2024/3/20

1. 设 V 是数域 K 上的 n 维线性空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一组基，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 K 内的 n 个数. 证明：在 V 内存在唯一的一个线性函数 $f(\alpha)$，满足

$$f(\varepsilon_i)=a_i \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

1.存在性：显然，只要考虑f时良好定义的，这显然

$f(\varepsilon_i)\neq f(\varepsilon_j)\Leftrightarrow f(\varepsilon_i-\varepsilon_j)\neq 0\Rightarrow \varepsilon_i-\varepsilon_j\neq 0\Leftrightarrow \varepsilon_i\neq\varepsilon_j$

唯一性：若f,g都满足$f(\varepsilon_i)=a_i=g(\varepsilon_i), i=1,2,\cdots,n$

则$\forall v\in V, v=\sum_{i=1}^{n}c_i\varepsilon_i$则

$$f(v)=f\left(\sum_{i=1}^{n}c_i\varepsilon_i\right)=\sum_{i=1}^{n}c_if(\varepsilon_i)=\sum_{i=1}^{n}c_ig(\varepsilon_i)=g\left(\sum_{i=1}^{n}c_i\varepsilon_i\right)=g(v)$$

$\Rightarrow f=g.$

3. 在线性空间 $M_n(K)$内定义函数如下：

$$f(A)=\mathrm{Tr}(A).$$

证明：$f(A)$是 $M_n(K)$内的一个线性函数.

3.先验证f是良好定义的

$f(A)\neq f(B)\Leftrightarrow Tr(A)\neq Tr(B)\Rightarrow A\neq B$

再验证f是线性的，$\forall A,B\in M_n(\mathbb{K}), k\in\mathbb{K}$

①$f(A+B)=Tr(A+B)\overset{\text{这个等号只需把}A,B\text{设出来即可验证}}{=}Tr(A)+Tr(B)=f(A)+f(B)$

②$f(kA)=Tr(kA)\overset{\text{这个等号只需把}A\text{设出来即可验证}}{=}kTr(A)=kTr(A)$

7. 在 K^4 中定义函数如下：若

$$\alpha=(x_1,x_2,x_3,x_4),\quad \beta=(y_1,y_2,y_3,y_4),$$

则令

$$f(\alpha,\beta)=3x_1y_2-5x_2y_1+x_3y_4-4x_4y_3.$$

(1) 证明 $f(\alpha,\beta)$是一个双线性函数；

(2) 在 K^4 中给定一组基

$$\varepsilon_1=(1,2,-1,0),\quad \varepsilon_2=(1,-1,1,1),$$
$$\varepsilon_3=(-1,2,1,1),\quad \varepsilon_4=(-1,-1,0,1),$$

求 $f(\alpha,\beta)$在这组基下的矩阵；

7.(1)验证即可

$$\forall\begin{cases}\alpha=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{K}^4\\ \beta=(y_1,y_2,y_3,y_4)\in\mathbb{K}^4\ ,k\in\mathbb{K}\\ \gamma=(z_1,z_2,z_3,z_4)\in\mathbb{K}^4\end{cases}$$

$f(\alpha+\gamma,\beta)=3(x_1+z_1)y_2-5(x_2+z_2)y_1+(x_3+z_3)y_4-4(x_4+z_4)y_3$

$=(3x_1y_2-5x_2y_1+x_3y_4-4x_4y_3)+(3z_1y_2-5z_2y_1+z_3y_4-4z_4y_3)$

$=f(\alpha,\beta)+f(\gamma,\beta)$

$f(k\alpha,\beta)=3kx_1y_2-5kx_2y_1+kx_3y_4-4kx_4y_3$

$=k(3x_1y_2-5x_2y_1+x_3y_4-4x_4y_3)=kf(\alpha,\beta)$

$f(\alpha,\beta+\gamma)=3x_1(y_2+z_2)-5x_2(y_1+z_1)+x_3(y_4+z_4)-4x_4(y_3+z_3)$

$=(3x_1y_2-5x_2y_1+x_3y_4-4x_4y_3)+(3x_1z_2-5x_2z_1+x_3z_4-4x_4z_3)$

$=f(\alpha,\beta)+f(\alpha,\gamma)$

$f(\alpha,k\beta)=3x_1ky_2-5x_2ky_1+x_3ky_4-4x_4ky_3$

$=k(3x_1y_2-5x_2y_1+x_3y_4-4x_4y_3)=kf(\alpha,\beta)$

故 $f(\alpha,\beta)$ 是一个双线性函数

7.(2) $\varepsilon_1=(1,2,-1,0),\varepsilon_2=(1,-1,1,1),\varepsilon_3=(-1,2,1,1),\varepsilon_4=(-1,-1,0,1)$

