9. 判断下面所定义的变换哪些是线性的，哪些则不是：

(1) 在线性空间 V 中，$\boldsymbol{A}\xi=\xi+\alpha$，其中 $\alpha\in V$ 是一个固定的向量；

(2) 在线性空间 V 中，令 $\boldsymbol{A}\xi=\alpha$，其中 $\alpha\in V$ 是一个固定的向量；

(3) 在 K^3 中，令 $\boldsymbol{A}(x_1,x_2,x_3)=(x_1^2,x_2+x_3,x_3^2)$；

(4) 在 K^3 中，令 $\boldsymbol{A}(x_1,x_2,x_3)=(2x_1-x_2,x_2+x_3,x_1)$；

(5) 在 $K[x]$中，令 $\boldsymbol{A}f(x)=f(x+1)$；

(6) 在 $K[x]$中，令 $\boldsymbol{A}f(x)=f(x_0)$，其中 $x_0\in K$ 是一个固定的数；

(7) 把复数域看做复数域上的线性空间，令 $\boldsymbol{A}\xi=\bar{\xi}$；

(8) 在 $M_n(K)$中，令 $\boldsymbol{A}(X)=BXC$，其中 B,C 是 K 上两个固定的 n 阶方阵.

$9.(3)$对于$A(x_1,x_2,x_3)=(x_1^2,x_2+x_3,x_3^2)$

$A(x_1,x_2,x_3)+A(y_1,y_2,y_3)=(x_1^2+y_1^2,x_2+x_3+y_2+y_3,x_3^2+y_3^2)$

$A(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3)=((x_1+y_1)^2,x_2+x_3+y_2+y_3,(x_3+y_3)^2)$

不恒等于$A(x_1,x_2,x_3)+A(y_1,y_2,y_3)$

$\Rightarrow A$不是线性变换

$9.(4)$对于$A(x_1,x_2,x_3)=(2x_1-x_2,x_2+x_3,x_1)$

$\bullet A(x_1,x_2,x_3)+A(y_1,y_2,y_3)=(2x_1-x_2+2y_1-y_2,x_2+x_3+y_2+y_3,x_1+y_1)$

$A(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3)=(2x_1-x_2+2y_1-y_2,x_2+x_3+y_2+y_3,x_1+y_1)$

$=A(x_1,x_2,x_3)+A(y_1,y_2,y_3)$

$\bullet A(kx_1,kx_2,kx_3)=(2kx_1-kx_2,kx_2+kx_3,kx_1)=k(2x_1-x_2,x_2+x_3,x_1)$

$\Rightarrow A$是线性变换

$9.(5)$对于$Af(x)=f(x+1)$

$\bullet$考虑到$f(x)\in K[x]\Rightarrow kf(x)\in K[x]$,因此$Akf(x)=kf(x+1)$

$\bullet f(x)\in K[x],g(x)\in K[x]$

$h(x)\triangleq f(x)+g(x)\in K[x]$

$\Rightarrow Ah(x)=h(x+1)=f(x+1)+g(x+1)$

$\Rightarrow A[f(x)+g(x)]=f(x+1)+g(x+1)$

因此，A是线性变换

$9.(6)$对于$Af(x)=f(x_0)$

$\bullet$考虑到$f(x)\in K[x]\Rightarrow kf(x)\in K[x]$,因此$Akf(x)=kf(x_0)$

$\bullet Af(x)+Af(y)=f(x_0)+f(x_0)=2f(x_0)$

$Af(x+y)=f(x_0)$

则$Af(x)+Af(y)=Af(x+y),\forall x,y\in K\Leftrightarrow 2f(x_0)=f(x_0)$

当$f(x_0)=0$时，A是线性变换

当$f(x_0)\neq 0$时，A不是线性变换

$9.(7)$对于$\mathbb{C}\to\mathbb{C}$的变换:$A\xi=\overline{\xi}$,

$\bullet A\xi+A\eta=\overline{\xi}+\overline{\eta}=\overline{\xi+\eta}=A(\xi+\eta)$

$\bullet$对于$k\in\mathbb{C},\xi\in\mathbb{C}$,有$k\xi\in\mathbb{C}$

$A(k\xi)=\overline{k\xi}=\overline{k}\cdot\overline{\xi}$不恒等于$k\cdot\overline{\xi}=kA\overline{\xi}$

因此，A不是$\mathbb{C}\to\mathbb{C}$的线性变换

16. 设 $\boldsymbol{A}$ 是线性空间 V 中的一个线性变换，且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$. 证明：

(1) V 中任一向量 α 可分解为

$$\alpha=\alpha_1+\alpha_2,$$

其中 $\boldsymbol{A}\alpha_1=\alpha_1,\boldsymbol{A}\alpha_2=0$，且这种分解是唯一的；

(2) 若 $\boldsymbol{A}\alpha=-\alpha$，则 $\alpha=0$；

17. 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是两个线性变换，满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}$. 证明：若 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$.

