10/30 homework

1．进行下列矩阵运算：

(3) $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$；

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_1 a_{12} & \lambda_1 a_{13} & \lambda_1 a_{14} \\ \lambda_2 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \lambda_2 a_{23} & \lambda_2 a_{24} \\ \lambda_3 a_{31} & \lambda_3 a_{32} & \lambda_3 a_{33} & \lambda_3 a_{34} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_2 a_{12} & \lambda_3 a_{13} & \lambda_4 a_{14} \\ \lambda_1 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \lambda_3 a_{23} & \lambda_4 a_{24} \\ \lambda_1 a_{31} & \lambda_2 a_{32} & \lambda_3 a_{33} & \lambda_4 a_{34} \end{bmatrix}$$

$0 \quad 0 \quad 0 \quad \lambda_4$

2．设

(1) $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$；

计算 AB，$AB-BA$，$(AB)'$，$A'B'$.

$$A=\begin{bmatrix}3&1&1\\2&1&2\\1&2&3\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1&1&-1\\2&-1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$$

求$AB, AB-BA, (AB)', A'B'$

$$\bullet AB=\begin{bmatrix}3&1&1\\2&1&2\\1&2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&-1\\2&-1&0\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&2&-2\\6&1&0\\8&-1&2\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}1&1&-1\\2&-1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1&1\\2&1&2\\1&2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&0&0\\4&1&0\\4&3&4\end{bmatrix}$$

$$\bullet AB-BA=\begin{bmatrix}6&2&-2\\6&1&0\\8&-1&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4&0&0\\4&1&0\\4&3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2&-2\\2&0&0\\4&-4&-2\end{bmatrix}$$

$$\bullet (AB)'=\begin{bmatrix}6&2&-2\\6&1&0\\8&-1&2\end{bmatrix}'=\begin{bmatrix}6&6&8\\2&1&-1\\-2&0&2\end{bmatrix}$$

$$\bullet A'B'=(BA)'=\begin{bmatrix}4&0&0\\4&1&0\\4&3&4\end{bmatrix}'=\begin{bmatrix}4&4&4\\0&1&3\\0&0&4\end{bmatrix}$$

3. 计算：

(1) $\begin{pmatrix}2&3&-1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}$；　　(2) $\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}2&3&-1\end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix}x&y&1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\1\end{bmatrix}$；

$$(1)\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}=0$$

$$(2)\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\-2 & -3 & 1\\-2 & -3 & 1\end{bmatrix}$$

$$(3)\begin{pmatrix}x & y & 1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}xa_{11}+ya_{21}+a_{31} & xa_{12}+ya_{22}+a_{32} & xa_{13}+ya_{23}+a_{33}\end{pmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\1\end{bmatrix}$$

$$=\left(xa_{11}+ya_{21}+a_{31}\right)x+\left(xa_{12}+ya_{22}+a_{32}\right)y+\left(xa_{13}+ya_{23}+a_{33}\right)$$

$$=a_{11}x^2+a_{22}y^2+\left(a_{21}+a_{12}\right)xy+\left(a_{31}+a_{13}\right)x+\left(a_{32}+a_{23}\right)y+a_{33}$$

8. 设 $A\in M_{m,n}(K)$ 且 $\mathrm{r}(A)=n$. 又设 B,C 为数域 K 上 $n\times s$ 矩阵，且 $AB=AC$. 证明 $B=C$.

$AB = AC \Rightarrow AB - AC = 0 \Rightarrow A(B-C) = 0$

$B \triangleq (b_1 \quad \cdots \quad b_s), C \triangleq (c_1 \quad \cdots \quad c_s)$

$thus\ A(B-C) = 0 \Leftrightarrow A(b_1 - c_1 \quad \cdots \quad b_s - c_s) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A(b_1 - c_1) = 0 \\ \vdots \\ A(b_s - c_s) = 0 \end{cases}$$

since $\dim \mathrm{C}(A^T) = r(A) = n$

$\dim C(A^T) + \dim N(A) = n$

$\Rightarrow \dim N(A) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_1 - c_1 = 0 \\ \vdots \\ b_s - c_s = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow B = C$

10. 设 A,B 是数域 K 上的两个 $m\times n$ 矩阵. 如果 $\mathrm{r}(A) < \frac{n}{2}$, $\mathrm{r}(B) < \frac{n}{2}$. 证明存在 K 上 $n\times s$ 矩阵 C, $C\neq 0$, 使 $(A+B)C=0$.