$f(\alpha,\beta)$在这组基下的表示矩阵 $A=\begin{pmatrix}f(\varepsilon_1,\varepsilon_1)&f(\varepsilon_1,\varepsilon_2)&f(\varepsilon_1,\varepsilon_3)&f(\varepsilon_1,\varepsilon_4)\\ f(\varepsilon_2,\varepsilon_1)&f(\varepsilon_2,\varepsilon_2)&f(\varepsilon_2,\varepsilon_3)&f(\varepsilon_2,\varepsilon_4)\\ f(\varepsilon_3,\varepsilon_1)&f(\varepsilon_3,\varepsilon_2)&f(\varepsilon_3,\varepsilon_3)&f(\varepsilon_3,\varepsilon_4)\\ f(\varepsilon_4,\varepsilon_1)&f(\varepsilon_4,\varepsilon_2)&f(\varepsilon_4,\varepsilon_3)&f(\varepsilon_4,\varepsilon_4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&-14&15&6\\15&-1&-2&-7\\-12&-10&1&14\\3&4&-15&-2\end{pmatrix}$

(3) 在 K^4 内另给一组基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$，且

$$(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)T,$$

其中

$$T=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix},$$

求 $f(\alpha,\beta)$在基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 下的矩阵.

7.(3) $\varepsilon_1=(1,2,-1,0),\varepsilon_2=(1,-1,1,1),\varepsilon_3=(-1,2,1,1),\varepsilon_4=(-1,-1,0,1)$

$f(\alpha,\beta)$在这组基下的表示矩阵 $A=\begin{pmatrix}f(\varepsilon_1,\varepsilon_1)&f(\varepsilon_1,\varepsilon_2)&f(\varepsilon_1,\varepsilon_3)&f(\varepsilon_1,\varepsilon_4)\\f(\varepsilon_2,\varepsilon_1)&f(\varepsilon_2,\varepsilon_2)&f(\varepsilon_2,\varepsilon_3)&f(\varepsilon_2,\varepsilon_4)\\f(\varepsilon_3,\varepsilon_1)&f(\varepsilon_3,\varepsilon_2)&f(\varepsilon_3,\varepsilon_3)&f(\varepsilon_3,\varepsilon_4)\\f(\varepsilon_4,\varepsilon_1)&f(\varepsilon_4,\varepsilon_2)&f(\varepsilon_4,\varepsilon_3)&f(\varepsilon_4,\varepsilon_4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&-14&15&6\\15&-1&-2&-7\\-12&-10&1&14\\3&4&-15&-2\end{pmatrix}$

$$B=T'AT=\begin{pmatrix}-9&-29&11&35\\25&-3&69&-11\\1&-123&-3&-11\\-5&-1&-1&-9\end{pmatrix}$$

8.(1). $f(A,B)$是对称双线性函数 $\Leftrightarrow f(A,B)=f(B,A) \Leftrightarrow Tr(AB)=Tr(BA)$

设 $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$, $B=(b_{ij})_{1\le i,j\le n}$. 则 $AB:=(c_{ij})_{1\le i,j\le n}$, $BA:=(d_{ij})_{1\le i,j\le n}$

$Tr(AB)=\sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}$, $Tr(BA)=\sum_{i=1}^{n} d_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}a_{ji}$

由求和的交换性可知: $Tr(AB)=Tr(BA) \Rightarrow f(A,B)$对称双线性.

