6. 给定数域 K 上 3 阶方阵

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & x & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}.$$

(1) 求 K 上 3 阶可逆方阵 T,使 $T^{-1}AT=D$ 为对角矩阵;

(2) 如已知 B 与 C 特征多项式相同,求 x,y 的值. 判断 B 与 C 是否相似.

$$6.(2)B\text{的特征多项式}=-\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & x-\lambda & -2 \\ -2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$=-(2-\lambda)(\lambda^2-\lambda x-4)-2(2\lambda-4)$$

$$=(\lambda-2)(\lambda^2-x\lambda-8)$$

$$C\text{的特征多项式}=-\begin{vmatrix} 2-\lambda & & \\ & 2-\lambda & \\ & & y-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(2-\lambda)^2(\lambda-y)$$

$$\Longrightarrow (\lambda-2)(\lambda^2-x\lambda-8)=(2-\lambda)^2(\lambda-y)$$

$$\Longrightarrow \lambda^2-x\lambda-8=(\lambda-2)(\lambda-y)=\lambda^2-(2+y)\lambda+2y$$

$$\Longrightarrow y=-4,x=-2$$

$$\Longrightarrow B=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix},C=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & -4 \end{pmatrix}$$

由于B,C有相同的特征多项式,故B,C有相同的特征值

$$\Longrightarrow B,C\text{相似}.$$

13. 设 V 是数域 K 上的 $n(n\geqslant 2)$维线性空间. $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 V 内两个线性变换,在 V 的基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的矩阵分别是 A,A^*(A 的伴随矩阵).

(1) 证明 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$;

(2) 设零是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,求下面子空间

$$M=\{\alpha\in V\,|\,\boldsymbol{B}\alpha=0\}$$

的维数和一组基.

13.(1) $proof$:

$$\boldsymbol{A}=(\varepsilon_1\ \cdots\ \varepsilon_n)A$$

$$\boldsymbol{B}=(\varepsilon_1\ \cdots\ \varepsilon_n)A^*$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{AB}=(\varepsilon_1\ \cdots\ \varepsilon_n)AA^*=(\varepsilon_1\ \cdots\ \varepsilon_n)\begin{pmatrix}\det(A)&&\\&\ddots&\\&&\det(A)\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{BA}=(\varepsilon_1\ \cdots\ \varepsilon_n)A^*A=(\varepsilon_1\ \cdots\ \varepsilon_n)\begin{pmatrix}\det(A)&&\\&\ddots&\\&&\det(A)\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$$

(2) 由于0是A的特征值，那么$\det(A)=0,r(A)<n$.

$$\boldsymbol{BA}=(\varepsilon_1\ \cdots\ \varepsilon_n)A^*A=(\varepsilon_1\ \cdots\ \varepsilon_n)\begin{pmatrix}\det(A)&&\\&\ddots&\\&&\det(A)\end{pmatrix}=0$$

那么A的列向量全都在A^*的零空间中.

M表示A^*的零空间.

①$r(A)=n-1$时,$\dim A^*=1,\dim M=n-1,M$的一组基为A的全体列向量.

②$r(A)\leq n-2$时,$\dim A^*=0,\dim M=n,M$的一组基为n维线性空间V的标准正交基.

16. 设 A 是数域 K 上 n 维线性空间 V 内的一个线性变换，在 V 的一组基下其矩阵为

$$\begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 & & & \\ & \lambda_0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_0 \end{bmatrix},$$

证明：当 $n>1$ 时，对 A 的任一非平凡不变子空间 M，都不存在 A 的不变子空间 N，使

$$V = M \oplus N.$$

$16.proof$：

解法1：假设$V=M\oplus N,M,N$为A的不变子空间,那么

$A|_M$有$jordan$， $A|_N$有$jordan$,

那么A就不是一个$jordan$块,矛盾!

