26. 设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 K 上的 n 维线性空间 V 内的一个线性变换. 如果存在 V 内非零向量 α,使 $\boldsymbol{A}\alpha=0$,令 $M=L(\alpha)$. 如果 $\boldsymbol{A}$ 在 V/M 内的诱导变换可逆,且其矩阵(在 V/M 内)可对角化. 证明 $\boldsymbol{A}$ 在 V 内其

矩阵也可对角化.

$26.proof$:

引理:A可对角化$\Leftrightarrow A$极小多项式无重根.

证明:$(\Rightarrow)A$可对角化$\Rightarrow A=S\Lambda S^{-1}$,$A$与$\Lambda$有相同的极小多项式

则A的极小多项式$m(x)=\prod_{k=1}^{s}(x-\lambda_k)$,其中$\lambda_k$是$A$的$s$个不同特征值$(k=1,2,\cdots,s)$

$(\Leftarrow)$:A的极小多项式$m(x)=\prod_{k=1}^{s}(x-\lambda_k)$是$A$的最后一个不变因子,那么$A$的所有初等因子都没有重根,

故A的所有初等因子都是一次多项式,设A的初等因子组为$\lambda-\lambda_1,\lambda-\lambda_2,\cdots,\lambda-\lambda_n$

那么A相似于对角阵$\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$,即$A$可对角化.

由于$A|_{V/M}$可逆,故$\det(A|_{V/M})\neq 0\Longrightarrow A|_{V/M}$没有零特征值,故$A|_{V/M}$极小多项式没有初等因子$x$.

由于$A|_{V/M}$可对角化,故$A|_{V/M}$极小多项式无重根,$A|_M$有且仅有一个零特征值,极小多项式为$f(x)=x$

$f(x)$与$A|_{V/M}$极小多项式互素,故A的极小多项式无重根,故A可对角化.

《几何与代数》测验 A

方式：闭卷

1. (20分) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K^n$. 求证: 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性无关当且仅当 K^n 中任一向量可被它们线性表示.

2. (20分) 设矩阵 $A \in K^{m\times n}$. 求证: 秩 $r(A) = 1$ 当且仅当存在非零列向量 $\alpha \in K^m$ 及 $\beta \in K^n$ 使得 $A = \alpha\beta^T$.

3. (20分) 设矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. 求证: $r(A^TA) = r(A)$.

4. (20分) 求下面矩阵的逆

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. (20分) 设矩阵 $A \in K^{n\times n}$, 若存在正整数 k 使 $r(A^k) = r(A^{k+1})$, 求证: 对任意正整数 $m \geq 2$ 有 $r(A^k) = r(A^{k+m})$.

$5.proof$:

设A对应的K^n线性空间中的线性映射为φ,

那么$dim\,\mathrm{Im}\,\varphi^k = dim\,\mathrm{Im}\,\varphi^{k+1}$,

同时$\forall \alpha \in \mathrm{Im}\,\varphi^{k+1}, \exists \beta \in K^n, s.t. \alpha = \varphi^{k+1}(\beta)$,则$\alpha = \varphi^{k+1}(\beta) = \varphi^k(\varphi(\beta)) \in \mathrm{Im}\,\varphi^k$

$\Longrightarrow \mathrm{Im}\,\varphi^{k+1} \subset \mathrm{Im}\,\varphi^k$,易得$\mathrm{Im}\,\varphi^k = \mathrm{Im}\,\varphi^{k+1}$

现在我们证明:$\forall m \geq k, \mathrm{Im}\,\varphi^m = \mathrm{Im}\,\varphi^{m+1}$

$\forall \alpha \in \mathrm{Im}\,\varphi^m, \exists \beta \in K^n, s.t. \alpha = \varphi^m(\beta)$

$\mathrm{Im}\,\varphi^k = \mathrm{Im}\,\varphi^{k+1} \Longrightarrow \exists \gamma \in K^n, s.t. \varphi^{k+1}(\gamma) = \varphi^k(\beta)$