24. 设 $\boldsymbol{A}$ 是线性空间 V 内的线性变换. 如果 $\boldsymbol{A}^{k-1}\xi\neq0$，但 $\boldsymbol{A}^k\xi=0$，求证：$\xi,\boldsymbol{A}\xi,\cdots,\boldsymbol{A}^{k-1}\xi(k>0)$ 线性无关.

16.(1)假设$\alpha=\alpha_1+\alpha_2=\beta_1+\beta_2$，其中$A\alpha_1=\alpha_1,A\alpha_2=0,A\beta_1=\beta_1,A\beta_2=0$

则$\alpha_1=A\alpha_1+A\alpha_2=A\alpha=A\beta_1+A\beta_2=\beta_1$,

$\Rightarrow\alpha_2=\alpha-\alpha_1=\alpha-\beta_1=\beta_2$.

故$\alpha=\alpha_1+\alpha_2$，其中$A\alpha_1=\alpha_1,A\alpha_2=0$这样的分解是唯一的.

$(2)\ A\alpha=-\alpha\Rightarrow A\alpha=A^2\alpha=A(-\alpha)\Rightarrow 2A\alpha=A(2\alpha)=0\Rightarrow A\alpha=0$

$\Rightarrow-\alpha=0\Rightarrow\alpha=0$.

17.$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=(A+B)A+(A+B)B=AA+BA+AB+BB$

$=A^2+BA+AB+B^2=A+BA+AB+B\overset{\text{由题意}}{=}A+B\Rightarrow BA+AB=0......(*)$

$$\left.\begin{array}{l}\overset{\text{对}(*)\text{两边分别左乘}A}{\Rightarrow}\quad ABA+AAB=A0=0\Rightarrow ABA+AB=0\\ \overset{\text{对}(*)\text{两边分别右乘}A}{\Rightarrow}\quad BAA+ABA=0A=0\Rightarrow BA+ABA=0\end{array}\right\}\Rightarrow AB=BA\overset{\text{结合}(*)}{\Rightarrow}AB=BA=0.$$

24.取$c_0,c_1,\cdots,c_{k-1}\in\mathbb{R}$,使得$c_0\xi+c_1A\xi+\cdots+c_{k-1}A^{k-1}\xi=0......(*)$

对$(*)$左乘A^{k-1}: $A^{k-1}\left(c_0\xi+c_1A\xi+\cdots+c_{k-1}A^{k-1}\xi\right)=A^{k-1}0=A^{k-2}A0=A^{k-2}0=\cdots=0$

$0=A^{k-1}\left(c_0\xi+c_1A\xi+\cdots+c_{k-1}A^{k-1}\xi\right)=c_0A^{k-1}\xi+c_1A^k\xi+c_2AA^k\xi+\cdots+c_{k-1}A^{k-2}A^k\xi$

$=c_0A^{k-1}\xi+c_10+c_2A0+\cdots+c_{k-1}A^{k-2}0=c_0A^{k-1}\xi$

因为$A^{k-1}\xi\neq0$,所以$c_0=0$

对$(*)$左乘A^{k-2}: $A^{k-2}\left(c_0\xi+c_1A\xi+\cdots+c_{k-1}A^{k-1}\xi\right)=A^{k-2}0=A^{k-3}A0=A^{k-2}0=\cdots=0$

$0=A^{k-2}\left(c_0\xi+c_1A\xi+\cdots+c_{k-1}A^{k-1}\xi\right)=c_0A^{k-2}\xi+c_1A^{k-1}\xi+c_2A^k\xi+\cdots+c_{k-1}A^{k-3}A^k\xi$

$=0A^{k-2}\xi+c_1A^{k-1}\xi+c_20+c_3A0+\cdots+c_{k-1}A^{k-3}0=c_1A^{k-1}\xi$

因为$A^{k-1}\xi\neq0$,所以$c_1=0$

以此类推，$c_0=c_1=\cdots=c_{k-1}=0$,这说明$\xi,A\xi,\cdots,A^{k-1}\xi$ 线性无关.

1. 求数域 K 上下列齐次线性方程组的一个基础解系，并用它表出方程组的全部解：

$$(1)\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0, \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0, \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=0, \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=0. \end{cases}$$

$$1.(1)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}=0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x_1=x_3+x_4+5x_5 \\ x_2=-2x_3-2x_4-6x_5 \end{cases}, \text{其中} x_3,x_4,x_5 \text{为自由未知量}$$

该方程的基础解系为 $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

该方程的全部解为 $c_1\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，其中 $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$ 为变量.

(3) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3\\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2\\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{bmatrix}=0$$

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3\\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2\\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 5 & -3 & 4 & -5\\ 0 & 4 & -4 & 4 & -5\\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5\\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 8 & -4 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 3 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{8}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{8}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{8}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{8}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{8}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{8}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{8}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{bmatrix}=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1=-\frac{1}{2}x_4+\frac{7}{8}x_5\\ x_2=-\frac{1}{2}x_4+\frac{5}{8}x_5\text{，其中}x_3,x_4,x_5\text{为自由未知量}\\ x_3=\frac{1}{2}x_4-\frac{5}{8}x_5\end{cases}$$

该方程的基础解系为$\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\frac{7}{8}\\ \frac{5}{8}\\ -\frac{5}{8}\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$

该方程的全部解为$c_1\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 1\\ 0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}\frac{7}{8}\\ \frac{5}{8}\\ -\frac{5}{8}\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$,其中$c_1,c_2\in\mathbb{R}$为变量.

