13. 证明下列向量组 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 组成 K^4 的一组基,并求向量 β 在这组基下的坐标:

(1) $\varepsilon_1=(1,1,1,1)$, $\varepsilon_2=(1,1,-1,-1)$,
$\varepsilon_3=(1,-1,1,-1)$, $\varepsilon_4=(1,-1,-1,1)$.
$\beta=(1,2,1,1)$.

(2) $\varepsilon_1=(1,1,0,1)$, $\varepsilon_2=(2,1,3,1)$,
$\varepsilon_3=(1,1,0,0)$, $\varepsilon_4=(0,1,-1,-1)$.
$\beta=(1,2,1,1)$.

14. 给定数域 K 上的一个 n 阶方阵 $A\neq 0$. 设

$$f(\lambda)=a_0\lambda^m+a_1\lambda^{m-1}+\cdots+a_m \quad (a_0\neq 0,a_i\in K)$$

是使 $f(A)=0$ 的最低次多项式. 设 V 是由系数在 K 内的 A 的多项式的全体关于矩阵加法、数乘所组成的 K 上线性空间,证明:

$$E,\ A,\ A^2,\ \cdots,\ A^{m-1}$$

是 V 的一组基,从而 $\dim V=m$. 求 V 中向量

$$(A-aE)^k \quad (a\in K,0\leqslant k\leqslant m)$$

在这组基下的坐标.

$13.proof$:

$$(\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3\ \ \varepsilon_4)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$rank(\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3\ \ \varepsilon_4)=rank\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}=4$$

故$\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3\ \ \varepsilon_4$构成$K^4$的一组基.

(1)记$\beta=(\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3\ \ \varepsilon_4)\alpha=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\alpha$

$$\Longrightarrow \alpha=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\beta=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}5\\ 1\\ -1\\ -1\end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow \beta$在这组基下的坐标为$\left(\frac{5}{4},\frac{1}{4},-\frac{1}{4},-\frac{1}{4}\right)$.

(2)记$\beta=(\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3\ \ \varepsilon_4)\alpha=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\alpha$

$$\Longrightarrow \alpha=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}^{-1}\beta=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2 & 2 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 1 & 0\\ 6 & -4 & -2 & -2\\ -3 & 3 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ -3\\ 2\end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow \beta$在这组基下的坐标为$(2,1,-3,2)$.

14. proof: · 先证明 V 中任意元素可以写成 $E, A, A^2, \dots, A^{m-1}$ 线性组合的形式

i.e. $\{E, A, A^2, \dots, A^{m-1}\}$ 包含了 V 中的一组基

证明如下: for a given polynomial in V, denoted as $\sum_{i=0}^{n} b_i A^i$

if $n \le m-1$, 显然成立

if $n \ge m$, 先证: A^m 可以表示为 $E, A, A^2, \dots, A^{m-1}$ 的线性组合

$\because f(A)=0$, 则 $a_0A^m = -a_1A^{m-1} - \dots - a_mE$

$\Rightarrow A^m = -a_0^{-1}a_1A^{m-1} - \dots - a_0^{-1}a_mE$

则 $\sum_{i=0}^{n} b_iA^i = \sum_{i=0}^{m-1} b_iA^i + \sum_{i=m}^{n} b_iA^i = \sum_{i=0}^{m-1} b_iA^i + A^m\left(\sum_{i=0}^{n-m} b_{i+m}A^i\right)$ $(m \le n \le 2m-1)$

也可以表示为 $E, A, A^2, \dots, A^{m-1}$ 的线性组合.

· 再证明 V 中任意元素不能写成 $\{E, A, A^2, \dots, A^{m-1}\} - \{A^k\}$ $k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ 的形式, i.e. $\{E, A, A^2, \dots, A^{m-1}\}$ 是 V 的一组基

证明如下: 考虑多项式 A^k, 它在 V 中, 但不能被 $\{E, A, A^2, \dots A^{m-1}\} - \{A^k\}$ 线性表示, 因此矛盾!

故 $\{E, A, A^2 \dots A^{m-1}\}$ 是 V 的一组基 则 $\dim V = \dim\{E, A, \dots A^{m-1}\} = m$

· 考虑 $(A-aE)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}(-a)^{k-i}A^{i}$. $(0 \le k \le m)$.

