18

设 A, B 都是 n 阶实对称矩阵，A 正定. 证明：存在一可逆矩阵 T，使 $T'AT$ 和 $T'BT$ 同时成对角形.

证明 存在 $R, S \in O(n)$,s.t.

$$R'AR = \Lambda_1 \tag{51}$$

$$S'R'BRS = \Lambda_2 \tag{52}$$

取 $T = RS \in O(n)$，则有

$$T'AT = S'\Lambda_1 S = \Lambda_1 \tag{53}$$

$$T'BT = \Lambda_2 \tag{54}$$

□

例题 0.14. p39 习题 19

设 A 为正定矩阵，B 为实数矩阵.

1. 证明：对于任意正整数 k，A^k 也正定
2. 如果对于某一正整数 r 有 $A^rB = BA^r$，证明：

$$AB = BA \tag{55}$$

证明

1. A 正定，故实对称，显然 A^k 也实对称. 从而实对称 A 正定等价于 A 的所有特征值大于 0，显然有实对称 A^k 的所有特征值大于 0，故 A^k 正定.
2. 存在 n 阶可逆 P，使得 $A = P\Lambda P^{-1}$. 于是

$$A^rB = BA^r \Leftrightarrow \left(P\Lambda P^{-1}\right)^r B = B\left(P\Lambda P^{-1}\right)^r \tag{56}$$

$$\Leftrightarrow P\Lambda^r P^{-1}B = BP\Lambda^r P^{-1} \tag{57}$$

$$\Leftrightarrow \Lambda^r\left(P^{-1}BP\right) = \left(P^{-1}BP\right)\Lambda^r \tag{58}$$

其中$\Lambda^r=\operatorname{diag}\left\{\lambda_1^r,\lambda_2^r,\cdots,\lambda_n^r\right\},\lambda_i>0,\forall i$. 设$P^{-1}BP=\left(b_{ij}\right)_{i,j=1}^n$. 于是

$$\Lambda^r\left(P^{-1}BP\right)=\left(P^{-1}BP\right)\Lambda^r\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\lambda_1^rb_{11}&\lambda_1^rb_{12}&\cdots&\lambda_1^rb_{1n}\\\lambda_2^rb_{21}&\lambda_2^rb_{22}&\cdots&\lambda_2^rb_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\lambda_n^rb_{n1}&\lambda_n^rb_{n2}&\cdots&\lambda_n^rb_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1^rb_{11}&\lambda_2^rb_{12}&\cdots&\lambda_n^rb_{1n}\\\lambda_1^rb_{21}&\lambda_2^rb_{22}&\cdots&\lambda_n^rb_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\lambda_1^rb_{n1}&\lambda_2^rb_{n2}&\cdots&\lambda_n^rb_{nn}\end{pmatrix}\tag{59}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0&\left(\lambda_1^r-\lambda_2^r\right)b_{12}&\cdots&\left(\lambda_1^r-\lambda_n^r\right)b_{1n}\\\left(\lambda_2^r-\lambda_1^r\right)b_{21}&0&\cdots&\left(\lambda_2^r-\lambda_n^r\right)b_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\left(\lambda_n^r-\lambda_1^r\right)b_{n1}&\left(\lambda_n^r-\lambda_2^r\right)b_{n2}&\cdots&0\end{pmatrix}=0\tag{60}$$

$$\Leftrightarrow\left(\lambda_i^r-\lambda_j^r\right)b_{ij}=0,\forall i\neq j\tag{61}$$

$$\Leftrightarrow\left(\lambda_i-\lambda_i\right)\left(\lambda_1^{r-1}+\lambda_1^{r-2}\lambda_2+\cdots+\lambda_2^{r-1}\right)b_{ij}=0,\forall i\neq j\tag{62}$$

$$\Leftrightarrow\left(\lambda_i-\lambda_i\right)b_{ij}=0,\forall i\neq j\ (\text{由于}\lambda_1^{r-1}+\lambda_1^{r-2}\lambda_2+\cdots+\lambda_2^{r-1}>0)\tag{63}$$

$$\Leftrightarrow\Lambda\left(P^{-1}BP\right)=\left(P^{-1}BP\right)\Lambda\tag{64}$$

$$\Leftrightarrow AB=BA\tag{65}$$

□

例题 0.15. p39 习题 22

设 A 是 n 阶实对称矩阵. 证明 A 半正定的充分必要条件是存在 n 阶实对称矩阵 B，使 $A=B^2$.

笔记 这是半正定矩阵开方问题.

证明 若 A 半正定，则存在正交矩阵 T，使得 $A=T'\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}T$，其中 $\lambda_i\geq 0,\forall i$. 直接取 $B=T'\operatorname{diag}\{\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n}\}T$，验证就有 $A=B^2$.

若有 $A=B^2$，设 B 的全部特征值为 $\lambda_i,i=1,2,\cdots,n$. 则 A 的全部特征值为 $\lambda_i^2,i=1,2,\cdots,n$. □

例题 0.16. p39 习题 23

设 A 是实数域上一个 n 阶方阵，证明存在实数域上的 n 阶对称方阵 B，使得 $A'A=B^2$.

引理 0.3

实对称矩阵 A 是半正定矩阵的充要条件是存在矩阵 C，使得 $A=C'C$.

证明 根据引理0.3和习题 22 立刻得到. □

例题 0.17. p39 习题 24

设 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 是 n 维欧氏空间 V 内的两个对称变换[a]. 证明：V 内存在一组标准正交基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$，使 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 在此组基下的矩阵同时成对角形的充分必要条件是 $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$.

[a] 由定理 2.2 可知，对称变换就是在某组基下的对应矩阵可以对角化

笔记 从矩阵的角度来看，这个题就是说：A,B 可同时相似对角化的充要条件是 $AB=BA$.

证明 若 A,B 可同时相似对角化，则存在可逆 P，使得 $P^{-1}AP=\Lambda_1,P^{-1}BP=\Lambda_2$，那显然有

$$AB=P\Lambda_1P^{-1}P\Lambda_2P^{-1}=P\Lambda_1\Lambda_2P^{-1}=P\Lambda_2\Lambda_1P^{-1}=P\Lambda_2P^{-1}P\Lambda_1P^{-1}=BA\tag{66}$$

若 $AB=BA$ 且已知 A,B 都可对角化，下面证明 A,B 可同时相似对角化. 存在可逆 P,Q，使得 $P^{-1}AP=\Lambda_1, Q^{-1}BQ=\Lambda_2$，于是 $P\Lambda_1P^{-1}Q\Lambda_2Q^{-1}=AB=BA=Q\Lambda_2Q^{-1}P\Lambda_1P^{-1}$，即 $\Lambda_1P^{-1}Q\Lambda_2Q^{-1}P=P^{-1}Q\Lambda_2Q^{-1}P\Lambda_1$. 于是我们可以不妨设 A 为对角阵 $\mathrm{diag}\{\lambda_1I_{s_1},\cdots,\lambda_tI_{s_t}\}$，设 $B=(b_{ij})_{i,j=1}^n$. 类似于习题 19 中的分析可知，B 一定是这样的分块对角矩阵：$\mathrm{diag}\{B_{s_1},\cdots,B_{s_t}\}$. 于是只需证，$\forall i$，$\lambda_iI_{s_i}$ 和 B_i 可以同时相似对角化. 这显然. $\square$