12/6/2023

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 $K$ 上线性空间 $V$ 内的线性变换，若 $\boldsymbol{A}\alpha=\lambda_0\alpha$，又设 $f(\lambda)=a_0\lambda^m+a_1\lambda^{m-1}+\cdots+a_m$ 为 $K$ 上一多项式. 证明：

$$f(\boldsymbol{A})\alpha=f(\lambda_0)\alpha.$$

$$1.proof:$$

$$\boldsymbol{A}^m\alpha=\boldsymbol{A}^{m-1}(\boldsymbol{A}\alpha)=\boldsymbol{A}^{m-1}(\lambda_0\alpha)=\lambda_0\boldsymbol{A}^{m-1}\alpha=\cdots=\lambda_0^m\alpha$$

$$f(\boldsymbol{A})\alpha=(a_0\boldsymbol{A}^m+a_1\boldsymbol{A}^{m-1}+\cdots+a_m)\alpha=a_0\boldsymbol{A}^m\alpha+a_1\boldsymbol{A}^{m-1}\alpha+\cdots+a_m\alpha$$

$$=a_0\lambda_0^m\alpha+a_1\lambda_0^{m-1}\alpha+\cdots+a_m\alpha=(a_0\lambda_0^m+a_1\lambda_0^{m-1}+\cdots+a_m)\alpha=f(\lambda_0)\alpha$$

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 是线性空间 $V$ 内的一个线性变换，存在一个正整数 $k$，使 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{0}$. 证明：$\boldsymbol{A}$ 只有唯一的特征值 $\lambda_0=0$.

8. 设 $\lambda_1,\lambda_2$ 是线性变换 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同特征值，$\xi_1,\xi_2$ 是分别属于 $\lambda_1,\lambda_2$ 的特征向量. 证明：$\xi_1+\xi_2$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

9. 证明：如果线性空间 $V$ 的线性变换 $\boldsymbol{A}$ 以 $V$ 的每个非零向量作为特征向量，则 $\boldsymbol{A}$ 是数乘变换.

$$7.proof:$$

$$if\ \exists\lambda\neq 0,\ s.t.\ \exists x\in V-\{0\},$$

$$\boldsymbol{A}x=\lambda x\Longrightarrow\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{A}x=\boldsymbol{A}^{k-1}\lambda x\Longrightarrow\boldsymbol{A}^k x=\lambda\boldsymbol{A}^{k-1}x$$

$$\Longrightarrow 0=\lambda\boldsymbol{A}^{k-1}x\Longrightarrow\boldsymbol{A}^{k-1}x=0\Longrightarrow\cdots\Longrightarrow x=0$$

$$this\ contradicts\ with\ x\in V-\{0\}.$$

$$Hence,\ all\ of\ the\ eigenvalues\ of\ \boldsymbol{A}\ equals\ to\ 0.$$

$$8.proof:$$

$$\boldsymbol{A}\xi_1=\lambda_1\xi_1,\boldsymbol{A}\xi_2=\lambda_2\xi_2$$

$$\lambda_1\neq\lambda_2\Longrightarrow\boldsymbol{A}(\xi_1-\xi_2)=\boldsymbol{A}\xi_1-\boldsymbol{A}\xi_2=\lambda_1\xi_1-\lambda_2\xi_2$$

$$we\ claim\ that\ \xi_1\neq\xi_2,\ otherwise\ \boldsymbol{A}(\xi_1-\xi_2)=0\Longrightarrow\lambda_1\xi_1-\lambda_2\xi_2=0$$

$$\Longrightarrow(\lambda_1-\lambda_2)\xi_1=0\overset{\xi_1\in V-\{0\}}{\Longrightarrow}\lambda_1-\lambda_2=0,this\ contradicts\ with\ \lambda_1\neq\lambda_2.$$

$$if\ \exists\lambda\in K,\ s.t.\ \boldsymbol{A}(\xi_1+\xi_2)=\lambda(\xi_1+\xi_2)$$

$$\Longrightarrow\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2=\lambda\xi_1+\lambda\xi_2\Longrightarrow(\lambda_1-\lambda)\xi_1=(\lambda-\lambda_2)\xi_2$$

$$\Longrightarrow\lambda_1-\lambda=\lambda-\lambda_2=0\Longrightarrow\lambda_1=\lambda_2,this\ contradicts\ with\ \lambda_1\neq\lambda_2.$$

$$Hence,\ \xi_1+\xi_2\ is\ not\ a\ eigenvector\ of\ \boldsymbol{A}.$$

$$9.proof:$$

$$\forall x\in V,\ \exists\lambda_x\in K,\boldsymbol{A}x=\lambda_x x\Longrightarrow(\boldsymbol{A}-\lambda_x I)x=0$$

$$\Longrightarrow\dim\ ker(\boldsymbol{A}-\lambda_x I)=\dim\ V\Longrightarrow\dim\operatorname{Im}(\boldsymbol{A}-\lambda_x I)=0$$

$$\Longrightarrow\boldsymbol{A}=\lambda_x I,\lambda_x=\lambda_y,\forall x,y\in V\Longrightarrow\boldsymbol{A}\ \text{是数乘变换}.$$