$r(A+B) \le r(A) + r(B) < \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$

$\Rightarrow r(A+B) \le n-1$

since $\dim \mathrm{C}\left((A+B)^T\right) = r(A+B) \le n-1$

$\dim C\left((A+B)^T\right) + \dim N(A+B) = n$

$\Rightarrow \dim N(A+B) \ge 1$

$choose\ c \ne 0\ in\ N(A+B)$

$let\ C = (c \quad \cdots \quad c) \Rightarrow (A+B)C = 0$

11. 设 A,B 是数域 K 上两个 $n\times n$ 矩阵. 已知存在 K 上非零的 $n\times n$ 矩阵 C, 使 $AC=0$. 证明存在 K 上非零的 $n\times n$ 矩阵 D, 使 $ABD=0$.

$$\exists C \in M_{n,n}(K), s.t. AC = 0$$
$$\Rightarrow N(A) \geq 1$$
$$\Rightarrow C(A^T) \leq n-1$$
$$\Rightarrow r(A) \leq n-1$$
$$\Rightarrow r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\} \leq r(A) \leq n-1$$
$$\Rightarrow C((AB)^T) \leq n-1$$
$$\Rightarrow N(AB) \geq 1$$
$$choose\ d \neq 0\ in\ N(A+B)$$
$$let\ D = \begin{pmatrix} d & \cdots & d \end{pmatrix} \Rightarrow ABD = 0$$

1. 计算下列矩阵：

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^2$；　　(2) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}^5$；

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n$；　　(4) $\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}^n$；

(5) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^n$；　　(6) $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}^n$.

$$(2)\begin{bmatrix}3&2\\-4&-2\end{bmatrix}^5=\begin{bmatrix}3&2\\-4&-2\end{bmatrix}^5=\begin{bmatrix}3&2\\-4&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2\\-4&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2\\-4&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2\\-4&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2\\-4&-2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&2\\-4&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\-4&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2\\-4&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7&-6\\12&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2\\-4&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-2\\4&8\end{bmatrix}$$

$$(4)\begin{bmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi\\\sin\varphi&\cos\varphi\end{bmatrix}^n=?$$

$$\begin{bmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi\\\sin\varphi&\cos\varphi\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi\\\sin\varphi&\cos\varphi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi\\\sin\varphi&\cos\varphi\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos^2\varphi-\sin^2\varphi&-2\sin\varphi\cos\varphi\\2\sin\varphi\cos\varphi&\cos^2\varphi-\sin^2\varphi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos2\varphi&-\sin2\varphi\\\sin2\varphi&\cos2\varphi\end{bmatrix}$$

$$\textit{assume that}:\begin{bmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi\\\sin\varphi&\cos\varphi\end{bmatrix}^{n-1}=\begin{bmatrix}\cos(n-1)\varphi&-\sin(n-1)\varphi\\\sin(n-1)\varphi&\cos(n-1)\varphi\end{bmatrix}$$

$$\textit{then}\begin{bmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi\\\sin\varphi&\cos\varphi\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi\\\sin\varphi&\cos\varphi\end{bmatrix}^{n-1}\begin{bmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi\\\sin\varphi&\cos\varphi\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos(n-1)\varphi&-\sin(n-1)\varphi\\\sin(n-1)\varphi&\cos(n-1)\varphi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi\\\sin\varphi&\cos\varphi\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos(n-1)\varphi\cos\varphi-\sin(n-1)\varphi\sin\varphi&-\cos(n-1)\varphi\sin\varphi-\sin(n-1)\varphi\cos\varphi\\\cos(n-1)\varphi\sin\varphi+\sin(n-1)\varphi\cos\varphi&\cos(n-1)\varphi\cos\varphi-\sin(n-1)\varphi\sin\varphi\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos n\varphi&-\sin n\varphi\\\sin n\varphi&\cos n\varphi\end{bmatrix}$$

$$\textit{by induction},\begin{bmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi\\\sin\varphi&\cos\varphi\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}\cos n\varphi&-\sin n\varphi\\\sin n\varphi&\cos n\varphi\end{bmatrix}.$$

