DATE　　　　PAGE

6. 引理：$g(x)$是矩阵A适合的一个首一多项式，~~因不同~~在复数域上无重根，证明：A可对角化

引理证明：考虑g在复数域上的分解，$g(x)=(x-a_1)\cdots(x-a_m)$，其中$a_i\neq a_j\ (i\neq j)$。

Step 1：Goal：$\mathbb{C}^n=\operatorname{Ker}(A-a_1I_n)+\operatorname{Ker}(A-a_2I_n)+\dots+\operatorname{Ker}(A-a_mI_n)$

考虑$g_i(x)=\prod\limits_{j\neq i}(x-a_j)$，则有$(g_1(x),g_2(x),\dots,g_m(x))=1$

故$\exists\, u_i\in\mathbb{C}[x]$. s.t. $u_1(x)g_1(x)+\dots+u_m(x)g_m(x)=1$

用A代替x，则有：$u_1(A)g_1(A)+\dots+u_m(A)g_m(A)=I_n$

故　$u_1(A)g_1(A)\alpha+\dots+u_m(A)g_m(A)\alpha=\alpha.\quad\forall\alpha\in\mathbb{C}^n\quad\text{---}(*)$

则　$(A-a_iI_n)\,u_i(A)g_i(A)\alpha=g(A)\,u_i(A)\alpha=0.$

$\Rightarrow\quad u_i(A)g_i(A)\alpha\in\operatorname{Ker}(A-a_iI_n),\quad\forall i$

$\Rightarrow\quad\mathbb{C}^n=\operatorname{Ker}(A-a_1I_n)+\operatorname{Ker}(A-a_2I_n)+\dots+\operatorname{Ker}(A-a_mI_n)$

Step 2：Goal：$\mathbb{C}^n=\operatorname{Ker}(A-a_1I_n)\oplus\operatorname{Ker}(A-a_2I_n)\oplus\dots\oplus\operatorname{Ker}(A-a_mI_n)$

任取$\alpha\in\operatorname{Ker}(A-a_1I_n)\cap\left(\operatorname{Ker}(A-a_2I_n)+\dots+\operatorname{Ker}(A-a_mI_n)\right)\subset\operatorname{Ker}(A-a_2I_n)+\dots+\operatorname{Ker}(A-a_mI_n)$

则α可以写成$\alpha=\alpha_2+\dots+\alpha_m$，其中$\alpha_i\in\operatorname{Ker}(A-a_iI_n)\ (i\geq 2)$

由$(*)$：$\alpha=u_1(A)g_1(A)(\alpha_2+\dots+\alpha_m)+u_2(A)g_2(A)\alpha+\dots+u_m(A)g_m(A)\alpha=0$

这是因为：$g_1(A)\alpha_2=g_1(A)\alpha_3=\dots=g_1(A)\alpha_m=0$

$g_2(A)\alpha=(A-a_3I_n)\cdots(A-a_mI_n)(A-a_1I_n)\alpha=0\quad\cdots$

故　$\operatorname{Ker}(A-a_1I_n)\cap\left(\operatorname{Ker}(A-a_2I_n)+\dots+\operatorname{Ker}(A-a_mI_n)\right)=\{0\}$

同理：$\operatorname{Ker}(A-a_iI_n)\cap\left(\sum\limits_{j\neq i}\operatorname{Ker}(A-a_jI_n)\right)=\{0\}\quad\forall i$

综上：$\mathbb{C}^n=\operatorname{Ker}(A-a_1I_n)\oplus\dots\oplus\operatorname{Ker}(A-a_mI_n)$

由于A适合$g(x)$，故A的特征值也适合$g(x)$，从而只能是$a_1,\dots,a_m$中的一部分，剔除等于$\{0\}$的直和分量，从而A可对角化。

回到原题：由于$A^k=E$，故$g(x)=x^k-1$是A适合的一个多项式，所有根为ω_k^i：$i=0,1,\dots,k-1$，无重根，由引理，A相似于对角矩阵。（在复数域上）

我们用初等因子来计算第六题中的 Jordan 标准型

6. 求矩阵的 Jordan 分解.