$\Longrightarrow \alpha = \varphi^m(\beta) = \varphi^{m-k}(\varphi^k(\beta)) = \varphi^{m-k}(\varphi^{k+1}(\gamma)) = \varphi^{m+1}(\gamma) \in \mathrm{Im}\,\varphi^{m+1}$

$\Longrightarrow \mathrm{Im}\,\varphi^m \subset \mathrm{Im}\,\varphi^{m+1}$,又显然$\mathrm{Im}\,\varphi^{m+1} \subset \mathrm{Im}\,\varphi^m$

故$\mathrm{Im}\,\varphi^m = \mathrm{Im}\,\varphi^{m+1}$， $\forall m \geq k$

也就是$\mathrm{Im}\,\varphi^k = \mathrm{Im}\,\varphi^{k+m}$， $\forall m \in \mathbb{N}$

即$r(A^k) = r(A^{k+m})$， $\forall m \in \mathbb{N}$

$1.proof$:

$(\Rightarrow)$因为$\dim K^n = n$,选取K^n中的任一向量β,则$n+1$个向量$\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta$线性相关

那么β可以由$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$线性表示,即$K^n$中的任一向量可以由$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$线性表示.

$(\Leftarrow)K^n$中的任一向量可以由$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$线性表示$\dim(L(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)) \geq n$,

而由于是n个向量,则$\dim(L(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)) \leq n$,那么$\dim(L(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)) = n$,即$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$线性无关

$2.proof$:

$(\Leftarrow)$:记$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$,由于$\alpha, \beta \neq 0$,不妨设$a_1 \neq 0$

$$则\alpha\beta^T = \begin{pmatrix} a_1\beta^T \\ \vdots \\ a_m\beta^T \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_1\beta^T \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow r(A) = r(\alpha\beta^T) = 1.$$

$(\Rightarrow)$:$r(A) = 1 \Longrightarrow$不妨设A的首列为非零向量$c \in K^m$

则$\exists$标量$k_2, \cdots, k_n, s.t. A = (c \quad k_2c \quad \cdots \quad k_nc)$

$$那么取\alpha = c, \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \neq 0,就有A = \alpha\beta^T$$

$3.proof$:

$Ax = 0 \Longrightarrow A^TAx = 0, A^TAx = 0 \Longrightarrow x^TA^TAx = 0 \Longrightarrow (Ax)^T(Ax) = 0 \Longrightarrow Ax = 0$

$\Longrightarrow Ax = 0, A^TAx = 0$同解$\Longrightarrow r(A) = r(A^TA)$

$$4.A=\begin{pmatrix}2&-1&&\\-1&2&-1&\\&-2&2&-1\\&&-1&2\end{pmatrix},\text{显然}A\text{可逆}.$$

$$\Longrightarrow A^*=\begin{pmatrix}2&3&2&1\\3&6&4&2\\4&8&6&3\\2&4&3&2\end{pmatrix}\Longrightarrow A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}=A^*=\begin{pmatrix}2&3&2&1\\3&6&4&2\\4&8&6&3\\2&4&3&2\end{pmatrix}$$

$$5.proof:$$

$$\text{引理}:r(ABC)\geq r(AB)+r(BC)-r(B)$$

$$\text{引理证明}:\begin{pmatrix}ABC&\\&B\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}ABC&BC\\&B\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}O&BC\\AB&B\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}BC&\\B&AB\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow r\begin{pmatrix}ABC&\\&B\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}BC&\\B&AB\end{pmatrix}\geq r\begin{pmatrix}BC&\\&AB\end{pmatrix},i.e.r(ABC)\geq r(AB)+r(BC)-r(B)$$

$$\text{取}A=A,B=A^k,C=A,$$

$$\text{那么}r(A^{k+2})\geq r(A^{k+1})+r(A^{k+1})-r(A^k)=r(A^{k+1}),\text{又}r(A^{k+2})\leq r(A^{k+1}),\text{则}r(A^{k+2})=r(A^{k+1})=r(A^k)$$

$$\text{由归纳法}:r(A^{k+m})=r(A^k),\forall m\in\mathbb{N}$$