2.零矩阵的极小多项式$m(\lambda)=\lambda$;单位矩阵的极小多项式$m(\lambda)=\lambda-1$

3.(1)$A=\begin{pmatrix}3&1&-1\\0&2&0\\1&1&1\end{pmatrix}$,考虑$A-\lambda I=\begin{pmatrix}3-\lambda&1&-1\\0&2-\lambda&0\\1&1&1-\lambda\end{pmatrix}$,$|A-\lambda I|=-(\lambda-2)^3$

$A-2I=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\1&1&-1\end{pmatrix}$,$r(A-2I)=1$.故有一个2阶$Jordan$块

A的$Jordan$标准型为$\begin{pmatrix}2&&\\&2&1\\&&2\end{pmatrix}$,它的极小多项式为$(\lambda-2)^2$

3.(2)$A=\begin{pmatrix}4&-2&2\\-5&7&-5\\-6&7&-4\end{pmatrix}$,考虑$A-\lambda I=\begin{pmatrix}4-\lambda&-2&2\\-5&7-\lambda&-5\\-6&7&-4-\lambda\end{pmatrix}$,$|A-\lambda I|=-(\lambda-2)(\lambda^2-5\lambda+11)$无重根

故A的极小多项式为$(\lambda-2)(\lambda^2-5\lambda+11)$

3.(3)$A=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}_{n\times n}$ 有唯一非0特征值n,$r(A)=1$,故A的$Jordan$标准型为$\operatorname{diag}\{n,0,\cdots,0\}$

它的最小多项式为$\lambda(\lambda-n)$

4.A的$Jordan$块只有块(a),故A的$Jordan$标准型为aE,A相似于aE,故$A=aE$

5.$\boldsymbol{A}^{n-2}X=J^{n-2}X$,对于$X=E$,$\boldsymbol{A}^{n-2}X\neq 0$,但是$\boldsymbol{A}^{n-1}X=J^{n-1}X$,$\forall X\in M_n(\mathbb{K})$,故$\boldsymbol{A}^{n-1}=0$

因此$\boldsymbol{A}$的最小多项式$m(\lambda)=\lambda^{n-1}$.

6.容易验证:$\begin{pmatrix}A&\\&B\end{pmatrix}$的最小多项式$m(\lambda)=lcd(\varphi(\lambda),\psi(\lambda))$.

首先$lcd(\varphi(A),\psi(A))=0$,$lcd(\varphi(B),\psi(B))=0$,故$\begin{pmatrix}A&\\&B\end{pmatrix}$的最小多项式$m(\lambda)|lcd(\varphi(\lambda),\psi(\lambda))$

其次若$\deg m(\lambda)<\deg lcd(\varphi(\lambda),\psi(\lambda))$,必有$\varphi(\lambda),\psi(\lambda)$之一不整除$m(\lambda)$.

由最小多项式性质,必有A,B之一不适合$m(\lambda)$.因此,$m(A),m(B)$不全为0,$m\begin{pmatrix}A&\\&B\end{pmatrix}\neq 0$.矛盾!

7.$A=\begin{bmatrix}0&\cdots&0&-a_n\\1&\ddots&\vdots&\vdots\\&\ddots&0&-a_2\\0&&1&-a_1\end{bmatrix}$,考察$A$对应的线性变换$\varphi$

$e_1\xrightarrow{\varphi}e_2\xrightarrow{\varphi}\cdots\xrightarrow{\varphi}e_{n-1}\xrightarrow{\varphi}e_n\xrightarrow{\varphi}-a_ne_1-a_{n-1}e_2-\cdots-a_2e_{n-1}-a_1e_n$

$\varphi^n(e_1)=-a_ne_1-a_{n-1}e_2-\cdots-a_2e_{n-1}-a_1e_n=-a_ne_1-a_{n-1}\varphi(e_1)-\cdots-a_2\varphi^{n-2}(e_1)-a_1\varphi^{n-1}(e_1)$

$=-(a_n+a_{n-1}\varphi+\cdots+a_1\varphi^{n-1})(e_1)\Rightarrow(a_n+a_{n-1}\varphi+\cdots+a_1\varphi^{n-1}+\varphi^n)(e_1)=0$.

因为$e_1\neq 0$,所以$a_n+a_{n-1}\varphi+\cdots+a_1\varphi^{n-1}+\varphi^n=0$,于是$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$是$\varphi$适合的一个多项式.

φ的极小多项式$m(x)|f(x)$.假设$\deg m(x)\leq n-1$,设$m(x)=b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\cdots+b_n$

故$m(\varphi)=0\Rightarrow m(\varphi)(e_1)=0\Rightarrow b_1e_n+b_2e_{n-1}+\cdots+b_ne_1=0$,由于$e_1,e_2,\cdots,e_n$线性无关,故$b_i=0$,$\forall 1\leq i\leq n$

矛盾!故$\deg m(x)\geq n$,故$m(x)=f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$.