(1) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 4 & \lambda-4 & 0 \\ 2 & -1 & \lambda-2 \end{bmatrix}$ ~~它的行列式因子为 $\lambda, (\lambda-2)^2, (\lambda-2)^3$~~

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{\lambda}{2}-1 \\ 4 & \lambda-4 & 0 \\ \lambda & -1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{\lambda}{2}-1 \\ 0 & \lambda-2 & 4-2\lambda \\ 0 & \frac{\lambda}{2}-1 & \lambda-\frac{\lambda^2}{2} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{\lambda}{2}-1 \\ 0 & \lambda-2 & 4-2\lambda \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda^2}{2}+2\lambda-2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-2)^2 \end{bmatrix}$$

故其不变因子组为. $1, \lambda-2, (\lambda-2)^2$. 其初等因子组为 $\lambda-2, (\lambda-2)^2$.

故 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ 的 Jordan 标准型为 $\begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix}$.

(3). $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{bmatrix}$ $\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda-1 & 3 & -3 \\ 2 & \lambda+6 & -13 \\ 1 & 4 & \lambda-8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & \lambda-8 \\ 2 & \lambda+6 & -13 \\ \lambda-1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & \lambda-8 \\ 0 & \lambda-2 & 3-2\lambda \\ 0 & 7-4\lambda & -\lambda^2+9\lambda-11 \end{bmatrix}$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 4 & \lambda-8 \\ 0 & \lambda-2 & 3-2\lambda \\ 0 & -1 & -\lambda^2+2\lambda+1 \end{bmatrix} \to \cancel{\begin{bmatrix} 1 & 4 & \lambda-8 \\ 0 & 1 & \lambda^2-5\lambda-1 \\ 0 & \lambda-2 & 3-\lambda \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & \lambda-8 \\ & 1 & \lambda^2-5\lambda-1 \\ & & -\lambda^3+7\lambda^2-10\lambda-2 \end{bmatrix} \to}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 4 & \lambda-8 \\ 0 & 1 & \lambda^2-\lambda-1 \\ 0 & \lambda-2 & 3-2\lambda \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & \lambda-8 \\ 0 & 1 & \lambda^2-\lambda-1 \\ 0 & 0 & -\lambda^3+3\lambda^2-3\lambda+1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)^3 \end{bmatrix}$$

故 A 的初等因子组为 $(\lambda-1)^3$. 故 A 的 Jordan 标准型为 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(5). $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\lambda I - A$ $\begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1-\lambda & 0 & 0 \end{bmatrix}$

DATE.　　PAGE.

(5) $A=\begin{bmatrix}3&-1&0&0\\1&1&0&0\\3&0&5&-3\\4&-1&3&-1\end{bmatrix}$ $\quad A-\lambda I=\begin{bmatrix}3-\lambda&-1&0&0\\1&1-\lambda&0&0\\3&0&5-\lambda&-3\\4&-1&3&-1-\lambda\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1-\lambda&0&0\\0&(\lambda-2)^2&0&0\\0&3\lambda-3&5-\lambda&-3\\0&4\lambda-5&3&-1-\lambda\end{bmatrix}$

$$\to\begin{bmatrix}1&1-\lambda&0&0\\0&3\lambda-3&5-\lambda&-3\\0&12\lambda-15&9&-3-3\lambda\\0&3\lambda^2-12\lambda+12&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&3\lambda-3&5-\lambda&-3\\0&-3&4\lambda-11&9-3\lambda\\0&3&\lambda^2-8\lambda+15&3(\lambda-3)\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&-\lambda^3+9\lambda^2-24\lambda+20&-3(\lambda-2)^2\\0&0&\lambda^2-4\lambda+4&0\\0&3&\lambda^2-8\lambda+15&3(\lambda-3)\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&&&\\&3&\lambda^2-8\lambda+15&3(\lambda-3)\\&&-\lambda^3+9\lambda^2-24\lambda+20&-3(\lambda-2)^2\\&&(\lambda-2)^2&\cancel{(\lambda-2)^2}\end{bmatrix}=\cancel{\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&(\lambda-2)^2&\\&&&(\lambda-2)^2(\lambda-5)\end{bmatrix}}$$

