17. $(\boldsymbol{A}\alpha,\alpha)=(\alpha,\boldsymbol{A}^*\alpha)=(\alpha,\boldsymbol{A}\alpha)=\overline{(\boldsymbol{A}\alpha,\alpha)}\Rightarrow(\boldsymbol{A}\alpha,\alpha)\in\mathbb{R}$

18. $(\Rightarrow)$ 若$\boldsymbol{A}$正定厄尔米特，考虑$\boldsymbol{A}$的任一特征向量v，对应的特征值λ

有$\boldsymbol{A}v=\lambda v,(\boldsymbol{A}v,v)>0$，即$(\boldsymbol{A}v,v)=(\lambda v,v)=\lambda(v,v)=\lambda|v|^2>0\Rightarrow\lambda>0$.

故$\boldsymbol{A}$的特征值都为正数

$(\Leftarrow)$ 若$\boldsymbol{A}$的特征值都为正数，则$\boldsymbol{A}$在一组标准正交基下成对角阵

这组基由$\boldsymbol{A}$的全部特征向量组成，记为$v_1,\cdots,v_n$，对应特征值为$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$

$\boldsymbol{A}v_k=\lambda_k v_k,\forall k$，且$\lambda_k\in\mathbb{R}^+$.

于是$\forall\alpha\in V,\alpha$可以表示为$\sum_{k=1}^{n}c_k v_k,c_k\in\mathbb{C},\forall k$

于是$(\boldsymbol{A}\alpha,\alpha)=\left(\boldsymbol{A}\sum_{k=1}^{n}c_k v_k,\sum_{t=1}^{n}c_t v_t\right)=\sum_{t=1}^{n}\overline{c_t}\left(\boldsymbol{A}\sum_{k=1}^{n}c_k v_k,v_t\right)$

$$=\sum_{t=1}^{n}\overline{c_t}\left(\sum_{k=1}^{n}c_k\boldsymbol{A}v_k,v_t\right)=\sum_{t=1}^{n}\overline{c_t}\left(\sum_{k=1}^{n}c_k\lambda_k v_k,v_t\right)=\sum_{t=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k c_k\overline{c_t}(v_k,v_t)$$

$$\overset{\{v_k\}\text{标准正交}}{=}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k c_k\overline{c_k}(v_k,v_k)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k|c_k|^2|v_k|^2>0$$

故$\boldsymbol{A}$正定厄尔米特.

19. (i) 可逆厄尔米特变换无0特征值

任取$\boldsymbol{A}$的特征向量v，对应非0特征值λ

有$\boldsymbol{A}v=\lambda v$，则$\boldsymbol{A}^2v=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}v)=\boldsymbol{A}(\lambda v)=\lambda\boldsymbol{A}v=\lambda^2 v$

故$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda^2>0$，故$\boldsymbol{A}$的特征值都是正数

故$\boldsymbol{A}^2$是正定厄尔米特变换

(ii) 存在性：给定正定厄尔米特变换$\boldsymbol{A}$，则$\boldsymbol{A}$在一组标准正交基下成对角阵

这组基由$\boldsymbol{A}$的全部特征向量组成，记为$v_1,\cdots,v_n$，对应特征值为$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$

$\boldsymbol{A}v_k=\lambda_k v_k,\forall k$，且$\lambda_k\in\mathbb{R}^+$.

定义这样的正定厄尔米特变换$\boldsymbol{B}:\boldsymbol{B}v_k=\sqrt{\lambda_k}v_k$

就有$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^2$

唯一性：若$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{C}^2$，则$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})=0$

显然$\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$是正定厄尔米特变换，于是$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}=0$，即$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$

20. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*)^*\Rightarrow\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*$厄尔米特

$\boldsymbol{A}$可逆$\Rightarrow\boldsymbol{A}$无0特征值

任取$\boldsymbol{A}$的特征向量v，对应特征值λ

有$\boldsymbol{A}v=\lambda v,\boldsymbol{A}v=\bar{\lambda}v\Rightarrow\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*v=\boldsymbol{A}\left(\bar{\lambda}v\right)=\bar{\lambda}(\boldsymbol{A}v)=\bar{\lambda}\lambda v=|\lambda|^2v$