10. 设 $\boldsymbol{A}$ 是线性空间 $V$ 内的可逆线性变换.

(1) 证明：$\boldsymbol{A}$ 的特征值都不为零；

(2) 证明：若 $\lambda$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，则 $1/\lambda$ 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$的一个特征值.

$$10.(1)\, proof:$$

$$if\ \exists x \in V-\{0\}, s.t. \boldsymbol{A}x = 0x = 0,\ then\ \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{A}^{-1}0 = 0 \Longrightarrow x = 0.\ Contradiction!$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{A}\text{的特征值都不为}0.$$

$$10.(2)\, proof:$$

$$if\ \exists x \in V-\{0\}, s.t. \boldsymbol{A}x = \lambda x (\lambda \neq 0),\ then\ x = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{A}^{-1}\lambda x = \lambda \boldsymbol{A}^{-1}x \Longrightarrow \boldsymbol{A}^{-1}x = \frac{1}{\lambda}x$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\lambda}\text{是}\boldsymbol{A}^{-1}\text{的一个特征值.}$$

14. 设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 $K$ 上 $n$ 维线性空间 $V$ 内的一个线性变换. 证明 $\boldsymbol{A}$ 的矩阵可对角化的充分必要条件是存在 $K$ 内互不相同的数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$，使

$$(\lambda_1 \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})(\lambda_2 \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\cdots(\lambda_k \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{0}.$$

$14.proof$：

引理:$A$可对角化$\Leftrightarrow A$的极小多项式无重根.

引理1:若$A$相似于$B$,则$A,B$有相同的极小多项式.

$A$相似于$B\Longrightarrow\exists$可逆$P,s.t.\ A=PBP^{-1}$.

$$\Longrightarrow 0=m(A)=(A-\lambda_1E)(A-\lambda_2E)\cdots(A-\lambda_kE)=(PBP^{-1}-\lambda_1E)(PBP^{-1}-\lambda_2E)\cdots(PBP^{-1}-\lambda_kE)$$

$$=P(B-\lambda_1E)(B-\lambda_2E)\cdots(B-\lambda_kE)P^{-1}=Pm(B)P^{-1}\Longrightarrow m(B)=0$$

$\Longrightarrow m(A)|m(B)$.同理：$m(B)|m(A).\Longrightarrow m(A)=m(B)$.

引理2:分块$A=\begin{bmatrix}A_1&&&\\&A_2&&\\&&\ddots&\\&&&A_k\end{bmatrix}$,则$A$的极小多项式$m(x)$是$A_i(i=1,2,\cdots,k)$的极小多项式$m_i(x)$的最小公倍数.

$$①0=m(A)=\begin{bmatrix}m(A_1)&&&\\&m(A_2)&&\\&&\ddots&\\&&&m(A_k)\end{bmatrix}\Longrightarrow m(A_i)=0(i=1,2,\cdots,k)$$

由极小多项式的定义:$m_i(x)|m(x)\Longrightarrow \mathrm{lcd}(m_1(x),m_2(x),\cdots,m_k(x))|g(x)$.

②记$g(x)=\mathrm{lcd}(m_1(x),m_2(x),\cdots,m_k(x))$.

$$g(A)=\begin{bmatrix}g(A_1)&&&\\&g(A_2)&&\\&&\ddots&\\&&&g(A_k)\end{bmatrix}=0\Longrightarrow m(x)|g(x)=\mathrm{lcd}(m_1(x),m_2(x),\cdots,m_k(x)).$$

因此，$m(x)=\mathrm{lcd}(m_1(x),m_2(x),\cdots,m_k(x))$.

引理3:$A$可对角化$\Leftrightarrow A$的极小多项式无重根.

记$A$相似于对角阵$\begin{bmatrix}A_1&&&\\&A_2&&\\&&\ddots&\\&&&A_k\end{bmatrix}$,其中$A_i=\begin{bmatrix}\lambda_i&&\\&\ddots&\\&&\lambda_i\end{bmatrix}(i=1,2,\cdots,k)$,$\lambda_i$两两不等.