$$(6)\begin{bmatrix}\lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda\end{bmatrix}^n = ?$$

$$\begin{bmatrix}\lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda\end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix}\lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda^2 & 2\lambda & 1 \\ & \lambda^2 & 2\lambda \\ & & \lambda^2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda\end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix}\lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}\lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda^2 & 2\lambda & 1 \\ & \lambda^2 & 2\lambda \\ & & \lambda^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda \\ & \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ & & \lambda^3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda\end{bmatrix}^4 = \begin{bmatrix}\lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda\end{bmatrix}^3\begin{bmatrix}\lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda \\ & \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ & & \lambda^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda^4 & 4\lambda^3 & 6\lambda^2 \\ & \lambda^4 & 4\lambda^3 \\ & & \lambda^4\end{bmatrix}$$

$$assume\ that: \begin{bmatrix}\lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda\end{bmatrix}^{n-1} = \begin{bmatrix}\lambda^{n-1} & (n-1)\lambda^{n-2} & \frac{(n-1)(n-2)}{2}\lambda^{n-3} \\ & \lambda^{n-1} & (n-1)\lambda^{n-2} \\ & & \lambda^{n-1}\end{bmatrix}$$

$$then \begin{bmatrix}\lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda\end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix}\lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda\end{bmatrix}^{n-1}\begin{bmatrix}\lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\lambda^{n-1} & (n-1)\lambda^{n-2} & \frac{(n-1)(n-2)}{2}\lambda^{n-3} \\ & \lambda^{n-1} & (n-1)\lambda^{n-2} \\ & & \lambda^{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2} \\ & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ & & \lambda^n\end{bmatrix}$$

$$by\ induction: \begin{bmatrix}\lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda\end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix}\lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2} \\ & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ & & \lambda^n\end{bmatrix}$$

2. 给定 n 阶方阵

$$J=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}_{n\times n},$$

证明：当 $k\geqslant n$ 时，$J^k=0$（矩阵中空白处元素为零）.

$$2.J=\begin{bmatrix}0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & 0\end{bmatrix}_{n\times n}$$

$$J=\begin{bmatrix}0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & 0\end{bmatrix},$$

$$J^2=\begin{bmatrix}0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & \ddots & 0 \\ & & & & & 0\end{bmatrix}$$

$$J^3=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & \ddots & 0 \\ & & & & & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & \ddots & 0 \\ & & & & & 0\end{bmatrix}$$

$\cdots$

$$J^{n-1}=\begin{bmatrix} & & & & 1 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix},$$

$$J^n=0$$

$$\Rightarrow \forall k\ge n, J^k=J^{k-n}J^n=J^{k-n}0=0$$

5. 设给定数域 K 上的对角矩阵

$$A=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix},\quad \lambda_i\neq\lambda_j\quad(i\neq j),$$

证明：与 A 可交换的数域 K 上的 n 阶方阵都是对角矩阵.

5.假设与A可交换的矩阵为$B \triangleq \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

则$AB = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_1 a_{12} & \dots & \lambda_1 a_{1n} \\ \lambda_2 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \cdots & \lambda_2 a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_n a_{n1} & \lambda_n a_{n2} & \cdots & \lambda_n a_{nn} \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_2 a_{12} & \dots & \lambda_n a_{1n} \\ \lambda_1 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \cdots & \lambda_n a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 a_{n1} & \lambda_2 a_{n2} & \cdots & \lambda_n a_{nn} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \forall i, j \in \{1,2,\cdots,n\}, \lambda_i a_{ij} = \lambda_j a_{ij}$

$\Rightarrow \forall i, j \in \{1,2,\cdots,n\} : i < j, \lambda_i a_{ij} = \lambda_j a_{ij}, \lambda_i a_{ji} = \lambda_j a_{ji}$

$\Rightarrow \forall i, j \in \{1,2,\cdots,n\} : i < j, \left(\lambda_i - \lambda_j\right)\left(a_{ij} + a_{ji}\right) = 0, \left(\lambda_i - \lambda_j\right)\left(a_{ij} - a_{ji}\right) = 0$

$\overset{\lambda_i \neq \lambda_j}{\Rightarrow} \forall i, j \in \{1,2,\cdots,n\} : i < j, a_{ij} + a_{ji} = 0, a_{ij} - a_{ji} = 0$

