11/6 homework

2. 设

$$X=\begin{bmatrix}0 & A\\ C & 0\end{bmatrix},$$

其中 A,C 是两个可逆方阵. 设已知 A^{-1},C^{-1},求 X^{-1}.

$$2.X=\begin{bmatrix} & A_{n\times n}\\ C_{m\times m} & \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} & A_{n\times n}\\ C_{m\times m} & \end{bmatrix}$$

设X^{-1}对应分块为$\begin{bmatrix}Y_{m\times n} & W_{m\times m}\\ V_{n\times n} & U_{n\times m}\end{bmatrix}$

$$XX^{-1}=\begin{bmatrix} & A_{n\times n}\\ C_{m\times m} & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}Y_{m\times n} & W_{m\times m}\\ V_{n\times n} & U_{n\times m}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{n\times n}V_{n\times n} & A_{n\times n}U_{n\times m}\\ C_{m\times m}Y_{m\times n} & C_{m\times m}W_{m\times m}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_{n\times n} & \\ & I_{m\times m}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A_{n\times n}V_{n\times n}=I_{n\times n},A_{n\times n}U_{n\times m}=0,C_{m\times m}Y_{m\times n}=0,C_{m\times m}W_{m\times m}=I_{m\times m}$$

因为$A_{n\times n}$，$C_{m\times m}$可逆，$A_{n\times n}$，$C_{m\times m}$非奇异

所以$V_{n\times n}=A_{n\times n}^{-1},W_{m\times m}=C_{m\times m}^{-1}$

$U_{n\times m}=0$，$Y_{m\times n}=0$

则$X^{-1}=\begin{bmatrix} & C_{m\times m}^{-1}\\ A_{n\times n}^{-1} & \end{bmatrix}$

4. 设 A,B 分别为 m,n 阶方阵. 如果存在 m,n 阶可逆方阵 T_1, T_2,使 $T_1^{-1}AT_1$ 和 $T_2^{-1}BT_2$ 均为对角矩阵,试证：存在 $m+n$ 阶可逆

方阵 T,使

$$T^{-1}\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{bmatrix}T$$

为对角矩阵.

4.直接令$T=\begin{bmatrix} T_1 & \\ & T_2 \end{bmatrix}$,设$T^{-1}$对应分块为$\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}$

$$TT^{-1}=\begin{bmatrix} T_1 & \\ & T_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} T_1X_{11} & T_1X_{12} \\ T_2X_{21} & T_2X_{22} \end{bmatrix}=I$$

$$\Rightarrow T_1X_{11}=I, T_2X_{22}=I, T_1X_{12}=0, T_2X_{21}=0$$

$$\Rightarrow X_{11}=T_1^{-1}, X_{22}=T_2^{-1}, X_{12}=0, X_{21}=0$$

$$\Rightarrow T^{-1}=\begin{bmatrix} T_1^{-1} & \\ & T_2^{-1} \end{bmatrix}$$

记$T^{-1}AT=\Lambda_1, T^{-1}BT=\Lambda_2$为对角矩阵

$$\Rightarrow T^{-1}\begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix}T=\begin{bmatrix} T_1^{-1} & \\ & T_2^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_1 & \\ & T_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} T_1^{-1}A & \\ & T_2^{-1}B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_1 & \\ & T_2 \end{bmatrix}$$

$=\begin{bmatrix} T_1^{-1}AT_1 & \\ & T_2^{-1}BT_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \Lambda_1 & \\ & \Lambda_2 \end{bmatrix}$为对角矩阵.

11/10 homework

5. 求下列排列的反序数，并判断它是奇排列还是偶排列.

23145；　985467321；　375149；

$n(n-1)(n-2)\cdots 321$；　$(2n+1)(2n-1)\cdots 531$.

(1)23145：反序数为2，是偶排列

(2)985467321:反序数为31，是奇排列

(3)375149:反序数为6，是偶排列

(4)$n!$:反序数为$\sum_{k=1}^{n}(k-1)=\frac{n(n-1)}{2}$,

$n\equiv 0,1 \pmod 4$时是偶排列，$n\equiv 2,3 \pmod 4$时是奇排列

(5)$(2n+1)!$:反序数为$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$,

$n\equiv 0,3 \pmod 4$时是偶排列，$n\equiv 1,2 \pmod 4$时是奇排列

7．在六阶行列式中，

$$a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65} \quad \text{以及} \quad a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$$

这两项应带什么符号？

借助符号矩阵：$\begin{bmatrix} + & - & + & - & + & - \\ - & + & - & + & - & + \\ + & - & + & - & + & - \\ - & + & - & + & - & + \\ + & - & + & - & + & - \\ - & + & - & + & - & + \end{bmatrix}$，那么前者的符号是–,后者的符号是+

8．写出四阶行列式中所有带负号，且包含因子 a_{23}的项．

$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$考虑其中包含$a_{23}$且带负号的项

只需考虑$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{pmatrix}$带正号的项

即：$a_{11}a_{32}a_{44}, a_{12}a_{34}a_{41}, a_{14}a_{31}a_{42}$

于是$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$中包含$a_{23}$且带负号的项为

$-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}, -a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}, -a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$

9. 证明：

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

第三四五列线性相关，故该矩阵为奇异矩阵，行列式为0

或者*big formula*中不可能选到五个不同行不同列的非零元.

10. 求

$$f(x) = \begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

中 x^4 与 x^3 的系数.

由第一行的laplace展开可得：

$$f(x) = \begin{bmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{bmatrix}$$

$$= 2x\begin{bmatrix} x & 1 & -1 \\ 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{bmatrix} - x\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & x & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & x \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & x & 1 \\ 3 & 2 & x \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

x^4的系数为2，x^3的系数为-1

11. 由

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

证明：前 n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 所组成的排列中，奇、偶排列各占一半.

$$0=\det\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \sum_{\{i_1,i_2,\cdots,i_n\}\text{是}\{1,2,\cdots,n\}\text{的一个排列}} \sigma\{i_1,i_2,\cdots,i_n\}$$

这说明$1,2,\cdots,n$的排列中奇偶子列各占一半.

·18. 计算下列行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$；

由于上三角矩阵的行列式等于对角线元的乘积$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -6.$