$0 \le k \le m-1$ 时, $(A-aE)^k$ 在基 $\{E, A, \dots A^{m-1}\}$ 下坐标为 $(C_k^0(-a)^k, C_k^1(-a)^{k-1}, \dots, C_k^k, 0, \dots, 0)$

$k = m$ 时, $(A-aE)^k = \sum_{i=0}^{m-1}\binom{m}{i}(-a)^{m-i}A^i + A^m = \sum_{i=0}^{m-1}\left[\binom{m}{i}(-a)^{m-i} - a_0^{-1}a_{m-i}\right]A^i$

故 $(A-aE)^k$ 在基 $\{E, A, \dots A^{m-1}\}$ 下坐标为

$(C_m^0(-a)^m - a_0^{-1}a_m, C_m^1(-a)^{m-1} - a_0^{-1}a_{m-1}, \dots, C_m^{m-1}(-a) - a_0^{-1}a)$.

17. 接上题(1). 求一非零向量 ξ, 使它在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 与 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 下有相同的坐标.

8. 设 M 是数域 K 上线性空间 V 的子空间, 如果 $M \neq V$, 则 M 称为 V 的**真子空间**. 证明 V 的有限个真子空间的并集不能填满 V.

17. $\xi = \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} \beta.$

$\xi = \begin{pmatrix} 2&0&5&6\\ 1&3&3&6\\ -1&1&2&1\\ 1&0&1&3 \end{pmatrix} \gamma$

$\beta = \gamma$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1&&&\\ &1&&\\ &&1&\\ &&&1 \end{pmatrix}^{-1} \xi = \begin{pmatrix} 2&0&5&6\\ 1&3&3&6\\ -1&1&2&1\\ 1&0&1&3 \end{pmatrix}^{-1} \xi$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1&&&\\ &1&&\\ &&1&\\ &&&1 \end{pmatrix} \xi = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 12&9&-27&-33\\ 1&12&-9&-23\\ 9&0&0&-18\\ -7&-3&9&26 \end{pmatrix} \xi$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -15&9&-27&-33\\ 1&-15&-9&-23\\ 9&0&-27&-18\\ -7&-3&9&-1 \end{pmatrix} \xi = 0 \quad \Rightarrow \xi = \begin{pmatrix} -x\\ -x\\ -x\\ x \end{pmatrix}. \quad x \in K.$$

覆盖原理,

8. proof: ~~Solution 1:~~ 只需考虑 V 为有限维空间. 记 V 的一组基为 $e_1, e_2, \ldots, e_n$

考虑 $\varepsilon_i = e_1 + i e_2 + i^2 e_3 + \cdots + i^{n-1} e_n$. $i \in N$.

任取 n 个 ε_i. 记为 $\varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, \ldots, \varepsilon_{i_n}$, $i_1, i_2 \ldots i_n$ 两两不等

$$则 \ (\varepsilon_{i_1}\ \varepsilon_{i_2} \cdots \varepsilon_{i_n}) = (e_1 + i_1 e_2 + \cdots + i_1^{n-1} e_n \quad e_1 + i_2 e_2 + \cdots + i_2^{n-1} e_n \quad \ldots \quad e_1 + i_n e_2 + \cdots + i_n^{n-1} e_n).$$

$$= (e_1\ e_2 \cdots e_n) \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n\\ i_1^2 & i_2^2 & \cdots & i_n^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ i_1^{n-1} & i_2^{n-1} & \cdots & i_n^{n-1} \end{pmatrix} \triangleq (e_1\ e_2 \cdots e_n) \cdot A$$

由范德蒙行列式性质: $\det A = \prod_{1 \le i < j \le n}$ ~~$(i_i - i_j)$~~ $(i_j - i_i) \neq 0$. $\Rightarrow \operatorname{rank}(A) = n$

$\Rightarrow$ 任意 n 个 ε_i 构成 V 的一组基.

如果 V 能被有限个子空间覆盖. 记为 $V = \bigcup_{i=1}^{s} V_i$.