(2). $f(A,B)$在基 $\varepsilon_{11},\varepsilon_{12},\varepsilon_{21},\varepsilon_{22}$ 下的矩阵为

$$\begin{bmatrix} f(\varepsilon_{11},\varepsilon_{11}) & f(\varepsilon_{11},\varepsilon_{12}) & f(\varepsilon_{11},\varepsilon_{21}) & f(\varepsilon_{11},\varepsilon_{22}) \\ f(\varepsilon_{12},\varepsilon_{11}) & f(\varepsilon_{12},\varepsilon_{12}) & f(\varepsilon_{12},\varepsilon_{21}) & f(\varepsilon_{12},\varepsilon_{22}) \\ f(\varepsilon_{21},\varepsilon_{11}) & f(\varepsilon_{21},\varepsilon_{12}) & f(\varepsilon_{21},\varepsilon_{21}) & f(\varepsilon_{21},\varepsilon_{22}) \\ f(\varepsilon_{22},\varepsilon_{11}) & f(\varepsilon_{22},\varepsilon_{12}) & f(\varepsilon_{22},\varepsilon_{21}) & f(\varepsilon_{22},\varepsilon_{22}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1 \end{bmatrix}$$

这(由(1)可知)是一个对称矩阵. $= M$

$f(\varepsilon_{11},\varepsilon_{11})=1$, $f(\varepsilon_{12},\varepsilon_{12})=0$

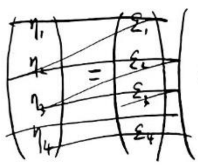
$f(\varepsilon_{21},\varepsilon_{21})=0$, $f(\varepsilon_{22},\varepsilon_{22})=1$

$f(\varepsilon_{11},\varepsilon_{12})=0$. $f(\varepsilon_{11},\varepsilon_{21})=0$.

$f(\varepsilon_{11},\varepsilon_{22})=0$. $f(\varepsilon_{12},\varepsilon_{21})=1$

$f(\varepsilon_{12},\varepsilon_{22})=0$. $f(\varepsilon_{21},\varepsilon_{22})=0$

(3). $\begin{cases} \eta_1=\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22} \\ \eta_2=\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22} \\ \eta_3=\varepsilon_{12}+\varepsilon_{21} \\ \eta_4=\varepsilon_{12}-\varepsilon_{21} \end{cases} \Rightarrow$



$(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)$ ~~$(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)$~~ $=(\varepsilon_{11},\varepsilon_{12},\varepsilon_{21},\varepsilon_{22})\begin{pmatrix} 1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&-1\\1&-1&0&0 \end{pmatrix} = T$

$\cancel{f(A,B)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)M(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)^T=(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)(T^{-1})M(T^{-1})^T(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)^T}$

$\begin{cases} A=x_1\varepsilon_{11}+x_2\varepsilon_{12}+x_3\varepsilon_{21}+x_4\varepsilon_{22}=(\varepsilon_{11},\varepsilon_{12},\varepsilon_{21},\varepsilon_{22})X \\ B=y_1\varepsilon_{11}+y_2\varepsilon_{12}+y_3\varepsilon_{21}+y_4\varepsilon_{22}=(\varepsilon_{11},\varepsilon_{12},\varepsilon_{21},\varepsilon_{22})Y \end{cases}$

~~又(η_{11},~~ $\begin{cases} A=\hat{x}_1\eta_1+\hat{x}_2\eta_2+\hat{x}_3\eta_3+\hat{x}_4\eta_4=(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)\hat{X} \\ B=\hat{y}_1\eta_1+\hat{y}_2\eta_2+\hat{y}_3\eta_3+\hat{y}_4\eta_4=(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)\hat{Y} \end{cases}$

又. $(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)=(\varepsilon_{11},\varepsilon_{12},\varepsilon_{21},\varepsilon_{22})T$

则. $X=T\hat{X}$. $Y=T\hat{Y}$.

$f(A,B)=\sum_{i\in I}\sum_{j\in I} f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)x_i y_i = \sum_{i,j\in I} m_{ij}x_i y_j$ $\quad I=\{1,2,3,4\}$ 记 $\begin{pmatrix}\varepsilon_{11}\\\varepsilon_{12}\\\varepsilon_{21}\\\varepsilon_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_2\\\varepsilon_3\\\varepsilon_4\end{pmatrix}$.

$=X^TMY=\hat{X}^T(T^TMT)\hat{Y}$. $\Rightarrow f(A,B)$在基$(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)$下

表示矩阵为 $T^TMT=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&-2\end{pmatrix}$.

