2024/2/28

4.设$A \in M_n(\mathbb{K})$,A幂零,在$M_n(\mathbb{K})$上定义线性变换:

$\varphi(X) = AX - XA$

证明:φ幂零

Pf:归纳易证:$\varphi^m(X) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k A^{m-k} X A^k, \forall m \in \mathbb{N}$

由于$A^n = 0$,取$m = 2n$,故A^{m-k}, A^k必有一个$= 0$

故$\varphi^m(X) = 0$,φ幂零

5.在$K[x]_n$内定义线性变换:

$\mathrm{D}x^k = kx^{k-1}, \mathrm{D}1 = 0$

证明:D循环幂零,并求它的一组循环基

Pf: ①D幂零:这显然,因为$\mathrm{D}^n\alpha = 0, \forall \alpha \in K[x]_n$

②D循环:显然$\langle \mathrm{D}^k x^n \rangle_{0 \le k \le n} = \langle x^k \rangle_{0 \le k \le n}$是$K[x]_n$的一组基

③$\langle \mathrm{D}^k x^n \rangle_{0 \le k \le n} = \left\langle \frac{n!}{k!} x^k \right\rangle_{0 \le k \le n}$就是它的一组循环基

8.$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$是$n$维线性空间$V$上的幂零线性变换,且$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$

证明:$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$幂零

Pf:显然$\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{B}^n = \boldsymbol{0}$,故$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k \boldsymbol{A}^k \boldsymbol{B}^{2n-k} = \boldsymbol{0}$,故$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$幂零

9.$\boldsymbol{A}$是n维线性空间V上的幂零线性变换

证明:$k\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}(k \ne 0)$可逆,并求逆

Pf:设$\boldsymbol{A}$的幂零系数为m

①我们先对$\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}$证明上述命题

$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}^l - \boldsymbol{A}^l = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}^{m-1} + \boldsymbol{E}^{m-2}\boldsymbol{A} + \cdots + \boldsymbol{E}\boldsymbol{A}^{m-2} + \boldsymbol{A}^{m-1})$

故$\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}$可逆,其逆为$(\boldsymbol{E}^{m-1} + \boldsymbol{E}^{m-2}\boldsymbol{A} + \cdots + \boldsymbol{E}\boldsymbol{A}^{m-2} + \boldsymbol{A}^{m-1})$

②用$k\boldsymbol{E}$代替$\boldsymbol{E}$,用$-\boldsymbol{A}$代替$\boldsymbol{A}$:

$k^m \boldsymbol{E}^m = (k\boldsymbol{E})^m - (-\boldsymbol{A})^l = (k\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A})[(k\boldsymbol{E})^{m-1} - (k\boldsymbol{E})^{m-2}\boldsymbol{A} + \cdots + (-1)^{m-2}(k\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}^{m-2} + (-1)^{m-1}\boldsymbol{A}^{m-1}]$

$\Rightarrow \boldsymbol{E} = (k\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A})[(k\boldsymbol{E})^{m-1} - (k\boldsymbol{E})^{m-2}\boldsymbol{A} + \cdots + (-1)^{m-2}(k\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}^{m-2} + (-1)^{m-1}\boldsymbol{A}^{m-1}]k^{-m}$

故$k\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}$可逆,其逆为$[(k\boldsymbol{E})^{m-1} - (k\boldsymbol{E})^{m-2}\boldsymbol{A} + \cdots + (-1)^{m-2}(k\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}^{m-2} + (-1)^{m-1}\boldsymbol{A}^{m-1}]k^{-m}$

即$\sum_{i=0}^{m-1} (-k)^{-i} \boldsymbol{A}^i$

2024/3/1

2.$\boldsymbol{A}$的特征子空间V_0维数为k,选取V_0的一组基$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_k\}$,$\boldsymbol{A}\alpha_i=0$

考虑$\boldsymbol{A}|_{V/V_0}$,显然是幂零变换,由命题1.4:存在V/V_0的一组基$\{\beta_1,\cdots,\beta_{n-k}\}$

使$\boldsymbol{A}|_{V/V_0}$在这组基上表示矩阵为特征值为0的$jordan$标准型,又$V=V_0\oplus V/V_0$

故$\boldsymbol{A}$在$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_k,\beta_1,\cdots,\beta_{n-k}\}$基下的表示矩阵为$A=\begin{pmatrix}0 & \\ & J_{n-k}(0)\end{pmatrix}$

故$A^{n-k+1}=\begin{pmatrix}0 & \\ & J_{n-k}^{n-k+1}(0)\end{pmatrix}=0$,故$\boldsymbol{A}^{n-k+1}=\boldsymbol{0}$

3.①$A=\begin{bmatrix}0 & -3 & 3\\ -2 & -7 & 13\\ -1 & -4 & 7\end{bmatrix}$

经过计算$\boldsymbol{A}$的特征值全为0,故$\boldsymbol{A}$是幂零线性变换.

$A^2\neq 0$,$A^3=0$,故$\boldsymbol{A}$是循环幂零线性变换.

②$A=\begin{bmatrix}3 & 6 & -15\\ 1 & 2 & -5\\ 1 & 2 & -5\end{bmatrix}$

经过计算$\boldsymbol{A}$的特征值全为0,故$\boldsymbol{A}$是幂零线性变换.

$A^2=0$,$A^3=0$,故$\boldsymbol{A}$不是循环幂零线性变换.

6.$\boldsymbol{A}\varepsilon_1=0$,$\boldsymbol{A}\varepsilon_2=\varepsilon_1,\cdots,\boldsymbol{A}\varepsilon_n=\varepsilon_{n-1}$,考虑$\boldsymbol{A}$的所有不变子空间构成的集合$\mathscr{A}$.

显然$\{0\},V\in\mathscr{A}$,$\langle\varepsilon_1\rangle\in\mathscr{A}$.

对于线性空间$U\in\mathscr{A}$,若$\varepsilon_k\in U,k\geq 2$,则$\varepsilon_{k-1}=\boldsymbol{A}\varepsilon_k\in U,\ \cdots,\varepsilon_1\in U$

故$\mathscr{A}=\{\{0\},\langle\varepsilon_1\rangle,\langle\varepsilon_1,\varepsilon_2\rangle,\cdots,\langle\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n\rangle\}$

7.α,β线性无关,是$\boldsymbol{A}$的特征向量,故$\langle\alpha,\beta\rangle\subset\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{A}$,故$\dim\,\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{A}\geq 2$,故$\dim\,\mathrm{Im}\,A\leq n-2$

而$\boldsymbol{A}$循环幂零$\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$在某组基下表示矩阵为$J_n(0)\Rightarrow\dim\,\mathrm{Im}\,A=n-1$,矛盾!

故$\boldsymbol{A}$不是循环幂零线性变换.