考虑 $\{\varepsilon_i : i \in N\}$. 则, 必有一个子空间内存在无穷多个 ε_i. 不妨记为 V_1

则 $V_1 = V$

~~Solution 2:~~

12. 在 K^4 中求由下列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 生成的子空间的基与维数：

(1) $\alpha_1=(2,1,3,1)$，　$\alpha_2=(1,2,0,1)$，
$\alpha_3=(-1,1,-3,0)$，　$\alpha_4=(1,1,1,1)$；

(2) $\alpha_1=(2,1,3,-1)$，　$\alpha_2=(-1,1,-3,1)$，
$\alpha_3=(4,5,3,-1)$，　$\alpha_4=(1,5,-3,1)$.

13. 在 K^4 中求齐次线性方程组

$$\begin{cases}3x_1+2x_2-5x_3+4x_4=0,\\3x_1-x_2+3x_3-3x_4=0,\\3x_1+5x_2-13x_3+11x_4=0\end{cases}$$

的解空间的基与维数.

$$12.(1)r\begin{pmatrix}2&1&-1&1\\1&2&1&1\\3&0&-3&1\\1&1&0&1\end{pmatrix}=3\Longrightarrow base:\begin{pmatrix}2\\1\\3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix};dim=3$$

$$13.A:=\begin{pmatrix}3&2&-5&4\\3&-1&3&-3\\3&5&-13&11\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3&2&-5&4\\3&-1&3&-3\\3&5&-13&11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=0\Longrightarrow\begin{pmatrix}3&2&-5&4\\0&-3&8&-7\\0&3&-8&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=0$$

$$\Longrightarrow\begin{pmatrix}3&2&-5&4\\0&-3&8&-7\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=0\Longrightarrow dimC(A)=2\Longrightarrow dimN(A)=4-dimC(A)=2$$

$$\Longrightarrow base:\begin{pmatrix}-\frac{1}{9}\\\frac{8}{3}\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{2}{9}\\-\frac{7}{3}\\0\\1\end{pmatrix}$$

14. 给定数域 K 上的一个 n 阶方阵 $A\neq 0$. 设

$$f(\lambda)=a_0\lambda^m+a_1\lambda^{m-1}+\cdots+a_m \quad (a_0\neq 0, a_i\in K)$$

是使 $f(A)=0$ 的最低次多项式. 设 V 是由系数在 K 内的 A 的多项式的全体关于矩阵加法、数乘所组成的 K 上线性空间，证明：

$$E,\ A,\ A^2,\ \cdots,\ A^{m-1}$$

是 V 的一组基，从而 $\dim V=m$. 求 V 中向量

$$(A-aE)^k \quad (a\in K, 0\leqslant k\leqslant m)$$

在这组基下的坐标.

15. 接上题. 证明

$$(A-aE)^k \quad (k=0,1,2,\cdots,m-1)$$

也是 V 的一组基. 求两组基之间的过渡矩阵 T：

$$(E, A-aE, \cdots, (A-aE)^{m-1})=(E, A, \cdots, A^{m-1})T.$$

16. 在 K^4 中求由基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 到基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 的过渡矩阵，并求向量 β 在所指定的基下的坐标.

(1) $\varepsilon_1=(1,0,0,0)$，　$\eta_1=(2,1,-1,1)$，
$\varepsilon_2=(0,1,0,0)$，　$\eta_2=(0,3,1,0)$，
$\varepsilon_3=(0,0,1,0)$，　$\eta_3=(5,3,2,1)$，
$\varepsilon_4=(0,0,0,1)$.　$\eta_4=(6,6,1,3)$.

求 $\beta=(b_1,b_2,b_3,b_4)$ 在 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 下的坐标.