该方程的全部解为 $c\in\mathbb{R}$ 为变量.

$$
(5)\begin{cases} x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}
$$

$$
\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0
$$

$$
\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 3 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0
$$

$$
\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_4 \\ x_3 = 2x_4 \end{cases}
$$

$\Rightarrow$ 该方程的基础解系为 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

该方程的全部解为 $c\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$,其中 $c \in \mathbb{R}$ 为变量.

5. 给定数域 K 上两个齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n = 0, \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{s1}x_1 + b_{s2}x_2 + \cdots + b_{sn}x_n = 0, \end{cases}$$

如果它们系数矩阵的秩都$<n/2$,证明这两个方程组必有公共非零解.

5.*proof* :

$$A \triangleq \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, B \triangleq \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix}, x \triangleq \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dim(\textit{column space of } A) < \dfrac{n}{2} \\ \dim(\textit{column space of } B) < \dfrac{n}{2} \end{cases}$$

since $\dim(\textit{column space of } A) + \dim(\textit{nullspace of } A) = n$

$\dim(\textit{column space of } B) + \dim(\textit{nullspace of } B) = n$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dim(\textit{nullspace of } A) > \dfrac{n}{2} \\ \dim(\textit{nullspace of } B) > \dfrac{n}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow \dim(\textit{nullspace of } A) + \dim(\textit{nullspace of } B) > n = \dim x$

there exists x in the nullspace of A *and* B

因此，这两个方程组必有公共非零解.

8. 求数域 K 上下列线性方程组的一个特解 γ_0 和导出方程组的一个基础解系，然后用它们表出方程组的全部解：

(1) $$\begin{cases} 2x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5=1, \\ x_1+2x_2-x_3+x_4-2x_5=1, \\ 4x_1-10x_2+5x_3-5x_4+7x_5=1, \\ 2x_1-14x_2+7x_3-7x_4+11x_5=-1. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & -10 & 5 & -5 & 7 \\ 2 & -14 & 7 & -7 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -10 & 5 & -5 & 7 & 1 \\ 2 & -14 & 7 & -7 & 11 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -10 & 5 & -5 & 7 & 1 \\ 2 & -14 & 7 & -7 & 11 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -6 & 3 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & -18 & 9 & -9 & 15 & -3 \\ 0 & -18 & 9 & -9 & 15 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -6 & 3 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & & & & -\frac{1}{3} \\ & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{6} \\ & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} \\ \\ \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} x_5 \\ x_2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} x_3 - \frac{1}{2} x_4 + \frac{5}{6} x_5 \end{cases}$$

该方程一组特解为$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

齐次方程组基础解系为$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{5}{6} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

该方程组的全部解为$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{5}{6} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,其中$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$是自由变量.

9. 证明：如果 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 是线性方程组的 t 个解，那么 $k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_t\eta_t$（其中 $k_1+k_2+\cdots+k_t=1$）也是一个解.

由题意：对于线性方程组$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}x=c,\eta_i\left(i=1,2,\cdots,t\right)$是它的$t$个解.

则$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\eta_i=c\left(i=1,2,\cdots,t\right)$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\sum_{i=1}^{t}k_i\eta_i=\sum_{i=1}^{t}k_i\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\eta_i=\sum_{i=1}^{t}k_ic=c\sum_{i=1}^{t}k_i=c$$

故$\sum_{i=1}^{t}k_i\eta_i\left(\sum_{i=1}^{t}k_i=1\right)$也是该线性方程组的解.

13. 设 γ_0 是数域 K 上的线性方程组的一个特解，$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 是

其导出方程组的一个基础解系. 令

$$\gamma_1=\gamma_0+\eta_1,\ \gamma_2=\gamma_0+\eta_2,\ \cdots,\ \gamma_s=\gamma_0+\eta_s,$$

证明：线性方程组的任一解 γ 可表成

$$\gamma=k_0\gamma_0+k_1\gamma_1+\cdots+k_s\gamma_s,$$

其中 $k_0+k_1+\cdots+k_s=1$.

记该线性方程组为$Ax=c$

由题意：$A\eta_i=0\left(i=1,2,\cdots\right)$

则$A\gamma=A\left(k_0\gamma_0+k_1\gamma_1+\cdots+k_s\gamma_s\right)=A\left(\left(k_0+k_1+\cdots+k_s\right)\gamma_0+k_1\eta_1+\cdots+k_s\eta_s\right)$

$=A\left(\gamma_0+k_1\eta_1+\cdots+k_s\eta_s\right)$

$=A\gamma_0+k_1A\eta_1+\cdots+k_sA\eta_s=c+0+\cdots+0=c$

故γ是该线性方程组的解