解法2：记这组基为$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$

$$设\alpha=\sum_{k=1}^{n}a_k\varepsilon_k$$

$$则A\alpha=A\sum_{k=1}^{n}a_k\varepsilon_k=\sum_{k=1}^{n}a_kA\varepsilon_k=a_1\lambda_0\varepsilon_1+\sum_{k=2}^{n}a_k(\lambda_0\varepsilon_k+\varepsilon_{k-1})$$

在A的任意不变子空间M中,$\alpha\in M\Longrightarrow A\alpha\in M$

$$则A\alpha=a_1\lambda_0\varepsilon_1+\sum_{k=2}^{n}a_k(\lambda_0\varepsilon_k+\varepsilon_{k-1})\in M$$

$$\Longrightarrow\lambda_0\alpha+\sum_{k=2}^{n}a_k\varepsilon_{k-1}\in M\Longrightarrow\sum_{k=2}^{n}a_k\varepsilon_{k-1}\in M$$

$$\Longrightarrow A\sum_{k=2}^{n}a_k\varepsilon_{k-1}\in M\Longrightarrow\sum_{k=3}^{n}a_k\varepsilon_{k-2}\in M$$

$$\Longrightarrow\cdots\Longrightarrow\varepsilon_1\in M$$

A的所有不变子空间中必然有ε_1,那么M,N不可能是直和.

得证!

22. 设 A 是数域 K 上 n 维线性空间 V 内的线性变换. 如果 A 的矩阵可对角化，证明对 A 的任意不变子空间 M，必存在 A 的不变子空间 N，使 $V=M\oplus N$.

$22.proof$:

我们证明更强的引理:V是数域F上的n维线性空间，则V上线性变换A

可对角化的充要条件是A的所有特征值都在F中，

而且对于任何A的不变子空间W，都有A的不变补空间.

证明：

必要性：

如果A可对角化,$V=V_{\lambda_1}\oplus V_{\lambda_2}\oplus\cdots\oplus V_{\lambda_s},s\in\mathbb{N},\lambda_i$是两两不同的特征值

对于任何一个$A-$不变子空间W,

$$W\cap V=W\cap(V_{\lambda_1}\oplus V_{\lambda_2}\oplus\cdots\oplus V_{\lambda_s})\overset{?}{=}(W\cap V_{\lambda_1})\oplus(W\cap V_{\lambda_2})\oplus\cdots\oplus(W\cap V_{\lambda_s})$$

为了证明问号，我们设$a\in W,a=\sum_{i=1}^{s}a_i,a_i\in V_{\lambda_i}$,只需证明$a_i\in W$

因此取$\begin{cases} p_i\equiv 0\left(\mathrm{mod}\,(\lambda-\lambda_i)^{\lambda_i\text{代数重数}}\right),j\neq i \\ p_i\equiv 1\left(\mathrm{mod}\,(\lambda-\lambda_i)^{\lambda_i\text{代数重数}}\right),j=i\end{cases}$，这样的取法由中国剩余定理保证.

$$即\begin{cases} p_i(x)=q_j(x)\,(\lambda-\lambda_i)^{\lambda_i\text{代数重数}},j\neq i \\ p_i(x)=1+q_j\,(\lambda-\lambda_i)^{\lambda_i\text{代数重数}},j=i\end{cases}$$

$$所以此时p_i(A)a=\sum_{i=1}^{s}p_i(A)a_i=a_i\in W,$$

$$这里\begin{cases} p_i(x)a_k=q_k(x)\,(A-\lambda_kE)^{\lambda_k\text{代数重数}}a_k=0,k\neq i \\ p_i(x)a_i=\left(E+q_i(A)\,(A-\lambda_iE)^{\lambda_k\text{代数重数}}\right)a_i=a_i,\end{cases}$$

因此的确有上述的分解.

即$W=(W\cap V_{\lambda_1})\oplus(W\cap V_{\lambda_2})\oplus\cdots\oplus(W\cap V_{\lambda_s})$

现在就有可以在每个V_{λ_i}中找$W\cap V_{\lambda_i}$的$A|_{W\cap V_{\lambda_i}}$的不变补空间U_i

则可以证明$U_1\oplus U_2\oplus\cdots\oplus U_s$即为所求.

充分性：

设$\lambda_1\in F$是A的特征值,V_{λ_1}是A的特征子空间，则

由条件存在A的不变补空间U,即$V=V_{\lambda_1}\oplus U$.