15. 由14.题. ~~E-a~~ $(A-aE)^k=(C_k^0a^k, C_k^1a^{k-1}, C_k^2a^{k-2}, \dots, C_k^k\cdot 1, 0, \dots, 0)$

$\cdot(E, A, A^2, \dots, A^{m-1})^T \quad (0\leq k\leq m-1)$

假设 $(A-aE)^k=c_0E+c_1(A-aE)^1+\dots+c_{k-1}(A-aE)^{k-1}+c_{k+1}(A-aE)^{k+1}+\dots+c_{m-1}(A-aE)^{m-1}$ $c_i\in K, 0\leq i\leq m-1$

一方面, 显然: $c_{k+1}=c_{k+2}=\dots=c_{m-1}=0$. 因为 $(A-aE)^k$ 中不存在 $A^{k+1}, A^{k+2}, \dots A^{m-1}$

另一方面: $c_i(A-aE)^i$ 不含 A^k 项 $(0\leq i\leq k-1)$. 则上述等式不成立;

故 $\{(A-aE)^k\}_{0\leq k\leq m-1}$ 线性无关. $\dim\{(A-aE)^k\}_{0\leq k\leq m-1}=m$

故 $\{(A-aE)^k\}_{0\leq k\leq m-1}$ 是 V 的一组基

~~15. 由第14题~~

由于 $(A-aE)^k = (E\ \ A\ \ A^2 \cdots A^{m-1}) \begin{pmatrix} C_k^0(-a)^k \\ C_k^1(-a)^{k-1} \\ \vdots \\ C_k^k \cdot 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. $(0 \le k \le m-1)$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} E \\ \cancel{A-aE} \\ \cancel{(A-aE)^2} \\ \vdots \\ \cancel{(A-aE)^{m-1}} \end{pmatrix} =$$

$$\Rightarrow (E\ \ A-aE\ \ (A-aE)^2 \cdots (A-aE)^{m-1})$$

$$= (E.\ A.\ A^2 \cdots A^{m-1}) \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ (-a)E & E & 0 & \cdots & & & 0 \\ (-a)^2E & (-a)C_2^1E & E & & & & \vdots \\ (-a)^3E & (-a)^2C_3^2E & (-a)^1C_3^1E & E & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & & \\ & & & & & \ddots & 0 \\ (-a)^{m-1}E & (-a)^{m-2}C_{m-1}^{m-2}E & (-a)^{m-3}C_{m-1}^{m-3}E & \cdots & & & E \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow \triangleq T$

$$16.\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&-1&1\\0&3&1&0\\5&3&2&1\\6&6&1&3\end{pmatrix}T\Longrightarrow T=\begin{pmatrix}2&1&-1&1\\0&3&1&0\\5&3&2&1\\6&6&1&3\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{27}\begin{pmatrix}12&1&9&-7\\9&12&0&-3\\-27&-9&0&9\\-33&-23&-18&26\end{pmatrix}$$

$$\beta=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\b_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&-1&1\\0&3&1&0\\5&3&2&1\\6&6&1&3\end{pmatrix}T\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\b_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&-1&1\\0&3&1&0\\5&3&2&1\\6&6&1&3\end{pmatrix}\frac{1}{27}\begin{pmatrix}12&1&9&-7\\9&12&0&-3\\-27&-9&0&9\\-33&-23&-18&26\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\b_4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2&1&-1&1\\0&3&1&0\\5&3&2&1\\6&6&1&3\end{pmatrix}\frac{1}{27}\begin{pmatrix}12b_1+b_2+9b_3-7b_4\\9b_1+12b_2-3b_4\\-27b_1-9b_2+9b_4\\-33b_1-23b_2-18b_3+26b_4\end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow \beta$在$\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$下的坐标为$\frac{1}{27}(12b_1+b_2+9b_3-7b_4, 9b_1+12b_2-3b_4, -27b_1-9b_2+9b_4, -33b_1-23b_2-18b_3+26b_4)$.

1. 设 $A\in M_n(K)$.

(1) 证明：与 A 可交换的 n 阶方阵的全体组成 $M_n(K)$ 的一个子空间. 记此子空间为 $C(A)$.