8. (1) 对于数域$\mathbb{K}$上n维线性空间V内的线性变换$\boldsymbol{A}$在基$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$下的表示矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}_{n\times n}, B=\begin{pmatrix} \lambda_1 & -1 & & \\ & \lambda_1 & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ & & & \lambda_1 \end{pmatrix}_{k\times k}, C=\begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & 1 & & \\ & \lambda_2 & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & \lambda_2 \end{pmatrix}_{(n-k)\times(n-k)}$$

$$\varepsilon_k \xrightarrow{\boldsymbol{A}-\lambda_1 I_k} -\varepsilon_{k-1} \xrightarrow{\boldsymbol{A}-\lambda_1 I_k} \varepsilon_{k-2} \xrightarrow{\boldsymbol{A}-\lambda_1 I_k} \cdots \xrightarrow{\boldsymbol{A}-\lambda_1 I_k} (-1)^{k-1}\varepsilon_1 \xrightarrow{\boldsymbol{A}-\lambda_1 I_k} 0$$

记$t=n-k$

①$t=2m+2, m\in\mathbb{N}$时，有

$$\varepsilon_{k+2m+2} \xrightarrow{\boldsymbol{A}-\lambda_2 I_{n-k}} \varepsilon_{k+2m} \xrightarrow{\boldsymbol{A}-\lambda_2 I_{n-k}} \cdots \xrightarrow{\boldsymbol{A}-\lambda_2 I_{n-k}} \varepsilon_{k+2} \xrightarrow{\boldsymbol{A}-\lambda_2 I_{n-k}} 0$$

$$\varepsilon_{k+2m+1} \xrightarrow{\boldsymbol{A}-\lambda_2 I_{n-k}} \varepsilon_{k+2m-1} \xrightarrow{\boldsymbol{A}-\lambda_2 I_{n-k}} \cdots \xrightarrow{\boldsymbol{A}-\lambda_2 I_{n-k}} \varepsilon_{k+1} \xrightarrow{\boldsymbol{A}-\lambda_2 I_{n-k}} 0$$

②$t=2m+1, m\in\mathbb{N}$时，有

$$\varepsilon_{k+2m+1} \xrightarrow{\boldsymbol{A}-\lambda_2 I_{n-k}} \varepsilon_{k+2m-1} \xrightarrow{\boldsymbol{A}-\lambda_2 I_{n-k}} \cdots \xrightarrow{\boldsymbol{A}-\lambda_2 I_{n-k}} \varepsilon_{k+1} \xrightarrow{\boldsymbol{A}-\lambda_2 I_{n-k}} 0$$

$$\varepsilon_{k+2m} \xrightarrow{\boldsymbol{A}-\lambda_2 I_{n-k}} \varepsilon_{k+2m-2} \xrightarrow{\boldsymbol{A}-\lambda_2 I_{n-k}} \cdots \xrightarrow{\boldsymbol{A}-\lambda_2 I_{n-k}} \varepsilon_{k+2} \xrightarrow{\boldsymbol{A}-\lambda_2 I_{n-k}} 0$$

于是我们得到基$(-1)^{k-1}\varepsilon_1,(-1)^{k-2}\varepsilon_2,\cdots,-\varepsilon_{k-1},\varepsilon_k;\varepsilon_{k+1},\varepsilon_{k+3},\cdots,\varepsilon_{2\left[\frac{n-k-1}{2}\right]+k+1};\varepsilon_{k+2},\varepsilon_{k+4},\cdots,\varepsilon_{2\left[\frac{n-k}{2}\right]+k}$

在这组基下，$\boldsymbol{A}$的表示矩阵(Jordan标准型)为$\operatorname{diag}\left\{J_k(\lambda_1),J_{\left[\frac{n-k-1}{2}\right]+1}(\lambda_2),J_{\left[\frac{n-k}{2}\right]}(\lambda_2)\right\}$

(2) 从$\boldsymbol{A}$的Jordan标准型，结合$\left[\dfrac{n-k-1}{2}\right]+1\geq\left[\dfrac{n-k}{2}\right]$，可以看出：

①$\lambda_1=\lambda_2$时

$\boldsymbol{A}$的最小多项式为$(\lambda-\lambda_1)^{\max\left\{k,\left[\frac{n-k-1}{2}\right]+1\right\}}$

②$\lambda_1\neq\lambda_2$时

$\boldsymbol{A}$的最小多项式为$(\lambda-\lambda_1)^k(\lambda-\lambda_2)^{\left[\frac{n-k-1}{2}\right]+1}$