于是,由引理1,2,$A$的极小多项式等于$A_i(i=1,2,\cdots,k)$的极小多项式$m_i(x)$的最小公倍数

即$m(x)=\mathrm{lcd}(m_1(x),m_2(x),\cdots,m_k(x))$

而显然$A_i$的极小多项式$m_i(x)=x-\lambda_i$

$$\Longrightarrow m(x)=\mathrm{lcd}((x-\lambda_1),(x-\lambda_2),\cdots,(x-\lambda_k))=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_k)$$

引理得证!下证明第14题.

①(“$\Rightarrow$”)由于$\boldsymbol{A}$可对角化$\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$的极小多项式无重根.

取$\{\lambda_i\}_{i=1}^{k}$为$\boldsymbol{A}$的$k$个不同的特征值,

则$\boldsymbol{A}$的极小多项式$m(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_k)$,

由极小多项式的定义,$m(\boldsymbol{A})=0$,即$(\boldsymbol{A}-\lambda_1E)(\boldsymbol{A}-\lambda_2E)\cdots(\boldsymbol{A}-\lambda_kE)=0$.

②(“$\Leftarrow$”)由于$\exists\{\lambda_i\}_{i=1}^{k}\in K^k,\lambda_i\neq\lambda_j,s.t.\ p(\boldsymbol{A}):=(\boldsymbol{A}-\lambda_1E)(\boldsymbol{A}-\lambda_2E)\cdots(\boldsymbol{A}-\lambda_kE)=0$

$p(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_k)$,则$\boldsymbol{A}$的极小多项式$m(\lambda)|p(\lambda)$.

故$\boldsymbol{A}$的极小多项式无重根$\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$可对角化.

15. 设 $\boldsymbol{A}$ 是线性空间 $V$ 内的一个线性变换，$M,N$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的两个不变子空间. 证明：$M+N$ 与 $M\cap N$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的不变子空间.

$$15.proof:$$

$$M,N\text{是}\boldsymbol{A}\text{的两个不变子空间}\Leftrightarrow\begin{cases}\forall x\in M,\text{有}\boldsymbol{A}x\in M\\ \forall y\in N,\text{有}\boldsymbol{A}y\in N\end{cases}$$

$$\forall z\in M+N,\text{我们有}z=x+y(x\in M,\ y\in N),\text{那么}\boldsymbol{A}z=\boldsymbol{A}(x+y)=\boldsymbol{A}x+\boldsymbol{A}y\in M+N$$

$$\forall \omega\in M\cap N,\text{我们有}\boldsymbol{A}\omega\in M\wedge\boldsymbol{A}\omega\in N\Longrightarrow\boldsymbol{A}\omega\in M\cap N.$$

因此，$M+N$，$M\cap N$都是$\boldsymbol{A}$的不变子空间.

20. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 $n$ 维线性空间 $V$ 内两个线性变换，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$. $\lambda$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，$V_\lambda$ 是属于特征值 $\lambda$ 的特征子空间. 证明 $V_\lambda$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的不变子空间.

$$20.proof:$$

$$\forall x\in V_\lambda,\boldsymbol{A}x=\lambda x\Longrightarrow\boldsymbol{BA}x=\boldsymbol{B}\lambda x=\lambda\boldsymbol{B}x\Longrightarrow\boldsymbol{AB}x=\lambda\boldsymbol{B}x\Longrightarrow\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}x)=\lambda(\boldsymbol{B}x)\Longrightarrow\boldsymbol{B}x\in V_\lambda.$$

因此，$V_\lambda$是$\boldsymbol{B}$的不变子空间.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 是复数域上线性空间 $V$ 内的一个线性变换，且它在某一组基$\{\boldsymbol{\varepsilon}_i\}$下的矩阵为 $A$，求 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值和每个特征值 $\lambda_i$ 所属特征子空间 $V_{\lambda_i}$的一组基，其中：

(1) $A=\begin{bmatrix}3&4\\5&2\end{bmatrix}$；  (2) $A=\begin{bmatrix}0&a\\-a&0\end{bmatrix}$；

(3) $A=\begin{bmatrix}5&6&-3\\-1&0&1\\1&2&-1\end{bmatrix}$；  (4) $A=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$；