(2) 给定对角矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&&&\\&2&&\\&&\ddots&\\&&&n\end{bmatrix},$$

求 $C(A)$ 的维数和一组基.

$$1.(1)\, proof:$$

$$I \in C(A) \Longrightarrow C(A) \neq \varnothing$$

$$\forall X \in C(A), AX - XA = 0$$

$$to\ show\ that\ C(A) is\ a\ subspace\ of\ M_n(K)$$

$$① \forall X \in C(A), k \in K, AkX - kXA = k(AX - XA) = 0$$

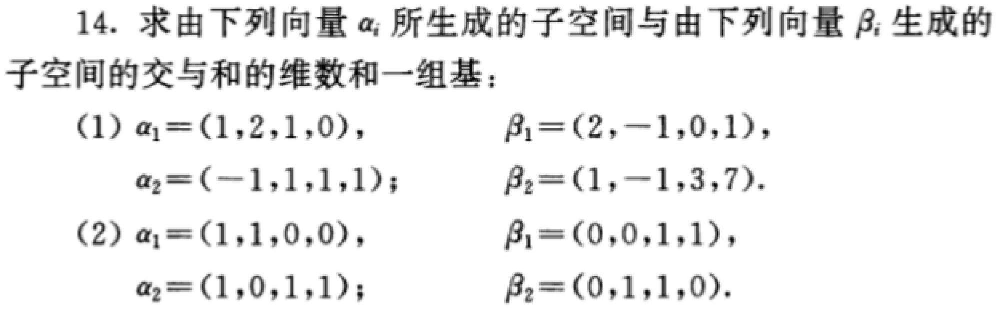
$$② \forall X, Y \in C(A), A(X+Y) - (X+Y)A = (AX - XA) + (AY - YA) = 0$$

$$Hence, C(A) is\ a\ subspace\ of\ M_n(K).$$

$$(2) obviously, \forall X \in C(A), X\ is\ \text{diagonal.}$$

$$\text{note that} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \in C(A)$$

$$\Longrightarrow \dim C(A) = n, \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} are\ a\ base\ of\ C(A).$$



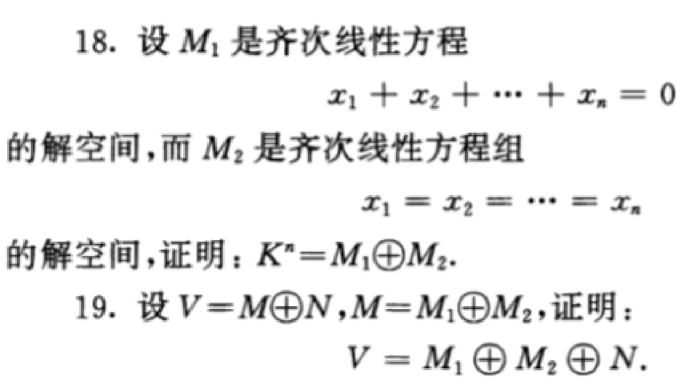
14. 求由下列向量 α_i 所生成的子空间与由下列向量 β_i 生成的子空间的交与和的维数和一组基：

(1) $\alpha_1=(1,2,1,0)$，　　$\beta_1=(2,-1,0,1)$，
　$\alpha_2=(-1,1,1,1)$；　　$\beta_2=(1,-1,3,7)$.

(2) $\alpha_1=(1,1,0,0)$，　　$\beta_1=(0,0,1,1)$，
　$\alpha_2=(1,0,1,1)$；　　$\beta_2=(0,1,1,0)$.

$$14.(2) \dim(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \beta_1 \quad \beta_2) = \dim \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ 1 & & & 1 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & \end{pmatrix} = \dim \begin{pmatrix} & 1 & & \\ 1 & & & \\ & & & 1 \\ & & 1 & \end{pmatrix} = 4$$

$$\Longrightarrow \dim(A+B) = 4, \dim(A \cap B) = \dim(A+B) - \dim(A) - \dim(B) = 0$$



18. 设 M_1 是齐次线性方程

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$$

的解空间，而 M_2 是齐次线性方程组

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n$$

的解空间，证明：$K^n = M_1 \oplus M_2$.

19. 设 $V = M \oplus N$，$M = M_1 \oplus M_2$，证明：

$$V = M_1 \oplus M_2 \oplus N.$$

18. ①we need to show that $M_1 \cap M_2 = \varnothing$, this is trivial

②we need to show that $M_1 \cup M_2 = K^n$, i.e., $\forall (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in K^n$,

$\exists (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in M_1, (z_1, z_2, \cdots, z_n) \in M_2$, s.t.

