11/20/2023 homework

13. 设 A,B 分别是数域 K 上的 $n\times m$ 与 $m\times n$ 矩阵. 证明

$$\begin{vmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{vmatrix} = |E_n - AB|\,|E_m - BA|.$$

14. 给定数域 K 上的 m 阶方阵 A, n 阶方阵 B. 令

$$M = \begin{bmatrix} C & A \\ B & O \end{bmatrix},$$

证明 $|M| = (-1)^{mn}|A|\cdot|B|$.

$$13.proof:$$

我觉得题目错了，但是也可以做,我们改一下题目，下面证明$\begin{vmatrix} I_m & B \\ A & I_n \end{vmatrix} = |I_m - BA| = |I_n - AB|$

$$Solution1: \begin{vmatrix} I_m & B \\ A & I_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_m & O \\ A & I_n - AB \end{vmatrix} = |I_n - AB|, \begin{vmatrix} I_m & B \\ A & I_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_m - BA & B \\ O & I_n \end{vmatrix} = |I_m - BA| \text{证毕!}$$

$Solution2$:不妨设$m=n$,不妨设A,B均为n阶满秩方阵,只需证: $\begin{vmatrix} I_n & B_{n\times n} \\ A_{n\times n} & I_n \end{vmatrix} = |I_n - AB| = |I_n - BA|$

显然：$\begin{vmatrix} I_n & B \\ A & I_n \end{vmatrix} = |I_n - BA| = |I_n - AB|$，证毕!

下面说明为何可以不妨设:

①(根据摄动法:)A,B为不满秩方阵时，$\exists \lambda,\mu>0, s.t.(A-\lambda I_n),(B-\mu I_n)$满秩

因此，$\begin{vmatrix} I_n & B-\mu I_n \\ A-\lambda I_n & I_n \end{vmatrix} = |I_n - (A-\lambda I_n)(B-\mu I_n)| = |I_n - (B-\mu I_n)(A-\lambda I_n)|$

即$\begin{vmatrix} I_n & B-\mu I_n \\ A-\lambda I_n & I_n \end{vmatrix} = |(1-\lambda\mu)I_n + \lambda B + \mu A - AB| = |(1-\lambda\mu)I_n + \lambda B + \mu A - BA|$

由于等号两边都是关于λ,μ的多项式函数,所以可以令$\lambda,\mu \to 0$,由多项式函数的连续性:

$\begin{vmatrix} I_n & B \\ A & I_n \end{vmatrix} = |I_n - BA| = |I_n - AB|$，对不满秩同阶方阵$A,B$成立

由此，$\begin{vmatrix} I_n & B \\ A & I_n \end{vmatrix} = |I_n - BA| = |I_n - AB|$，对任意同阶方阵$A,B$成立.

②(由$laplace$展开:)$m\neq n$时,不妨设$m<n$,设$S=(O_{n\times(n-m)} \quad A_{n\times m})$,$T=\begin{pmatrix} O_{(n-m)\times n} \\ B_{m\times n} \end{pmatrix}$,$S,T$为$n$阶方阵

$$\text{考虑}\begin{vmatrix} I_m & B \\ A & I_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_{n-m} & 0 & 0 \\ 0 & I_m & B \\ 0 & A & I_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & T \\ S & I_n \end{vmatrix} = |I_n - TS| = \left| I_n - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & BA \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} I_{n-m} & 0 \\ 0 & I_m - BA \end{pmatrix} \right| = |I_m - BA|$$

同理：$\begin{vmatrix} I_m & B \\ A & I_n \end{vmatrix} = |I_n - AB|$,证毕!

再次说明题目错了:由引理:AB,BA有完全相同的非零$jordan$

则AB,BA有完全相同的特征值(已包含几何重数相等)