所以只需证明$A|_U$也满足充分性假设,然后用归纳法即可证明.

取$W\subset U$是$A|_U$的不变子空间,下证明存在U的不变子空间W_1使得

$U=W\oplus W_1$且$A(W_1)\subset W_1$.

事实上,由$W\subset U$是$A|_U$的不变子空间,则W也是A的不变子空间,所以

存在A的不变子空间M,使得$V=W\oplus M$.

$$U=U\cap(W\oplus M)\overset{?}{=}W\oplus(U\cap M)$$

显然由U,M定义：$A(U\cap M)\subset U\cap M$

那么设$A\in U$满足$a=w+m,w\in W,m\in M$，只需证明$m\in U$.

因为$W\subset U$,所以$m=a-w\in U$,从而我们证明了$U=W\oplus(U\cap M)$

于是$W_1=U\cap M$为所求.

由归纳法，充分性得证!

23. 设 $\boldsymbol{A}$ 是复数域上 n 维线性空间 V 内的线性变换. 如果对 $\boldsymbol{A}$ 的任意不变子空间 M，都存在 $\boldsymbol{A}$ 的不变子空间 N，使 $V=M\oplus N$. 证明 $\boldsymbol{A}$ 的矩阵可对角化.

$23.proof$:

我们证明更强的引理:V是数域F上的n维线性空间，则V上线性变换A

可对角化的充要条件是A的所有特征值都在F中，

而且对于任何A的不变子空间W，都有A的不变补空间.

证明：

必要性：

如果A可对角化,$V=V_{\lambda_1}\oplus V_{\lambda_2}\oplus\cdots\oplus V_{\lambda_s},s\in\mathbb{N},\lambda_i$是两两不同的特征值

对于任何一个$A-$不变子空间W,

$$W\cap V=W\cap(V_{\lambda_1}\oplus V_{\lambda_2}\oplus\cdots\oplus V_{\lambda_s})\overset{?}{=}(W\cap V_{\lambda_1})\oplus(W\cap V_{\lambda_2})\oplus\cdots\oplus(W\cap V_{\lambda_s})$$

为了证明问号，我们设$a\in W,a=\sum_{i=1}^{s}a_i,a_i\in V_{\lambda_i}$,只需证明$a_i\in W$

因此取$\begin{cases} p_i\equiv 0\left(\bmod(\lambda-\lambda_i)^{\lambda_i\text{代数重数}}\right),j\neq i\\ p_i\equiv 1\left(\bmod(\lambda-\lambda_i)^{\lambda_i\text{代数重数}}\right),j=i\end{cases}$，这样的取法由中国剩余定理保证.

$$\text{即}\begin{cases} p_i(x)=q_j(x)\,(\lambda-\lambda_i)^{\lambda_i\text{代数重数}},j\neq i\\ p_i(x)=1+q_j\,(\lambda-\lambda_i)^{\lambda_i\text{代数重数}},j=i\end{cases}$$

所以此时$p_i(A)a=\sum_{i=1}^{s}p_i(A)a_i=a_i\in W$,

$$\text{这里}\begin{cases} p_i(x)a_k=q_k(x)\,(A-\lambda_kE)^{\lambda_k\text{代数重数}}a_k=0,k\neq i\\ p_i(x)a_i=\left(E+q_i(A)\,(A-\lambda_iE)^{\lambda_i\text{代数重数}}\right)a_i=a_i,\end{cases}$$

因此的确有上述的分解.

即$W=(W\cap V_{\lambda_1})\oplus(W\cap V_{\lambda_2})\oplus\cdots\oplus(W\cap V_{\lambda_s})$

现在就有可以在每个V_{λ_i}中找$W\cap V_{\lambda_i}$的$A|_{W\cap V_{\lambda_i}}$的不变补空间U_i

则可以证明$U_1\oplus U_2\oplus\cdots\oplus U_s$即为所求.

充分性：

设$\lambda_1\in F$是A的特征值,V_{λ_1}是A的特征子空间，则

由条件存在A的不变补空间U,即$V=V_{\lambda_1}\oplus U$.

所以只需证明$A|_U$也满足充分性假设,然后用归纳法即可证明.