$x_i = y_i + z_i, \forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}$

proof:

let $z_i = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}, \forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, thus $(z_1, z_2, \cdots, z_n) \in M_2$

$\Longrightarrow y_i = x_i - \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$

note that $y_1 + y_2 + \cdots + y_n = 0 \Longrightarrow (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in M_1$

Hence, $M_1 \oplus M_2 = K^n$.

19. proof:

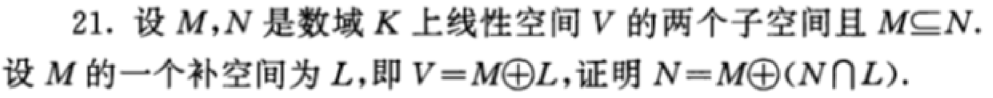
that is, we need to proof the associative law of direct sum.

pick an element $\boldsymbol{a} \in V$,

$V = M \oplus N \Longrightarrow \exists \boldsymbol{b} \in M, \boldsymbol{c} \in N, \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$.

$M = M_1 \oplus M_2 \Longrightarrow \exists \boldsymbol{b}_1 \in M_1, \boldsymbol{b}_2 \in M_2, \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2$.

$\Longrightarrow \exists \boldsymbol{b}_1 \in M_1, \boldsymbol{b}_2 \in M_2, \boldsymbol{c} \in N, \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{c}. \Longrightarrow V = M_1 \oplus M_2 \oplus N.$



21. 设 M, N 是数域 K 上线性空间 V 的两个子空间且 $M \subseteq N$. 设 M 的一个补空间为 L，即 $V = M \oplus L$，证明 $N = M \oplus (N \cap L)$.

$$21.\mathit{proof}:$$

①$\forall a \in V-\{0\},\ \mathit{if}\ a\in M,\ \mathit{then}\ a\notin L,$

$$M\cap L\subset L\Longrightarrow a\notin M\cap L$$

$$\Longrightarrow M\cap(M\cap L)=\{0\}$$

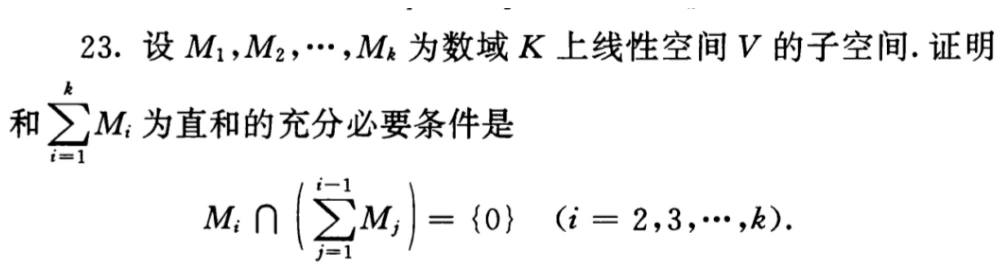
②$V=M\oplus L\Longrightarrow \forall\boldsymbol{a}\in N\subset V,\ \exists\,\boldsymbol{b}\in M\subset N,\boldsymbol{c}\in L,\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}.$

$$\Longrightarrow\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+(-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{c}.$$

$$\Longrightarrow\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\in N\Longrightarrow\boldsymbol{c}\in(N\cap L).$$

$$\Longrightarrow\ \forall\boldsymbol{a}\in N,\ \exists\,\boldsymbol{b}\in M,\boldsymbol{c}\in(N\cap L),\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$$

$$\Longrightarrow N=M\oplus(N\cap L).$$



23. 设 $M_1,M_2,\cdots,M_k$ 为数域 K 上线性空间 V 的子空间. 证明和 $\sum\limits_{i=1}^{k}M_i$ 为直和的充分必要条件是

$$M_i\cap\left(\sum_{j=1}^{i-1}M_j\right)=\{0\}\quad(i=2,3,\cdots,k).$$

$$23.proof:$$

$$(\text{“}\Leftarrow\text{”}):M_i\cap\left(\sum_{j=1}^{i-1}M_j\right)=\{0\},(i=2,3,\cdots,k),$$