8.(4) 由于$f(A,B)$在$\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$下的表示矩阵为$\begin{pmatrix}2&&&\\&2&&\\&&2&\\&&&-2\end{pmatrix}$,故满秩

9. V 是 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间，$f(\alpha,\beta)$ 是 V 上双线性函数

要证：$f(\alpha,\beta)$ 满秩 $\overset{?}{\Leftrightarrow}$ "$f(\alpha,\beta)=0, \forall\beta\in V \Rightarrow \alpha=0$"

① 而 $\Updownarrow$ $\Uparrow$

相合标准型理论 $\rightarrow$ $f(\alpha,\beta)$ 在 $V\times V$ 的某组基下表示矩阵为 I_n $\Leftrightarrow$ $f(\alpha,\beta)=\hat{\alpha}^T I_n \hat{\beta}=\hat{\alpha}^T\hat{\beta}$.

~~存在~~ $\hat{\alpha},\hat{\beta}$ 表示 α,β 在该基下的该坐标列向量

② 若 $f(\alpha,\beta)$ 不满秩，~~且 $f(\alpha,\beta)=0\ \forall\beta\in V\Rightarrow\alpha$~~

则 $f(\alpha,\beta)$ 在 $V\times V$ 的某组基下表示矩阵为 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. $0\le r\le n-1$

则 $\underset{\forall\beta.}{f(\alpha,\beta)=0} \Leftrightarrow \underset{\forall\beta}{\alpha^T\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\beta=0} \Leftrightarrow \underset{\forall\beta.}{\alpha_r^T\beta_r=0}$. ($\alpha_r,\beta_r$ 表示 α,β 在前 r ~~列~~ 行的坐标)

$\Rightarrow \alpha_r^T\beta_r=0, \forall\beta_r\in\mathbb{K}^r$, 取 $\beta_r=\alpha_r \Rightarrow \alpha_r^T\alpha_r=0 \Rightarrow \alpha_r\equiv 0$. 但 α_r 后 $n-r$ 列可任意取值，故 $f(\alpha,\beta)=0.\ \forall\beta\in V \not\Rightarrow \alpha=0$. $\square$

10. 利用第9题结论：只需证："$\overset{n}{\cancel{\mathrm{Tr}(A,B)}}$ $\mathrm{Tr}(AB) = 0 \ \forall B \in M_n(\mathbb{K}) \Rightarrow A = 0$"

考虑A的有理标准型分解：$A = P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q \Rightarrow \mathrm{Tr}\left(P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} QB\right)$ $\quad 0 \le r \le n$

$= \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} QBP\right)$. ~~B遍历 $M_n(\mathbb{K})$ 时，QBP也遍历 $M_n(\mathbb{K})$~~.

故 $\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} QBP\right) = 0 \ \forall B \in M_n(\mathbb{K})$. 取 $B = Q^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \Rightarrow \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow r = 0$

$\Rightarrow A = 0$ □.

12. (1) $f(\alpha,\beta) = \alpha^T \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \beta \rightarrow \det \neq 0. \Rightarrow$ 满秩，~~不对称~~ 反对称

(3) $f(\alpha,\beta) = \alpha^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \beta \rightarrow \det = 0$ 不满秩. ~~不对称~~ 反对称

18. ① 证明 $L(M), R(M)$ 是 V子空间

显然 $0 \in L(M)$. 若 $\alpha_1, \alpha_2 \in L(M)$. 则 $f(\alpha_i, \beta) = 0.\ \forall \beta \in M.\ i = 1, 2.$

$\Rightarrow \begin{cases} f(k\alpha_1, \beta) = kf(\alpha_1, \beta),\ \forall k \in \mathbb{K},\ \alpha_1 \in L(M) \\ f(\alpha_1 + \alpha_2, \beta) = f(\alpha_1, \beta) + f(\alpha_2, \beta) = 0.\ \forall \alpha_1, \alpha_2 \in L(M) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k\alpha_1 \in L(M) \\ \alpha_1 + \alpha_2 \in L(M) \end{cases} \Rightarrow L(M)$ 是 V子空间

同理：$R(M)$ 也是V子空间.

② 若 $f(\alpha,\beta)$ 是 V内满秩双线性函数. 则存在 $V \times V$ 上一组基. 使 $f(\alpha,\beta)$ 在这组基下表示矩阵为 I_n（由有理标准型理论）. 故 $f(\alpha,\beta) = \alpha^T\beta$.