考虑用特征值算行列式，显然：$|I_m - BA| = |I_n - AB|$

$$14.M = \begin{bmatrix} C & A \\ B & O \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C_{m\times n} & A_{m\times m} \\ B_{n\times n} & O_{n\times m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O_{n\times m} & E_{n\times n} \\ E_{m\times m} & O_{m\times n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{m\times m} & C_{m\times n} \\ O_{n\times m} & B_{n\times n} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det\left(\begin{bmatrix} C_{m\times n} & A_{m\times m} \\ B_{n\times n} & O_{n\times m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O_{n\times m} & E_{n\times n} \\ E_{m\times m} & O_{m\times n} \end{bmatrix} \right) = \det\left(\begin{bmatrix} A_{m\times m} & C_{m\times n} \\ O_{n\times m} & B_{n\times n} \end{bmatrix} \right) = \det A \cdot \det B$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} C_{m\times n} & A_{m\times m} \\ B_{n\times n} & O_{n\times m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O_{n\times m} & E_{n\times n} \\ E_{m\times m} & O_{m\times n} \end{bmatrix} \right) = \det\left(\begin{bmatrix} C_{m\times n} & A_{m\times m} \\ B_{n\times n} & O_{n\times m} \end{bmatrix} \right) \det\left(\begin{bmatrix} O_{n\times m} & E_{n\times n} \\ E_{m\times m} & O_{m\times n} \end{bmatrix} \right) = \det M \cdot (-1)^{mn}$$

$$\Rightarrow \det M \cdot (-1)^{mn} = \det A \cdot \det B \Rightarrow \det M = (-1)^{mn} \cdot \det A \cdot \det B$$

11/22 homework

18. 设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是线性空间 V 的一组基，证明：线性变换 $\boldsymbol{A}$ 可逆，当且仅当 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性无关.

$$18.proof:$$

$$we\ denote\ (\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \cdots\ \ \varepsilon_n)\ as\ B,\ thus\ (A\varepsilon_1\ \ A\varepsilon_2\ \ \cdots\ \ A\varepsilon_n)=AB$$

$$\text{since}\ \ \varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \cdots\ \ \varepsilon_n \text{is a base of the linear space } V,$$

$$then\ \ \dim(B)=n,\ \text{since} \dim(AB)\leq\min\{\dim(A),\dim(B)\},\dim(B)=n$$

$$then\ A\ \ \text{is inversible}\Leftrightarrow\dim(A)=n\Leftrightarrow dim(AB)=n\Leftrightarrow(A\varepsilon_1\ \ A\varepsilon_2\ \ \cdots\ \ A\varepsilon_n)\ \text{are independent.}$$

20. 求下列线性变换在指定基下的矩阵：

(1) 在 K^3 中，$\boldsymbol{A}(x_1,x_2,x_3)=(2x_1-x_2,x_2+x_3,x_1)$，而基取：$\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,0)$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,0)$，$\boldsymbol{\varepsilon}_3=(0,0,1)$. 求 $\boldsymbol{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵.

$$20.(1)\,A(x_1,x_2,x_3)=(2x_1-x_2,x_2+x_3,x_1)\Longrightarrow A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x_1-x_2\\x_2+x_3\\x_1\end{pmatrix}\Longrightarrow A=\begin{pmatrix}2&-1&\\&1&1\\1&&\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow(A\varepsilon_1\quad A\varepsilon_2\quad A\varepsilon_3)=\begin{pmatrix}2&-1&\\&1&1\\1&&\end{pmatrix}(\varepsilon_1\quad\varepsilon_2\quad\varepsilon_3)$$

21. 在 $M_2(K)$中定义变换如下：

$$\boldsymbol{A}X=AX-XA,\quad X\in M_2(K),$$

其中 A 是 K 上一个固定的二阶方阵. 证明：

(1) $\boldsymbol{A}$ 是 $M_2(K)$内的一个线性变换；

(2) 在 $M_2(K)$中取一组基

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\varepsilon}_{12}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\varepsilon}_{21}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\varepsilon}_{22}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}.$$

求 $\boldsymbol{A}$ 在这组基下的矩阵.

$$21.\sigma: \begin{matrix} M_2(K) \to M_2(K) \\ X \to AX - XA \end{matrix}, \ \sigma(X) = \boldsymbol{A}X$$

(1) *it only suffices to show that* ①$\sigma(X+Y)=\sigma(X)+\sigma(Y), \forall X,Y \in M_2(K)$;②$\sigma(kX)=k\sigma(X), \forall$ *scalar* $k \in K$.

