

1. 若 $0, 0'$ 是 R 中的零元, 则 $0 = 0 \cdot 0' = 0'$

若 $1, 1'$ 是 R 中的单位元, 则 $1 = 1 \cdot 1' = 1'$. \square

2. 若 $a + b = 0 = a + c$, 则 $b = b + a + c = c$.

若 a 可逆, 则 $b \cdot a = 1 = a \cdot c \Rightarrow b = b \cdot a \cdot c = c \Rightarrow$ 左右逆元相等

若 $x \cdot a = 1 = y \cdot a$, 则右乘 a 的右逆 a_r^{-1} , 得到 $x \cdot a \cdot a_r^{-1} = y \cdot a \cdot a_r^{-1} \Rightarrow x = y$. \square

3. $ab \cdot b^{-1}a^{-1} = a \cdot 1 \cdot a^{-1} = a \cdot a^{-1} = 1$, 于是 ab 可逆, $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$. \square

4. $0 \cdot a = (a + (-a)) \cdot a \stackrel{\text{分配律}}{=} a \cdot a + (-a) \cdot a = a \cdot a + (-a \cdot a) = 0$

$(-1) \cdot a + a = (-1 + 1) \cdot a = 0 \cdot a = 0 \Rightarrow (-1) \cdot a = -a$. \square

5. 若 $1 = 0$, 任取 $a \in R$, 有 $a = 1 \cdot a = 0 \cdot a = 0$. 于是 $R = \{0\}$. \square