$$if\ \sum_{j=1}^{i-1}M_j\ \ is\ direct\ product,$$

$$then\ \sum_{j=1}^{i}M_j=M_i+\left(\sum_{j=1}^{i-1}M_j\right)\ is\ direct\ product.(i=2,3,\cdots,k)$$

$$\Longrightarrow obviously,\ \sum_{j=1}^{2}M_j=M_1+M_2\ is\ direct\ product.$$

$$by\ induction,\ \sum_{j=1}^{k}M_j\ is\ direct\ product.$$

$$(\text{“}\Rightarrow\text{”}):\sum_{j=1}^{k}M_j\ is\ direct\ product\Longrightarrow M_i\cap\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}M_j\right)=\{0\},(i=2,3,\cdots,k)$$

$$\text{since}\ \sum_{j=1}^{i-1}M_j\ \text{is a subspace of}\ \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}M_j,\ \text{and}\{0\}\in\sum_{j=1}^{i-1}M_j$$

$$\text{then}\ M_i\cap\left(\sum_{j=1}^{i-1}M_j\right)=\{0\},(i=2,3,\cdots,k).$$

29. 设 K,F,L 是三个数域，且 $K\subseteq F\subseteq L$. 如果 F 作为 K 上的线性空间是 m 维的，L 作为 F 上的线性空间是 n 维的（其加法，数乘都是数的加法与乘法）. 证明 L 作为 K 上的线性空间是 mn 维的.

29. 设 F 在 K 上一组基为 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_m$，$L$ 在 F 上一组基为 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$. 证明 $\{\varepsilon_i\eta_j\,|\,i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n\}$ 为 L 在 K 上的一组基.

$29.proof$:

pick a base of F *with respect to* K,*denoted by* $(a_1,a_2,\cdots,a_m),a_i\in K,(i=1,2,\cdots,m).$

pick a base of L *with respect to* F,*denoted by* $(b_1,b_2,\cdots,b_n).b_j\in F,(j=1,2,\cdots,n).$

for a given element in L, *denoted by* ω.

then $\exists\,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\in F,s.t.\ \omega=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)^T(b_1,b_2,\cdots,b_n)$

$\exists\,\alpha_{1j},\alpha_{2j},\cdots,\alpha_{mj}\in K,(j=1,2,\cdots,n),s.t.\ \beta_j=(\alpha_{1j},\alpha_{2j},\cdots,\alpha_{mj})^T(a_1,a_2,\cdots,a_m)$

$$\Longrightarrow\omega=\begin{pmatrix}(\alpha_{11},\alpha_{21},\cdots,\alpha_{m1})^T(a_1,a_2,\cdots,a_m)\\(\alpha_{12},\alpha_{22},\cdots,\alpha_{m2})^T(a_1,a_2,\cdots,a_m)\\\vdots\\(\alpha_{1n},\alpha_{2n},\cdots,\alpha_{mn})^T(a_1,a_2,\cdots,a_m)\end{pmatrix}^T(b_1,b_2,\cdots,b_n)$$

$$=\begin{pmatrix}(\alpha_{11},\alpha_{21},\cdots,\alpha_{m1})^T(a_1,a_2,\cdots,a_m)\\(\alpha_{12},\alpha_{22},\cdots,\alpha_{m2})^T(a_1,a_2,\cdots,a_m)\\\vdots\\(\alpha_{1n},\alpha_{2n},\cdots,\alpha_{mn})^T(a_1,a_2,\cdots,a_m)\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$$

$$=\left(\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_m\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}\alpha_{11}\\\alpha_{21}\\\vdots\\\alpha_{m1}\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_m\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}\alpha_{12}\\\alpha_{22}\\\vdots\\\alpha_{m2}\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_m\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}\alpha_{1n}\\\alpha_{2n}\\\vdots\\\alpha_{mn}\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_m\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\cdots&\alpha_{1n}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}&\cdots&\alpha_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\alpha_{m1}&\alpha_{m2}&\cdots&\alpha_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$$

$\alpha_{ij}\in K,i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n$

$\Longrightarrow\{a_ib_j:i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n\}$ *is a base of* L *with respect to* K.