取$W\subset U$是$A|_U$的不变子空间,下证明存在U的不变子空间W_1使得

$U=W\oplus W_1$且$A(W_1)\subset W_1$.

事实上,由$W\subset U$是$A|_U$的不变子空间,则W也是A的不变子空间,所以

存在A的不变子空间M,使得$V=W\oplus M$.

$$U=U\cap(W\oplus M)\overset{?}{=}W\oplus(U\cap M)$$

显然由U,M定义：$A(U\cap M)\subset U\cap M$

那么设$A\in U$满足$a=w+m,w\in W,m\in M$，只需证明$m\in U$.

因为$W\subset U$,所以$m=a-w\in U$,从而我们证明了$U=W\oplus(U\cap M)$

于是$W_1=U\cap M$为所求.

由归纳法，充分性得证!

24. 设 A 是数域 K 上 n 维线性空间 V 内的线性变换. $\alpha\in V,\alpha\neq 0$. 证明存在正整数 k，使得 $\alpha,A\alpha,A^2\alpha,\cdots,A^{k-1}\alpha$ 线性无关，而

$$A^k\alpha=a_0\alpha+a_1A\alpha+\cdots+a_{k-1}A^{k-1}\alpha.$$

如令 $M=L(\alpha,A\alpha,\cdots,A^{k-1}\alpha)$，证明 M 是 A 的不变子空间，并进一步证明 $A|_M$ 的特征多项式为

$$f(\lambda)=\lambda^k-a_{k-1}\lambda^{k-1}-a_{k-2}\lambda^{k-2}-\cdots-a_1\lambda-a_0.$$

$$24.proof:$$

$$(1)$$

$$\text{只需证:存在}k\in\mathbb{N},s.t.$$

$$\alpha,A\alpha,A^2\alpha,\cdots,A^{k-1}\alpha\text{线性无关,但是}\alpha,A\alpha,A^2\alpha,\cdots,A^k\alpha\text{线性相关}$$

$$\text{由于}\alpha\text{一个向量线性无关.}$$

$$\text{只需证:}$$

$$\text{存在}k\in\mathbb{N},s.t.$$

$$\alpha,A\alpha,A^2\alpha,\cdots,A^k\alpha\text{线性相关.}$$

$$\text{事实上这是显然的，我们取}k=n$$

$$\text{那么}\alpha,A\alpha,A^2\alpha,\cdots,A^k\alpha\text{是}n\text{维线性空间中}n+1\text{个向量,}$$

$$\text{由维数的定义，}\alpha,A\alpha,A^2\alpha,\cdots,A^k\alpha\text{必然线性相关.}$$

$$(2)M=L(\alpha,A\alpha,A^2\alpha,\cdots,A^{k-1}\alpha)$$

$$\text{只需证：}\forall x\in M,\text{有}Ax\in M$$

$$\text{事实上,考虑}x=\sum_{i=0}^{k-1}c_iA^i\alpha\ (c_i\text{是标量})$$

$$Ax=A\sum_{i=0}^{k-1}c_iA^i\alpha=\sum_{i=0}^{k-1}c_iA^{i+1}\alpha=\sum_{i=0}^{k-2}c_iA^{i+1}\alpha+c_{k-1}A^k\alpha$$

$$=\sum_{i=0}^{k-2}c_iA^{i+1}\alpha+c_{k-1}\sum_{i=0}^{k-1}a_iA^i\alpha=\sum_{i=1}^{k-1}c_{i-1}A^i\alpha+c_{k-1}\sum_{i=0}^{k-1}a_iA^i\alpha\in M$$

$$\Longrightarrow M\text{是}A\text{的不变子空间.}$$

$$(3)\text{首先}A\text{限制在}M\text{上为}k\text{阶方阵,则}A\text{的特征多项式的最高次项次数为}k.$$

$$\text{那么，如果对于}A\text{的任意特征值}f(\lambda)\text{，都满足}f(\lambda)=0$$

$$\text{那么，}f(\lambda)\text{是}A|_M\text{的特征多项式}$$

$$Ax=\lambda x,x\in M$$

$$\text{对于}M\text{的一组基}\alpha,A\alpha,\cdots,A^{k-1}\alpha$$

$$\text{我们考虑}A^t\alpha(t=0,1,\cdots,k-1)$$

$$A^k(A^t\alpha)=A^tA^k\alpha=A^t(a_0\alpha+a_1A\alpha+\cdots+a_{k-1}A^{k-1}\alpha)$$