~~故A的初等因子组为 $(\lambda-2)^2$, $(\lambda-2)^2$, $(\lambda-5)$~~

$$\to\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&(\lambda-2)^2(\lambda-5)&3(\lambda-2)^2\\&&(\lambda-2)^2&\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&0&(\lambda-2)^2\\&&(\lambda-2)^2&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&(\lambda-2)^2&\\&&&(\lambda-2)^2\end{bmatrix}$$

故A的初等因子组为 $(\lambda-2)^2$, $(\lambda-2)^2$. 故A的Jordan标准型为 $\begin{bmatrix}2&1&&\\&2&&\\&&2&1\\&&&2\end{bmatrix}$.

(7) 由第7题的结论: $\begin{bmatrix}1&-1&&\\&1&\ddots&\\&&\ddots&-1\\&&&1\end{bmatrix}$ 的$Jordan$标准型为$J_n(-1)$

$7.a_{12},a_{23},\cdots,a_{n-1,n}$是非零复数，求矩阵$\begin{bmatrix} a & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & a & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & a_{n-1,n} \\ & & & & a \end{bmatrix}$的$Jordan$标准型

我们考虑用初等因子的方法

$A-\lambda I=\begin{bmatrix} a-\lambda & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & a-\lambda & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & a_{n-1,n} \\ & & & & a-\lambda \end{bmatrix}$,$A$的行列式因子记为$D_k(\lambda)$,显然$D_n(\lambda)=(\lambda-a)^n$

注意到$A-\lambda I$前$n-1$行,前$n-1$列构成的子式行列式为$(a-\lambda)^{n-1}$.

$A-\lambda I$前$n-1$行,后$n-1$列构成的子式行列式记为$g(\lambda)$.

注意到$g(a)$是一个上三角矩阵的行列式,为$a_{12}a_{23}\cdots a_{n-1,n}\neq 0$.

所以$\lambda-a$不是$g(\lambda)$的因数,$(g(\lambda),\lambda-a)=1$,又$g(\lambda)|(\lambda-a)^n$,故$g(\lambda)=1$

于是A的行列式因子为$1,1,\cdots,(\lambda-a)^n$,它的不变因子为$1,1,\cdots,(\lambda-a)^n$,故它的初等因子为$(\lambda-a)^n$

于是$\begin{bmatrix} a & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & a & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & a_{n-1,n} \\ & & & & a \end{bmatrix}$的$Jordan$标准型为$J_n(a)=\begin{bmatrix} a & 1 & & & \\ & a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & a \end{bmatrix}$.

8. 求J^k的Jordan标准型.

若$k\geq n$. 则$J^k=0$为J^k的Jordan标准型, 若$k<n$. 设$n=mk+r$, $0\leq r<k$.

引理: λ_0为A的特征值, 则$\forall k$, 特征值为λ_0的k阶Jordan块$J_k(\lambda_0)$在A的Jordan标准型中出现个数为 $r((A-\lambda_0 I_n)^{k-1})+r((A-\lambda_0 I_n)^{k+1})-2r((A-\lambda_0 I_n)^k)$, 其中约定$r((A-\lambda_0 I_n)^{k-1})=n$.