$\Rightarrow \forall i, j \in \{1,2,\cdots,n\} : i < j, a_{ij} = a_{ji} = 0$

这说明与A可交换的矩阵只有可能在对角线上不为0

下验证所有对角矩阵都与A可交换

设对角矩阵$C = \begin{pmatrix} c_1 & & & \\ & c_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & c_n \end{pmatrix}$

$AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 c_1 & & & \\ & \lambda_2 c_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n c_n \end{pmatrix}$

$CA = \begin{pmatrix} \lambda_1 c_1 & & & \\ & \lambda_2 c_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n c_n \end{pmatrix} = AC$

得证！

7. 设 A 是数域 K 上的 n 阶方阵. 证明：

(1) 若 $A^2=E$，则

$$r(A+E)+r(A-E)=n;$$

(2) 若 $A^2=A$，则

$$r(A)+r(A-E)=n.$$

7.(1) $A^2=E \Rightarrow r(A^2)=r(E) \overset{r(AB)\le\min\{r(A),r(B)\}}{\Rightarrow} r(A)\ge r(E)=n \overset{r(A)\le n}{\Rightarrow} r(A)=n$

$A^2=E \Rightarrow A^2=E^2 \Rightarrow A^2-E^2=0 \Rightarrow (A+E)(A-E)=0$

$\Rightarrow$ the row space of $(A+E)$ is orthogonal to the column space of $(A-E)$.

i.e. the columns of $(A-E)$ are in the nullspace of $(A+E)$

$\Rightarrow r(A-E)\le r(N(A+E))=n-r(A+E)$

$\Rightarrow r(A-E)+r(A+E)\le n$

since $r(A-E)+r(A+E)\ge r((A-E)+(A+E))=r(2A)=r(A)=n$

Hence, $r(A-E)+r(A+E)=n$

7.(2) $A^2=A \Rightarrow A^2=AE \Rightarrow A^2-AE=0 \Rightarrow A(A-E)=0$

$\Rightarrow$ the row space of A is orthogonal to the column space of $(A-E)$.

i.e. the columns of $(A-E)$ are in the nullspace of A

$\Rightarrow r(A-E)\le r(N(A))=n-r(A)$

$\Rightarrow r(A-E)+r(A)\le n$

since $r(A-E)+r(A)=r(E-A)+r(A)\ge r(E-A+A)=r(E)=n$

Hence, $r(A-E)+r(A)=n.$

10. 给定

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 15 & 2 & 0\\ 4 & 2 & 1\end{bmatrix}.$$

(1) 证明

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 1 & -4\\ -15 & -7 & 30\\ 22 & 10 & -43\end{bmatrix};$$

(2) 利用上述结果解线性方程组

$$\begin{cases}x_1+3x_2+2x_3=b_1,\\ 15x_1+2x_2=b_2,\\ 4x_1+2x_2+x_3=b_3.\end{cases}$$

$10.(1)\ proof:$

$$A=\begin{bmatrix}1&3&2\\15&2&0\\4&2&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}A & E\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1&3&2&1&&\\15&2&0&&1&\\4&2&1&&&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&2&1&&\\0&-43&-30&-15&1&\\0&-10&-7&-4&&1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&3&2&1&&\\0&1&\frac{30}{43}&\frac{15}{43}&-\frac{1}{43}&\\0&1&\frac{7}{10}&\frac{2}{5}&&-\frac{1}{10}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&2&1&&\\0&1&\frac{30}{43}&\frac{15}{43}&-\frac{1}{43}&\\0&0&\frac{1}{430}&\frac{11}{215}&\frac{1}{43}&-\frac{1}{10}\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&3&2&1&&\\0&1&\frac{30}{43}&\frac{15}{43}&-\frac{1}{43}&\\0&0&1&22&10&-43\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&2&1&&\\0&1&0&-15&-7&30\\0&0&1&22&10&-43\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&3&0&-43&-20&86\\0&1&0&-15&-7&30\\0&0&1&22&10&-43\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&2&1&-4\\0&1&0&-15&-7&30\\0&0&1&22&10&-43\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}E & A^{-1}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}2&1&-4\\-15&-7&30\\22&10&-43\end{bmatrix}$$

$$10.(2)\ A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&-4\\-15&-7&30\\22&10&-43\end{bmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2b_1+b_2-4b_3\\-15b_1-7b_2+30b_3\\22b_1+10b_2-43b_3\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x_1=2b_1+b_2-4b_3\\x_2=-15b_1-7b_2+30b_3\\x_3=22b_1+10b_2-43b_3\end{cases}$$