$$①\sigma(X+Y)=A(X+Y)-(X+Y)A=(AX-XA)+(AY-YA)=\sigma(X)+\sigma(Y)$$

$$②\sigma(kX)=AkX-kXA=k(AX-XA)=k\sigma(X)$$

Hence, $\boldsymbol{A}$ *is a linear transformation.*

(2) $\boldsymbol{A}X = AX - XA, \forall X \in M_2(K)$,*let* A *denoted by* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

$$X=\begin{pmatrix} 1 & \\ & \end{pmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 & \\ & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ & \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & \\ c & \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a & b \\ & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} & -b \\ c & \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix} & 1 \\ & \end{pmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} & 1 \\ & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & 1 \\ & \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} & 1 \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} & b \\ & d \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} c & d \\ & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -c & b-d \\ & d \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix} & \\ 1 & \end{pmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} & \\ 1 & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \\ 1 & \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} & \\ 1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b & \\ d & \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} & \\ a & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b & \\ d-a & b \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix} & \\ & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} & \\ & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \\ & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} & \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} & b \\ & d \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} & \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} & b \\ -c & \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_3 \\ \varepsilon_2 & \varepsilon_4 \end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ & & & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} & -b & b & \\ c & & d-a & b \\ -c & b-d & & b \\ & d & -c & \end{pmatrix}$$

23. 设三维线性空间 V 内一个线性变换 $\boldsymbol{A}$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 在基 $\varepsilon_3,\varepsilon_2,\varepsilon_1$ 下的矩阵；

(2) 求 $\boldsymbol{A}$ 在基 $\varepsilon_1,k\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵($k\neq 0$)；

(3) 求 $\boldsymbol{A}$ 在基 $\varepsilon_1+\varepsilon_2,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵.

24. 设 $\boldsymbol{A}$ 是线性空间 V 内的线性变换. 如果 $\boldsymbol{A}^{k-1}\xi\neq 0$，但 $\boldsymbol{A}^k\xi=0$，求证：$\xi,\boldsymbol{A}\xi,\cdots,\boldsymbol{A}^{k-1}\xi$ ($k>0$) 线性无关.

25. 在 n 维线性空间中，设有线性变换 $\boldsymbol{A}$ 与向量 ξ，使 $\boldsymbol{A}^{n-1}\xi\neq 0$，但 $\boldsymbol{A}^n\xi=0$. 求证：$\boldsymbol{A}$ 在某一组基下的矩阵是

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}.$$

26. 设四维线性空间 V 内一个线性变换 $\boldsymbol{A}$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 下的矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

求 $\boldsymbol{A}$ 在 $\eta_1=\varepsilon_1-2\varepsilon_2+\varepsilon_4,\eta_2=3\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4,\eta_3=\varepsilon_3+\varepsilon_4,\eta_4=2\varepsilon_4$ 下的矩阵.

$$23.(1)\ \mathcal{A}(\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3)=(\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3)A$$

$$\mathcal{A}(\varepsilon_3\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_1)=(\varepsilon_3\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_1)A'$$

$$\textit{note that: } (\varepsilon_3\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_1)=(\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3)\begin{pmatrix} & & 1\\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \mathcal{A}(\varepsilon_3\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_1)=\mathcal{A}(\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3)\begin{pmatrix} & & 1\\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}=(\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3)A\begin{pmatrix} & & 1\\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}=(\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & 1\\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$$

$$=(\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3)\begin{pmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11}\\ a_{23} & a_{22} & a_{21}\\ a_{33} & a_{32} & a_{31}\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow A'=\begin{pmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11}\\ a_{23} & a_{22} & a_{21}\\ a_{33} & a_{32} & a_{31}\end{pmatrix}$$

$$23.(2)\mathcal{A}(\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3)=(\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3)A$$

$$\mathcal{A}(\varepsilon_1\ \ k\varepsilon_2\ \ \varepsilon_3)=(\varepsilon_1\ \ k\varepsilon_2\ \ \varepsilon_3)A''$$

$$(\varepsilon_1\ \ k\varepsilon_2\ \ \varepsilon_3)=(\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3)\begin{pmatrix} 1 & & \\ & k & \\ & & 1\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \mathcal{A}(\varepsilon_1\ \ k\varepsilon_2\ \ \varepsilon_3)=\mathcal{A}(\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3)\begin{pmatrix} 1 & & \\ & k & \\ & & 1\end{pmatrix}=(\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3)A\begin{pmatrix} 1 & & \\ & k & \\ & & 1\end{pmatrix}=(\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & k & \\ & & 1\end{pmatrix}$$

$$=(\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3)\begin{pmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13}\\ a_{21} & ka_{22} & a_{23}\\ a_{31} & ka_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow A''=\begin{pmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13}\\ a_{21} & ka_{22} & a_{23}\\ a_{31} & ka_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$

$$23.(3)\mathcal{A}(\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3)=(\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3)A$$