引理证明: 设A的Jordan标准型为$diag\{J_{k_1}(\lambda_1),\dots,J_{k_s}(\lambda_s)\}$, 则$r(A-\lambda_0 I)^t)=\sum_{i=1}^{s}\cancel{r(A-\lambda_0)} r((J_{k_i}(\lambda_i)-\lambda_0 I)^t)$. $\lambda_0\neq\lambda_i$时$r((J_{k_i}(\lambda_i)-\lambda_0 I)^t)=r(J_{k_i}(\lambda_i)-\lambda_0 I)$, $\forall t$;

$\lambda_0=\lambda_i$时. $r((J_{k_i}(\lambda_i)-\lambda_0 I)^t)=\begin{cases}0, & t\geq k_i\\ k_i-t, & t<k_i\end{cases}$, 因此$r((J_{k_i}(\lambda_i)-\lambda_0 I)^{t-1})-r((J_{k_i}(\lambda_i)-\lambda_0 I)^t)$表示以$\lambda_0$为特征值且阶数大于等于$t$的Jordan块个数. 又因为$r((J_{k_i}(\lambda_i)-\lambda_0 I)^t)-r((J_{k_i}(\lambda_i)-\lambda_0 I)^{t+1})$表示以$\lambda_0$为特征值且阶数大于等于$(t+1)$的Jordan块个数, 故二者相减得到$r((J_{k_i}(\lambda_i)-\lambda_0 I)^{t+1})+r((J_{k_i}(\lambda_i)-\lambda_0 I)^{t-1})-2r((J_{k_i}(\lambda_i)-\lambda_0 I)^t)$表示阶数等于$t$, 以$\lambda_0$为特征值的Jordan块个数. □

因此, 我们分别考虑J^k中各个阶数~~(≤n-1)~~ Jordan块的个数.

首先$r((J^k)^m)=n-mk$ $r((J^k)^{m+1})=0$ $\Rightarrow$ $r((J^k)^p)=n-kp$. $\forall 1\leq p\leq m$; $r((J^k)^p)=0$. $\forall p\geq m+1$

对于q阶Jordan块: 它的阶数由引理可知, 为$r((J^k)^{q-1})+r((J^k)^{q+1})-2r((J^k)^q)=:N(q)$

① $1\leq q\leq m-1$时. $r((J^k)^{q-1})+r((J^k)^{q+1})-2r((J^k)^q)=(n-k(q-1))+(n-k(q+1))-2r(n-kq)=0$

② $q=m$时. $N(q)=(n-k(q-1))-2(n-kq)=kq+k-n=km+k-mk-r=k-r$

③ $q=m+1$时 $N(q)=(n-k(q-1))=n-mk=r$

④ $q\geq m+2$时 $N(q)=0$

综上: J^k的标准型含有 $k-r$ 个m阶Jordan块, r个$m+1$阶Jordan块

MULLA

9. 由于显然A和A'有完全相同的行列式因子, 故它们相似.

~~证明: $V=M\oplus V/M$.~~

11. $A|_M$在M中对应的矩阵相似于Jordan形矩阵. $\Rightarrow$存在M中的一组基$\{e_1,\dots,e_r\}$, 使得$A|_M$在这组基下表示矩阵为Jordan标准型. 同理: 存在V/M中的一组基$\{e_{r+1},\dots,e_n\}$, 使得~~A~~ $A|_{V/M}$在这组基下表示矩阵也为Jordan标准型.

对$\{e_1,\dots,e_r\}$, $\{e_{r+1},\dots,e_n\}$分别延拓到n维线性空间. 得到$\{\tilde{e}_1,\dots,\tilde{e}_r\}$ $\{\tilde{e}_{r+1},\dots,\tilde{e}_n\}$ 我们的延拓方式是对于$\{e_1,\dots,e_r\}$在尾部添上$n-r$个0. 对于$\{e_{r+1},\dots,e_n\}$在头部添上r个0. 得到的$\{\tilde{e}_1,\tilde{e}_2,\dots,\tilde{e}_n\}$显然线性无关, 构成$V$的一组基, 在这组基下, A表示矩阵为Jordan标准型. □

A在V内的Jordan标准型为$diag\{I_1,\dots,I_r,L_1,\dots,L_s\}$