11. 计算下列逆矩阵：

(1) $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，$ad-bc=1$；

(2) $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$；　(3) $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$；

(4) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}$；　(5) $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$；

$$11.(2)\ A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}A & I\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 1 & & \\ 2 & 1 & 0 & & 1 & \\ 1 & -1 & 0 & & & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 1 & & \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & \\ 0 & -2 & 1 & -1 & & 1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 1 & & \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & \\ 0 & -2 & 1 & -1 & & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 1 & & \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 1 & & \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 1 & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}I & A^{-1}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ -1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

$$11.(4)\ A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&2\\1&1&1&-1\\1&0&-2&-6\end{bmatrix}$$

$$(A\quad I)=\begin{bmatrix}1&2&3&4&1&&&\\2&3&1&2&&1&&\\1&1&1&-1&&&1&\\1&0&-2&-6&&&&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&-1&&&1&\\2&3&1&2&&1&&\\1&2&3&4&1&&&\\1&0&-2&-6&&&&1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&1&1&-1&&&1&\\0&1&-1&4&&1&-2&\\0&1&2&5&1&&-1&\\0&-1&-3&-5&&&-1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&-1&&&1&\\0&1&-1&4&&1&-2&\\0&0&3&1&1&-1&1&\\0&0&-4&-1&&1&-3&1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&1&1&-1&&&1&\\0&1&-1&4&&1&-2&\\0&0&-1&0&1&&-2&1\\0&0&-4&-1&&1&-3&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&-1&&&1&\\0&1&-1&4&&1&-2&\\0&0&1&0&-1&&2&-1\\0&0&-4&-1&&1&-3&1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&1&1&-1&&&1&\\0&1&-1&4&&1&-2&\\0&0&1&0&-1&&2&-1\\0&0&0&-1&-4&1&5&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&-1&&&1&\\0&1&-1&4&&1&-2&\\0&0&1&0&-1&&2&-1\\0&0&0&1&4&-1&-5&3\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&1&1&0&4&-1&-4&3\\0&1&-1&0&-16&5&18&-12\\0&0&1&0&-1&&2&-1\\0&0&0&1&4&-1&-5&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0&0&5&-1&-6&4\\0&1&0&0&-17&5&20&-13\\0&0&1&0&-1&&2&-1\\0&0&0&1&4&-1&-5&3\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&0&0&22&-6&-26&17\\0&1&0&0&-17&5&20&-13\\0&0&1&0&-1&&2&-1\\0&0&0&1&4&-1&-5&3\end{bmatrix}=\left(I\quad A^{-1}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}22&-6&-26&17\\-17&5&20&-13\\-1&&2&-1\\4&-1&-5&3\end{bmatrix}$$

12. 求方阵 X,使

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$;

(2) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

$$12.(2)\ A \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ & 2 & 2 \\ 1 & -1 & \end{bmatrix}$$

$$(A \quad I) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & & \\ & 2 & 2 & & 1 & \\ 1 & -1 & & & & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & & \\ & 2 & 2 & & 1 & \\ & -2 & 1 & -1 & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & & \\ & 2 & 2 & & 1 & \\ & & 3 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & & \frac{1}{2} & \\ & & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ & 1 & & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ & & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & & & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ & 1 & & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ & & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = (I \quad A^{-1})$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$thus\ AX = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow X = A^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{6} & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \\ \frac{2}{3} & 1 & \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} \frac{7}{6} & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \\ \frac{2}{3} & 1 & \end{bmatrix}$$

19. 设 A 是数域 K 上的一个 n 阶方阵，$A^k=0$. 证明：

$$(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}.$$

19.*proof* :

$$(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$$

$$\Leftarrow (E-A)\left(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}\right)=E$$

$$\Leftrightarrow E=\left(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}\right)-\left(A+A^2+\cdots+A^k\right)=E-A^k$$

$$\Leftrightarrow A^k=0.(\text{solved})$$