$|\lambda|^2>0$，故$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*$正定厄尔米特

21.$\boldsymbol{AB}$厄尔米特$\Leftrightarrow \boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{AB})^{*}\Leftrightarrow \boldsymbol{AB}=\boldsymbol{B}^{*}\boldsymbol{A}^{*}=\boldsymbol{BA}$

23.(1) (2) $\Rightarrow$ (3):$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{*},\boldsymbol{AA}^{*}=\boldsymbol{E}\Rightarrow \boldsymbol{A}^{2}=\boldsymbol{AA}^{*}=\boldsymbol{E}$

(2) (3) $\Rightarrow$ (1):$\boldsymbol{AA}^{*}=\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}^{2}=\boldsymbol{E}\Rightarrow \boldsymbol{A}=\boldsymbol{AAA}^{*}=\boldsymbol{EA}^{*}=\boldsymbol{A}^{*}$

(3) (1) $\Rightarrow$ (2):$\boldsymbol{A}^{2}=\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{*}\Rightarrow \boldsymbol{AA}^{*}=\boldsymbol{A}^{2}=\boldsymbol{E}$

. 当 $A=BU$ 或 $B=UA$ 时

$$A=BU\Rightarrow A^{*}=U^{*}B^{*}\Rightarrow AA^{*}=BUU^{*}B^{*}=BB^{*}$$
$$B=UA\Rightarrow B^{*}=A^{*}U^{*}\Rightarrow B^{*}B=A^{*}U^{*}UA=A^{*}A$$

于是 $AA^{*}=BB^{*}$ 。由于 A,B 是正定厄尔米特变换, 故 $A=A^{*},B=B^{*}$.
于是 $A^{2}=B^{2}.\Rightarrow(A+B)(A-B)=0.$
考虑 $A-B$ 的任一列向量 α 。有 $(A+B)\alpha=0$ 。
由正定厄尔米特变换定义 $((A+B)\alpha,\alpha)=(A\alpha+B\alpha,\alpha)=(A\alpha,\alpha)+(B\alpha,\alpha)>0$(若 $\alpha\neq 0$)
然而 $((A+B)\alpha,\alpha)=(0,\alpha)=0$. 故 $\alpha=0$. 故 $A-B=0$. 故 $A=B$. 故 $U=E$

25.由矩阵的极分解可知:可逆线性变换$\boldsymbol{A}$可分解为$\boldsymbol{U}_2\boldsymbol{B}_2$,其中$\boldsymbol{B}_2$为正定$Hermite$变换,$\boldsymbol{U}_2$为酉变换.

于是$\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}_2^{*}\boldsymbol{B}_2=\boldsymbol{B}_2^{2}$是正定$Heimite$变换,由19题可知$\boldsymbol{B}_2$是唯一的.

同理可逆线性变换$\boldsymbol{A}$可分解为$\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{U}_1$,其中$\boldsymbol{B}_1$为正定$Hermite$变换,$\boldsymbol{U}_1$为酉变换,$\boldsymbol{B}_1$是唯一的.

26.只需证:A合同于I,因为A是正定$Hermite$型,这显然.

28.考虑矩阵开方问题,存在正定$Hermite$的A_1,半正定$Hermite$的B_1

使得$A=A_1^2,B=B_1^2$,于是$AB=A_1(A_1B_1)(A_1B_1)^{*}A_1^{-1}$,即$AB$相似于半正定的$(A_1B_1)(A_1B_1)^{*}$

12.($\Rightarrow$)是显然的.

($\Leftarrow$)考虑A的$Jordan$分解,由于每个二阶子式都可对角化,于是A的$Jordan$型没有

大于1阶的$Jordan$块,故A可相似对角化,故$A=V_{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus V_{\lambda_s}$

Check:$V_{\lambda_i}\perp V_{\lambda_j},\forall i,j$

任取$\alpha\in V_{\lambda_i},\beta\in V_{\lambda_j}$,考虑$V$的二维不变子空间$\langle\alpha,\beta\rangle$,$A|_{\langle\alpha,\beta\rangle}$是对角阵

由题目可知:$(\alpha,\beta)=0$.

由任意性可知:$V_{\lambda_1},\cdots,V_{\lambda_s}$两两正交,故$A$是$Hermite$型.