(5) $A=\begin{bmatrix}0&2&1\\-2&0&3\\-1&-3&0\end{bmatrix}$；  (6) $A=\begin{bmatrix}3&1&0\\-4&-1&0\\4&-8&-2\end{bmatrix}$；

$$5.(2)\ A=\begin{bmatrix}0 & a\\ -a & 0\end{bmatrix}$$

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}-\lambda & a\\ -a & -\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+a^2=0\Longrightarrow\lambda_1=ai,\lambda_2=-ai$$

$$\Longrightarrow A-\lambda_1 I=\begin{bmatrix}-ai & a\\ -a & -ai\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \\ -i & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-ai & a\\ & \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & \\ -i & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-i & 1\\ & \end{bmatrix}$$

$$V_{\lambda_1}\text{的一组基为}x_1=\begin{bmatrix}1\\ i\end{bmatrix}$$

$$A-\lambda_2 I=\begin{bmatrix}ai & a\\ -a & ai\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \\ i & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}ai & a\\ & \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & \\ i & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i & 1\\ & \end{bmatrix}$$

$$V_{\lambda_2}\text{的一组基为}x_2=\begin{bmatrix}1\\ -i\end{bmatrix}$$

$$5.(4)\ A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}-\lambda & & 1\\ & 1-\lambda & \\ 1 & & -\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\lambda+\dfrac{1}{\lambda} & & 1\\ & 1-\lambda & \\ & & -\lambda\end{vmatrix}=\left(-\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)(1-\lambda)(-\lambda)=-(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0$$

$$\Longrightarrow\lambda_1=1,\lambda_2=-1$$

$$A-\lambda_1 I=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ -1 & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$V_{\lambda_1}\text{的一组基为}x_1=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix},x_2=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$A-\lambda_2 I=\begin{bmatrix}1 & & 1\\ & 2 & \\ 1 & & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ 1 & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & & 1\\ & 1 & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$V_{\lambda_2}\text{的一组基为}x_3=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{bmatrix}$$

$$5.(6)\ A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ -4 & -1 & 0\\ 4 & -8 & -2\end{bmatrix}$$

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}3-\lambda & 1 & 0\\ -4 & -1-\lambda & 0\\ 4 & -8 & -2-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)\begin{vmatrix}-1-\lambda & 0\\ -8 & -2-\lambda\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}-4 & 0\\ 4 & -2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(3-\lambda)(-1-\lambda)(-2-\lambda)-(-4)(-2-\lambda)=[(3-\lambda)(1+\lambda)-4](\lambda+2)$$

$$=(-\lambda^2+2\lambda-1)(\lambda+2)=-(\lambda-1)^2(\lambda+2)$$

$$\Longrightarrow\lambda_1=1,\lambda_2=-2$$

$$A-\lambda_1 I=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ -4 & -2 & 0\\ 4 & -8 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & & \\ -2 & 1 & \\ 2 & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -10 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & & \\ 2 & & 1\\ -2 & -1 & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 10 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$V_{\lambda_1}\text{的一组基为}x_1=\begin{bmatrix}-3\\ 6\\ -20\end{bmatrix}$$

$$A-\lambda_2 I=\begin{bmatrix}5 & 1 & 0\\ -4 & 1 & 0\\ 4 & -8 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & \\ & 1 & \\ & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9 & 0 & 0\\ -4 & 1 & 0\\ 0 & -7 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & \\ & 1 & \\ & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & & \\ -\dfrac{4}{9} & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -7 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 1 & \\ & 1 & \\ & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & & \\ -\dfrac{4}{9} & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9 & & \\ & 1 & \\ & -7 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$V_{\lambda_2}\text{的一组基为}\ \begin{bmatrix}0\end{bmatrix}$$

6. 给定数域 $K$ 上 3 阶方阵

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & x & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}.$$

(1) 求 $K$ 上 3 阶可逆方阵 $T$，使 $T^{-1}AT=D$ 为对角矩阵；

$$6.(1)A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix},T^{-1}AT=D\Longrightarrow AT=TD$$

$$\text{考察}Ax=\lambda x$$

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix}=-(\lambda-10)(\lambda-1)^2$$

$$\Longrightarrow \lambda_1=10,\lambda_2=1.$$

$$A-\lambda_1 I=\begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$V_{\lambda_1}\text{的一组基为}x_1=\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A-\lambda_2 I=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$V_{\lambda_1}\text{的一组基为}x_2=\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},x_2=\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[Ax_1\quad Ax_2\quad Ax_3]=[10x_1\quad x_2\quad x_3]$$

$$\text{故}A[x_1\quad x_2\quad x_3]=[x_1\quad x_2\quad x_3]\begin{bmatrix} 10 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix},i.e.$$

$$A\begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{其中}T=\begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix},D=\begin{bmatrix} 10 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$