$$=a_0(A^t\alpha)+a_1A(A^t\alpha)+\cdots+a_{k-1}A^{k-1}(A^t\alpha)$$

$$\text{那么对于任意}x\in M,\text{我们都有}$$

$$A^kx=a_0x+a_1Ax+\cdots+a_{k-1}A^{k-1}x$$

$$\text{考虑}x\text{为}A|_M\text{的特征向量全体,则}$$

$$A^kx=\lambda^kx$$

$$a_0x+a_1Ax+\cdots+a_{k-1}A^{k-1}x=a_0x+a_1\lambda x+\cdots+a_{k-1}\lambda^{k-1}x$$

$$\Longrightarrow\lambda^kx=a_0x+a_1\lambda x+\cdots+a_{k-1}\lambda^{k-1}x$$

$$\Longrightarrow(\lambda^k-a_{k-1}\lambda^{k-1}-\cdots-a_1\lambda-a_0)x=0$$

$$\text{由于}x\neq0,\text{因此}\lambda^k-a_{k-1}\lambda^{k-1}-\cdots-a_1\lambda-a_0=0$$

$$\text{其中}\lambda\text{是}A|_M\text{的任意特征值}$$

$$\text{因此，}A|_M\text{的特征多项式为}f(\lambda)=\lambda^k-a_{k-1}\lambda^{k-1}-\cdots-a_1\lambda-a_0$$

25. 证明 Hamilton-Cayley 定理：如果数域 K 上 n 维线性空间 V 内线性变换 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为 $f(\lambda)$，则 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$.

$25.proof$:

由于在$zariski$拓扑下，可对角化矩阵在所有同阶方阵中稠密.

①我们先考虑可对角化矩阵:$A=B\Lambda B^{-1}$

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}\text{其中}\lambda_i\neq 0$$

$$\text{则对于}A\text{的特征多项式}f(\lambda)=\sum_{k=0}^{n}c_k\lambda^k$$

$$\text{则}f(A)=\sum_{k=0}^{n}c_kA^k=B\sum_{k=0}^{n}c_k\Lambda^kB^{-1}$$

$$=B\begin{pmatrix}\sum_{k=0}^{n}c_k\lambda_1^k & & & \\ & \sum_{k=0}^{n}c_k\lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{k=0}^{n}c_k\lambda_n^k\end{pmatrix}B^{-1}$$

$$=B\begin{pmatrix}f(\lambda_1) & & & \\ & f(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(\lambda_n)\end{pmatrix}B^{-1}=0$$

②再考虑非可对角化矩阵A,对每个对角线上元素运用摄动法,

故我们可以考虑一族矩阵A_t,$(t\in(-1,1))$,使得$t=0$时,$A_t=A$

$t\neq 0$时,A_t可对角化，而且$t\mapsto A_t$是连续的.

$$\text{那么}p_A(A)=\lim_{t\to 0}p_{A_t}(A_t)=0$$

得证!

21. 设 V 是数域 K 上的 n 维线性空间，$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 V 内两个线性变换，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$. 如果 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的矩阵都可对角化，证明 V 内存在一组基，使 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 在该组基下的矩阵同时成对角形.

$21.proof$:

对A对角化:$\Lambda=SAS^{-1}$,不妨设A不是数乘矩阵,否则显然A,B可同时相似对角化.

$$AB=BA\Longrightarrow SABS^{-1}=SBAS^{-1}\Longrightarrow(SAS^{-1})(SBS^{-1})=(SBS^{-1})(SAS^{-1})$$

$$\Longrightarrow\Lambda(SBS^{-1})=(SBS^{-1})\Lambda$$

由于与对角矩阵(非数乘矩阵)可交换的矩阵都是对角矩阵,所以SBS^{-1}是对角矩阵

$\Longrightarrow A,B$可以同时相似对角化!