Step 1: Goal: $L(M) = R(M)$.

若 $\alpha \in L(M)$. 则 $\alpha^T\beta = 0.\ \forall \beta \in M$. 则(两边取转置): $\beta^T\alpha = 0 \Rightarrow \alpha \in R(M)$

~~同理若 $\alpha \in R(M)$~~ 故 $L(M) \subseteq R(M)$. 同理：$R(M) \subseteq L(M)$. 故 $L(M) = R(M)$ □

Step 2: Goal: $V = L(M) \oplus M$.

考虑V在M中的基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r$, $\dim M = r$. 扩充成 V的基 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r, \varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_n$

$\forall v \in V.$, $v = \sum_{i=1}^{n} c_i \varepsilon_i$. $c_i \in \mathbb{K}$. 下证：$\sum_{i=r+1}^{n} c_i \varepsilon_i \in L(M)$

这是因为 $\left(\sum_{i=r+1}^{n} c_i \varepsilon_i\right)^T \left(\sum_{i=1}^{r} c_i \varepsilon_i\right)$ 中的项都是 $\varepsilon_i^T \varepsilon_j = 0\ (r+1 \le i \le n,\ 1 \le j \le r.)$ 故 $\sum_{i=r+1}^{n} c_i \varepsilon_i \in L(M)$

故 $V = L(M) + M$

再证：$L(M) \cap M = \{0\}$.

若 $\alpha \in L(M) \cap M$. 则 $\alpha^T\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ □

~~Step 3~~ 故 $\underset{n}{\underset{\parallel}{\dim V}} = \dim L(M) + \dim M = \dim R(M) + \dim M$

③. ~~$\forall\alpha\in M$. $L(M)\ni$~~ 要证：$R(L(M)) = L(R(M)) = M$.

~~$\forall\alpha\in M$. $\beta\in L(M)$. 有~~ 由②可知：$V = L(M)\oplus M = R(M)\oplus M$

~~$\forall\alpha\in M$ $\beta\in L(M)$~~ $= R(L(M))\oplus L(M) = L(R(M))\oplus R(M)$

由于 $R(L(M))$, $L(R(M))$ 都是子空间，故 $R(L(M)) = L(R(M)) = M$ $\square$.

20. 反证：若 $f(\alpha)\neq 0$. 且 $g(\alpha)\neq 0$. 则 $\exists\alpha_1,\alpha_2\in V$. s.t. $f(\alpha_1)\neq 0$, $g(\alpha_2)\neq 0$
$(\alpha_1,\alpha_2\neq 0)$

① 若. $\alpha_2 = k\alpha_1$. $k\in\mathbb{K}^*$. 则 $g(\alpha_2) = kg(\alpha_1)\neq 0 \Rightarrow g(\alpha_1)\neq 0$

$\Rightarrow f(\alpha_1)g(\alpha_1) = 0$. 矛盾！

②. $\alpha_2\neq k\alpha_1$. $\forall k\in\mathbb{K}^*$. 由于 $f(\alpha_1)\neq 0$. $g(\alpha_2)\neq 0$. 但 $f(\alpha_1)g(\alpha_1) = f(\alpha_2)g(\alpha_2) = 0$

故 $g(\alpha_1) = f(\alpha_2) = 0$. 故 $f(\alpha_1+\alpha_2)g(\alpha_1+\alpha_2) = (f(\alpha_1)+f(\alpha_2))(g(\alpha_1)+g(\alpha_2))$

$= f(\alpha_1)\cdot g(\alpha_1) + f(\alpha_1)g(\alpha_2) + f(\alpha_2)g(\alpha_1) + f(\alpha_2)g(\alpha_2) = f(\alpha_1)g(\alpha_2)\neq 0$. 矛盾！ $\square$

习题二：(1). $f = -2x_1^2 - x_2^2 + x_1x_3 - x_2x_3$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

(2). $f = -x_1x_3 - 2x_1x_4 + x_3^2 - 5x_3x_4$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{5}{2} \\ -1 & 0 & -\frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

(3). $f = 2x_1^2 - 3x_2^2 - 4x_3^2 - 5x_4^2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

(4). $f = -x_2^2 - x_3^2 + x_1x_4$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$