$$\mathcal{A}(\varepsilon_1+\varepsilon_2\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3)=(\varepsilon_1+\varepsilon_2\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3)A'''$$

$$(\varepsilon_1+\varepsilon_2\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3)=(\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3)\begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \mathcal{A}(\varepsilon_1+\varepsilon_2\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3)=\mathcal{A}(\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3)\begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}=(\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3)A\begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}=(\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}$$

$$=(\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3)\begin{pmatrix} a_{11}+a_{12} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21}+a_{22} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31}+a_{32} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow A'''=\begin{pmatrix} a_{11}+a_{12} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21}+a_{22} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31}+a_{32} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$

$$24.proof:$$

$A^k\xi=0,\forall\xi\in V\Longrightarrow A$幂零$\Longrightarrow A$的特征值全为0，考虑$A$的$jordan$分解:$BJB^{-1}$,其中$B$为可逆矩阵.

设$J=\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}$,则$A^m\xi=(BJB^{-1})^m\xi=BJ^mB^{-1}\xi=BJ^m(B^{-1}\xi),m=0,1,2,\cdots,k-1$

不妨设$r(J_1)=\max\limits_{1\le m\le s}\{r(J_m)\}=k-1$(因为$A^{k-1}\xi\neq0$),$J_i=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow A^m\xi(m=0,1,2,\cdots,k-1)$线性无关$\Leftrightarrow BJ^m(B^{-1}\xi)(m=0,1,2,\cdots,k-1)$线性无关

$\Leftrightarrow BJ^m\xi(m=0,1,2,\cdots,k-1)$线性无关$\Leftrightarrow J^m\xi(m=0,1,2,\cdots,k-1)$线性无关

$\Leftarrow J_1^m\xi(m=0,1,2,\cdots,k-1)$线性无关,这显然！证毕！

$25.proof$:由$jordan$分解显然

$$26.A(\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3\ \ \varepsilon_4)=(\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3\ \ \varepsilon_4)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A(\eta_1\ \ \eta_2\ \ \eta_3\ \ \eta_4)=(\eta_1\ \ \eta_2\ \ \eta_3\ \ \eta_4)A'$$

$$(\eta_1\ \ \eta_2\ \ \eta_3\ \ \eta_4)=(\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3\ \ \varepsilon_4)\begin{pmatrix} 1 & & & \\ -2 & 3 & & \\ & -1 & 1 & \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow A(\eta_1\ \ \eta_2\ \ \eta_3\ \ \eta_4)=A(\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3\ \ \varepsilon_4)\begin{pmatrix} 1 & & & \\ -2 & 3 & & \\ & -1 & 1 & \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}=(\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3\ \ \varepsilon_4)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ -2 & 3 & & \\ & -1 & 1 & \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & -4 & 10 & 10 \\ 4 & -5 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow A'=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & -4 & 10 & 10 \\ 4 & -5 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

28. 在 K^3 中给定两组基

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,1),\quad \boldsymbol{\eta}_1=(1,2,-1),$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}_2=(2,1,0),\quad \boldsymbol{\eta}_2=(2,2,-1),$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}_3=(1,1,1).\quad \boldsymbol{\eta}_3=(2,-1,-1).$$

定义线性变换

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varepsilon}_i=\boldsymbol{\eta}_i \quad (i=1,2,3).$$

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵;

(2) 求 $\boldsymbol{A}$ 在基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 下的矩阵.

28.(1) $A(\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3)=(\eta_1\ \ \eta_2\ \ \eta_3)=(\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3)A'\Longrightarrow A'=(\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3)^{-1}(\eta_1\ \ \eta_2\ \ \eta_3)$

$$=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&2&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-2&1\\1&0&-1\\-1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&2&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-4&-3&3\\2&3&3\\2&1&-5\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow A'=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-4&-3&3\\2&3&3\\2&1&-5\end{pmatrix}$$

28.(2) $A(\eta_1\ \ \eta_2\ \ \eta_3)=(\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3)=(\eta_1\ \ \eta_2\ \ \eta_3)A''$

$$\Longrightarrow A''=(\eta_1\ \ \eta_2\ \ \eta_3)^{-1}(\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3)=[(\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3)^{-1}(\eta_1\ \ \eta_2\ \ \eta_3)]^{-1}=(A')^{-1}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}-12&8&0\\-3&7&3\\-9&9&-3\end{pmatrix}$$